

---

**BIFORCAZIONI E CAOS DETERMINISTICO  
NEI SISTEMI DINAMICI**

a cura di

**C. Piccardi e S. Rinaldi**

*Rapporto interno n. 93.047*



## **Premessa**

In questo rapporto sono raccolte le note di quattro lezioni che saranno tenute al Convegno-Scuola su *Biosistemi e Complessità*, Bressanone, 27-30 Settembre 1993. Le prime tre lezioni sono del tutto generali e riguardano il *comportamento asintotico dei sistemi dinamici*, la *stabilità strutturale* ed il *caos deterministico*. La quarta riguarda, invece, il problema della *caoticità indotta dalle stagioni nella dinamica delle popolazioni*. Pur essendo mirata ad un problema specifico, anche quest'ultima lezione presenta un metodo di analisi del tutto generale per lo studio della risposta in frequenza dei sistemi non lineari.

Milano, Luglio 1993

**Gli autori**



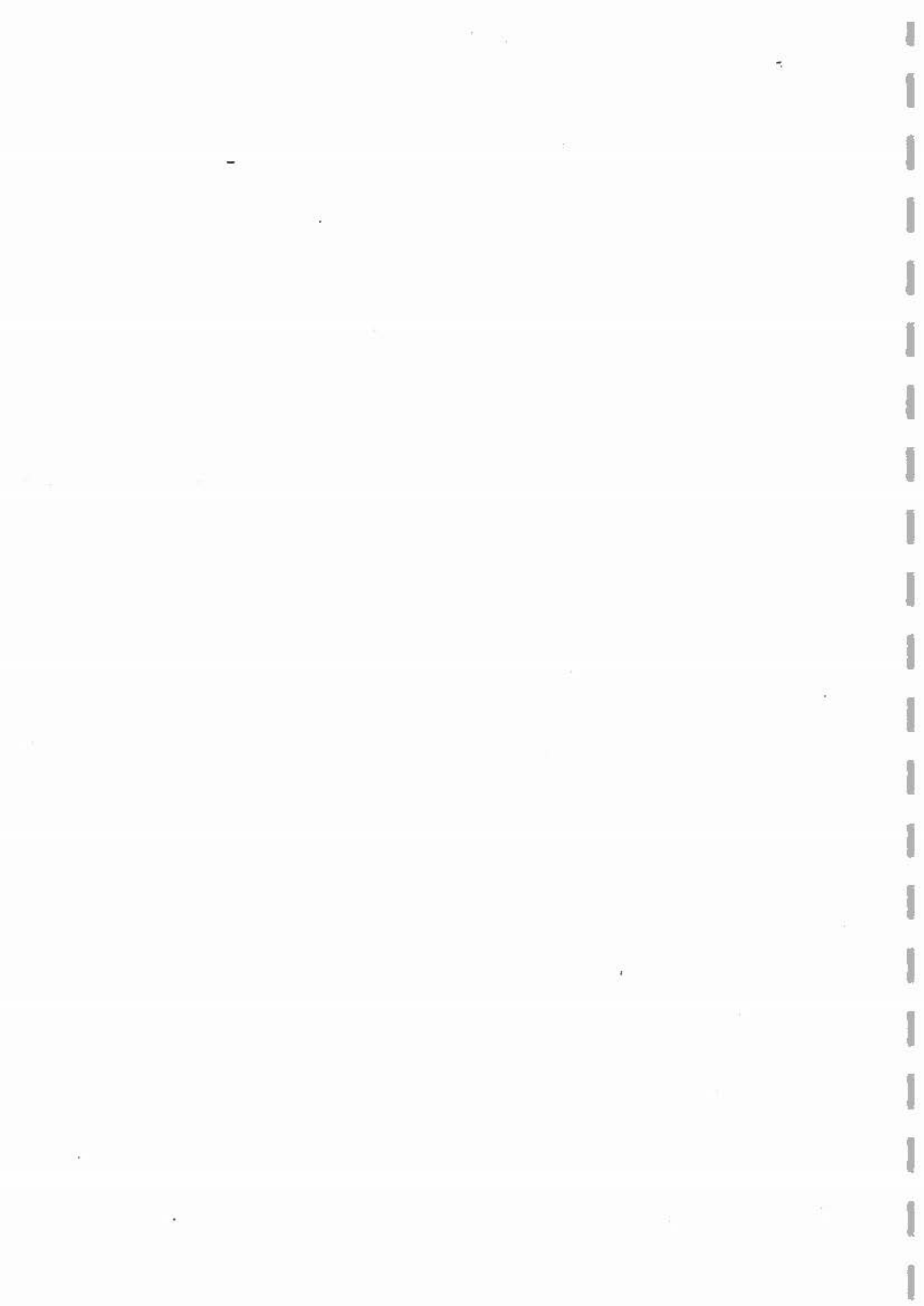


# **COMPORAMENTO ASINTOTICO DEI SISTEMI DINAMICI**

*a cura di*

**Sergio Rinaldi**

**Dipartimento di Elettronica e Informazione, Politecnico di Milano**



# COMPORTAMENTO ASINTOTICO DEI SISTEMI DINAMICI

Sergio Rinaldi

Dipartimento di Elettronica e Informazione, Politecnico di Milano

## 1. INTRODUZIONE

In questo capitolo e nei due seguenti verranno presentate le più importanti nozioni e i più importanti risultati relativi al comportamento asintotico dei sistemi dinamici non lineari. Per brevità ci limiteremo al caso dei *sistemi autonomi a tempo continuo*

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t)) \quad t \text{ reale} \quad (1)$$

dove  $\mathbf{x}(t) = [x_1(t) \dots x_n(t)]^T$  è il vettore di stato all'istante  $t$  (e  $\mathbf{f}$  è una funzione sufficientemente regolare, ad esempio, continua insieme alle sue derivate di ordine  $1, 2, \dots, k$ ). Tuttavia, molti dei risultati che discuteremo sono estendibili, con le dovute precauzioni e puntualizzazioni, al caso dei sistemi autonomi a tempo discreto

$$\mathbf{x}(t+1) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t)) \quad t \text{ intero}$$

o al caso dei sistemi tempo varianti (in cui  $\mathbf{f}$  dipende anche esplicitamente dal tempo). Per discutere alcune proprietà faremo uso del *quadro delle traiettorie* appoggiandoci, il più delle volte, su esempi del secondo o terzo ordine, in modo che la visualizzazione sia efficace.

In questo primo capitolo daremo la definizione generale di *attrattore* e passeremo poi in rassegna gli attrattori più noti: equilibri, cicli, tori e strani attrattori. Nel secondo capitolo considereremo, invece, il problema delle biforcazioni, cioè il problema della sensibilità del comportamento del sistema ad uno o più parametri. L'approccio sarà quello più semplice possibile, in cui le biforcazioni sono interpretate come collisioni tra equilibri, cicli, ... (biforcazioni locali) o tra varietà stabili e instabili di equilibri, cicli, ... (biforcazioni globali). Questo approccio permette di inquadrare con grande semplicità ed efficacia il problema delle transizioni catastrofiche, tanto importante nelle applicazioni. Infine, nel terzo capitolo faremo alcune puntualizzazioni sugli strani attrattori e sul caos deterministico. In particolare, definiremo i più importanti indicatori di caos (esponente di Liapunov e dimensione frattale) e mostreremo che la transizione al caos è marcata da una biforcazione globale o da una sequenza di biforcazioni locali.

Tutti i temi trattati sono decisamente complessi e i risultati, anche quelli più noti, sono spesso delicati da dimostrare. Le ipotesi necessarie per poter provare una proprietà sono

spesso numerose e a volte relativamente complicate da esprimere. Tuttavia, esse sono, di norma, semplici ipotesi di regolarità o genericità e, pertanto, non pongono quasi mai problemi nelle applicazioni. Nell'esporre i risultati ci permetteremo di non precisare alcune di queste ipotesi (naturalmente quelle che riterremo inessenziali) e, comunque, non presenteremo mai prove formali di quanto affermato. Il lettore interessato alle formulazioni dettagliate delle proprietà e alle loro dimostrazioni dovrà fare riferimento ad uno dei testi menzionati nell'ultimo paragrafo.

## 2. INSIEMI LIMITE E ATTRATTORI

Nel seguito la soluzione  $x(t)$  del sistema (1) corrispondente ad una condizione iniziale  $x(0) = x_0$  sarà indicata con

$$x(t) = \phi(t, x_0)$$

Inoltre, un insieme  $A \subset R^n$  si dirà *invariante* se e solo se

$$\phi(t, A) \subset A \quad \forall t \geq 0$$

Un insieme invariante è, pertanto, una "trappola" per lo stato del sistema: una traiettoria radicata in un punto  $x_0 \in A$  non può uscire da  $A$ , mentre possono eventualmente esistere traiettorie radicate in punti  $x_0 \in A$  che entrano ad un certo istante in  $A$ .

Molte sono le nozioni utili per la caratterizzazione del comportamento asintotico di un sistema dinamico. Quelle di *insieme limite* e di *attrattore* sono, comunque, le più importanti.

### Definizione di punti e insiemi limite

Un punto  $x^*$  è detto punto  $\omega$ -limite di una traiettoria radicata in  $x_0$  se e solo se esiste una successione di istanti  $t_i, i = 1, 2, \dots$  tale che  $\phi(t_i, x_0) \rightarrow x^*$ . L'insieme di tutti i punti  $x^*$  viene indicato  $\omega(x_0)$  e chiamato insieme  $\omega$ -limite di  $x_0$ . L'insieme  $\Omega$  di tutti gli insiemi  $\omega$ -limite si chiama insieme limite

$$\Omega = \bigcup_{x_0} \{\omega(x_0)\} \quad \square$$

Stati di equilibrio e cicli, cioè punti e linee chiuse di  $R^n$  corrispondenti a soluzioni costanti o periodiche di (1), sono ovviamente elementi dell'insieme limite. Ma  $\Omega$  può contenere anche altri elementi. Ad esempio, in Fig. 1 è mostrato il quadro delle traiettorie di un sistema del secondo ordine con due equilibri: un fuoco instabile  $F$  e una sella  $S$ . La caratteristica saliente del quadro è che una delle due traiettorie "uscenti" dalla sella, "rientra" nella sella. Tale traiettoria, indicata con  $o$  in figura si chiama *omoclina*.

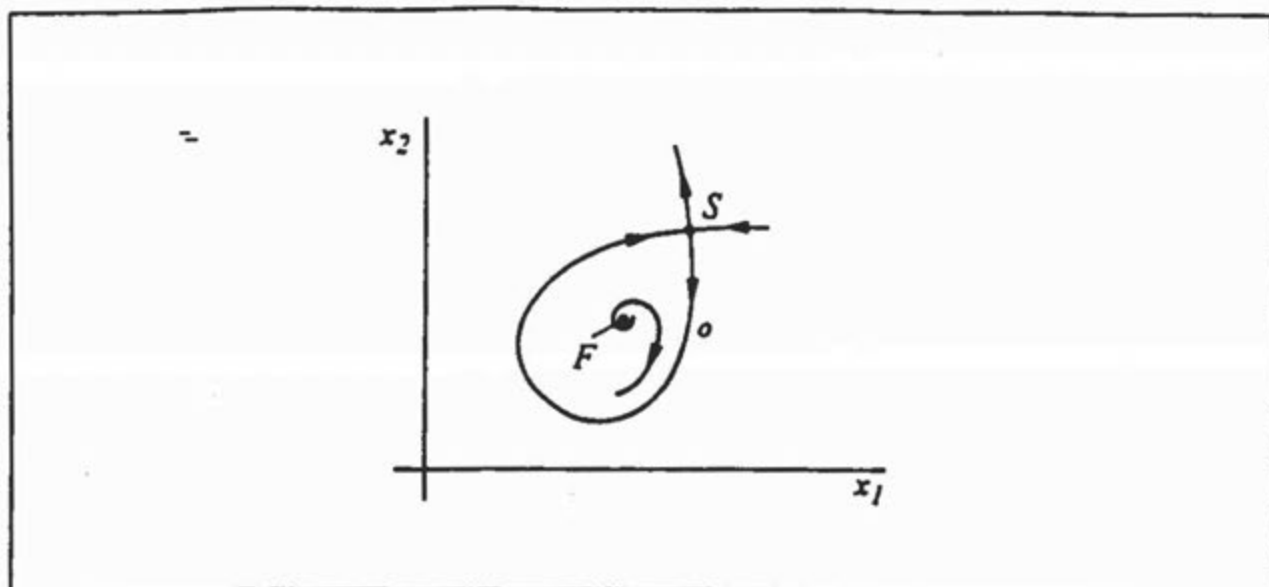


Fig. 1 - Collegamento omoclinico  $o$  appartenente all'insieme limite  $\Omega = \{o \cup S \cup F\}$

Oltre ad  $S$  e a  $F$ , anche  $o$  fa parte di  $\Omega$ . Infatti tutte le traiettorie radicate in punti  $x_0 \neq F$  interni alla linea chiusa costituita dalla riunione di  $S$  e  $o$  hanno qualsiasi punto di  $o$  come punto  $\omega$ -limite.

#### Definizione di attrattore

Un insieme chiuso e invariante  $A \subset R^n$  è un attrattore se e solo se è indecomponibile (proprietà (a)) e attraente (proprietà (b))

$$(a) \quad \forall X', X'' \subset A \quad \exists t: \phi(t, X') \cap X'' \neq \emptyset \quad (X' \text{ e } X'' \text{ aperti})$$

$$(b) \quad \exists \text{ intorno aperto e invariante } U \text{ di } A \text{ tale che } \phi(t, x_0) \rightarrow A \quad \forall x_0 \in U \text{ e per } t \rightarrow \infty$$

Il bacino di attrazione  $B$  dell'attrattore  $A$  è l'insieme

$$B(A) = \bigcup_{t \geq 0} \phi(t, U) \quad \square$$

E' importante osservare che l'indecomponibilità afferma che un attrattore  $A$  è individuato da un suo punto qualsiasi  $x_0$ , nel senso che la traiettoria radicata in  $x_0$  riempie densamente  $A$ . La proprietà (b) dice, invece, che partendo da un punto  $x_0$  vicino all'attrattore, si tende asintoticamente verso l'attrattore. E', tuttavia, opportuno notare che la proprietà (b) non richiede che la traiettoria radicata in  $x_0$  sia vicina ad  $A$  per tutti i  $t \geq 0$ . In Fig. 2, ad esempio, è mostrato il quadro di traiettorie di un sistema del secondo ordine con due stati di equilibrio (un fuoco instabile  $F$  e un nodo-sella  $NS$ ). Tutte le traiettorie, eccetto  $F$ , tendono asintoticamente verso  $NS$ . L'equilibrio  $NS$  è, quindi, un attrattore, con bacino di attrazione costituito da  $R^2$  privato del punto  $F$ . Malgrado ciò, l'equilibrio  $NS$  è instabile, secondo la definizione classica di

Liapunov (perturbazioni microscopiche da  $NS$  possono dar luogo a traiettorie che (temporaneamente) si allontanano macroscopicamente da  $NS$ ).

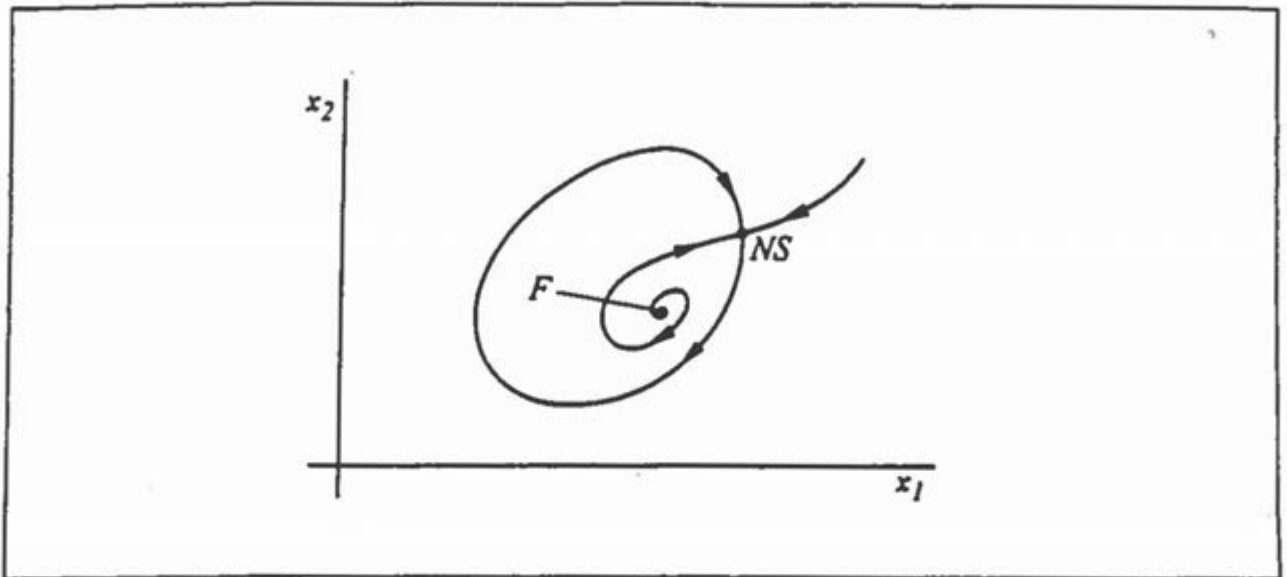


Fig. 2 - Esempio di attrattore (nodo-sella  $NS$ )

Un sistema non lineare può anche non avere attrattori (come, ad esempio, il sistema di Fig. 1) o averne più d'uno come i due sistemi mostrati in Fig. 3, che hanno una coppia di attrattori (due fuochi stabili ( $F_1$  e  $F_2$ ) nel primo caso e un ciclo stabile ( $\gamma$ ) e un fuoco stabile ( $F$ ) nel secondo caso).

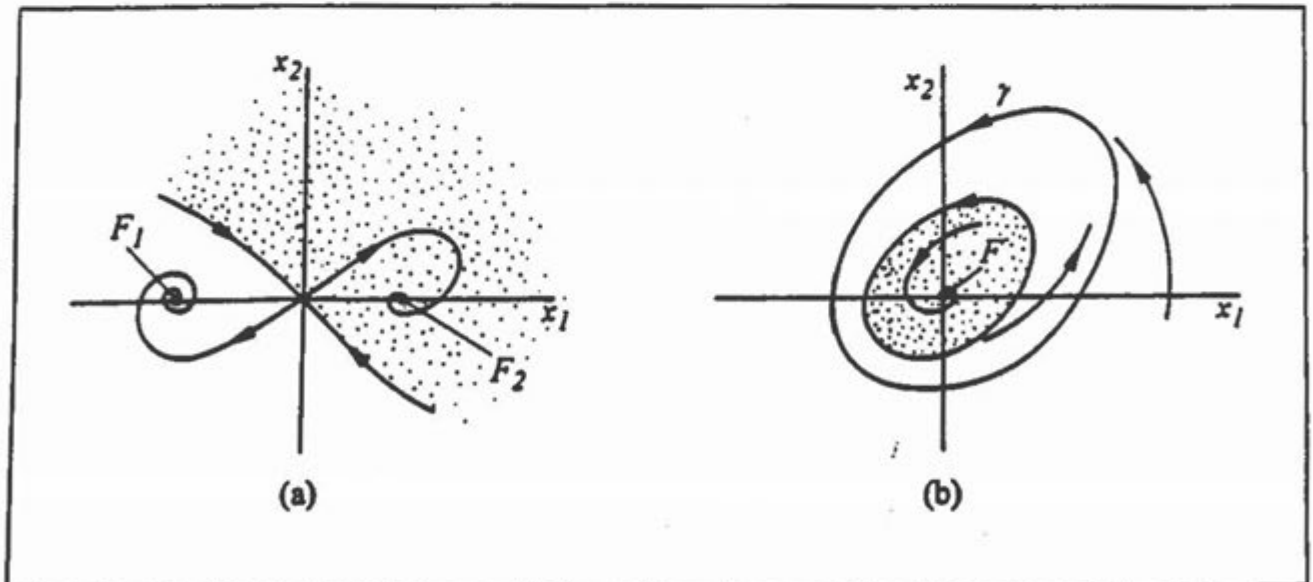


Fig. 3 - Sistemi con attrattori multipli: (a) due equilibri stabili ( $F_1$  e  $F_2$ ); (b) un equilibrio ( $F$ ) e un ciclo ( $\gamma$ ) stabile (uno dei due bacini di attrazione è punteggiato)

Gli attrattori più comuni sono gli stati di equilibrio e i cicli. Meno comuni sono, invece, i tori e gli strani attrattori. Nel resto di questo capitolo tratteremo questi attrattori nell'ordine.

### 3. EQUILIBRI

Gli stati di equilibrio  $\bar{x}$  sono, per definizione, soluzioni costanti della (1). Essi soddisfano, pertanto, l'equazione  $f(\bar{x}) = 0$ . Ricordiamo che uno stato di equilibrio  $\bar{x}$  è *asintoticamente stabile* (secondo Liapunov) se e solo se

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0: x(t) \in S(\bar{x}, \varepsilon) \quad \forall t \quad \forall x(0) \in S(\bar{x}, \delta) \quad \text{e } x(t) \rightarrow \bar{x} \quad \text{per } t \rightarrow \infty$$

dove  $S(\bar{x}, r)$  è la sfera di centro  $\bar{x}$  e raggio  $r$ . A parole, ciò significa che per tutte le piccole perturbazioni intorno a  $\bar{x}$  si ottengono traiettorie che restano vicine a  $\bar{x}$  e tendono asintoticamente verso  $\bar{x}$ . Se, invece, esistono stati iniziali  $x(0)$  infinitamente vicini a  $\bar{x}$  che danno luogo a traiettorie che si allontanano (almeno temporaneamente) da  $\bar{x}$ , si dice che  $\bar{x}$  è *instabile*. In tutti gli altri casi si dice che  $\bar{x}$  è *semplicemente stabile*.

L'analisi degli equilibri e della loro stabilità è molto semplice nel caso dei sistemi lineari

$$\dot{x}(t) = A x(t)$$

In questo caso, infatti, l'equilibrio  $\bar{x} = 0$  è asintoticamente stabile se e solo se tutti gli autovalori di  $A$  hanno parte reale negativa. Nei sistemi non lineari  $\dot{x}(t) = f(x(t))$ , si può, invece, porre

$$\delta \dot{x}(t) = x(t) - \bar{x}$$

e sviluppare la funzione  $f$  in serie di Taylor, ottenendo

$$\delta \dot{x}(t) = \left[ \frac{\partial f}{\partial x} \right]_{\bar{x}} \delta x(t) + \dots$$

dove la matrice  $\left[ \frac{\partial f}{\partial x} \right]_{\bar{x}}$  è nota come *Jacobiano*, e, per questo, indicata con  $J$ . Il sistema

$$\delta \dot{x}(t) = J \delta x(t)$$

è detto *sistema linearizzato* ed è molto utile per studiare la stabilità dell'equilibrio  $\bar{x}$ . Si può, infatti, dimostrare che se tutti gli autovalori di  $J$  hanno parte reale negativa (asintotica stabilità del sistema linearizzato)  $\bar{x}$  è asintoticamente stabile. Se, invece,  $J$  ha almeno un autovalore con parte reale positiva,  $\bar{x}$  è instabile. In tutti gli altri casi, l'analisi della stabilità del sistema linearizzato non permette, invece, di inferire alcunché sulla stabilità di  $\bar{x}$ .

Gli stati di equilibrio possono essere utilmente distinti in *iperbolici* e *non iperbolici*, i primi essendo quelli per cui lo Jacobiano  $J$  non ha autovalori con parte reale nulla. Gli stati di equilibrio iperbolici possono, a loro volta, essere distinti in *attrattori*, *repulsori* e *selle* (vedi Fig. 4).

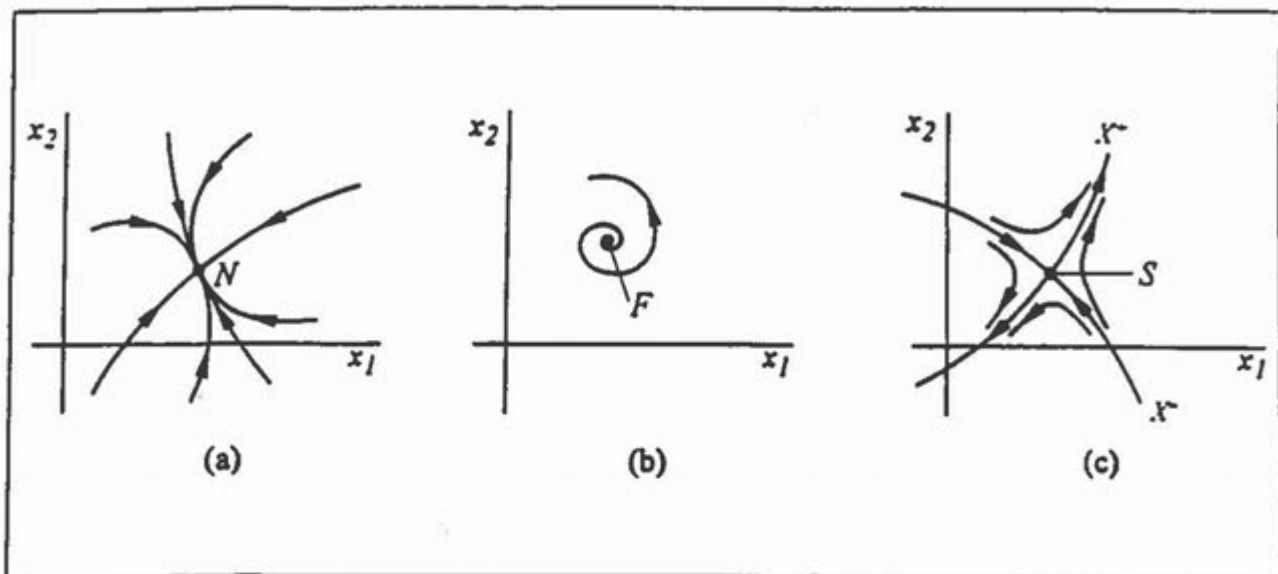


Fig. 4 - Esempio di attrattore (a), repulsore (b) e sella (c)

Se lo Jacobiano  $J$  ha rispettivamente  $n^-$ ,  $n^+$ ,  $n^0$  autovalori con parte reale negativa, positiva e nulla, risultano individuabili tre varietà,  $X^-$ ,  $X^+$  e  $X^0$  di dimensioni  $n^-$ ,  $n^+$ ,  $n^0$  chiamate *varietà stabile*, *varietà instabile* e *varietà centro*. Queste varietà sono tangenti nell'equilibrio  $\bar{x}$  ai sottospazi generati dagli autovettori associati agli  $n^-$ ,  $n^+$ ,  $n^0$  autovalori di  $J$ . Ad esempio, in Fig. 4a e b abbiamo, rispettivamente  $X^- = R^2$  e  $X^+ = R^2$ , mentre in Fig. 4c  $X^+$  e  $X^-$  sono le traiettorie localmente individuate dagli autovettori di  $J$ . In Fig. 5 sono, invece, riportati due casi di varietà centro di sistemi lineari, rispettivamente, del secondo e terzo ordine. In entrambi i casi l'equilibrio è semplicemente stabile. Nel primo caso la varietà centro è una retta costituita da stati di equilibrio, mentre nel secondo caso è un piano costituito da cicli non isolati.

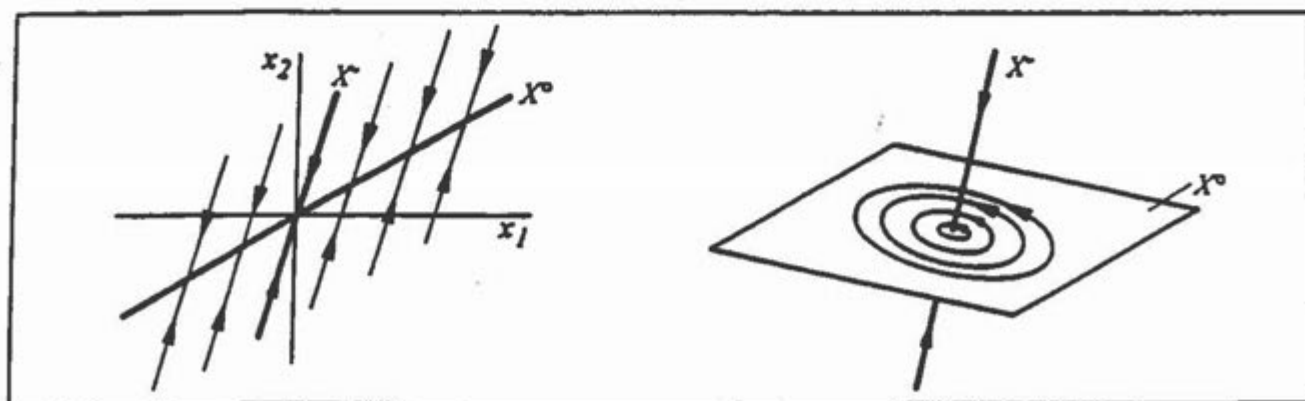


Fig. 5 - Due esempi di varietà centro  $X^0$



Per quanto detto, con l'analisi del sistema linearizzato, si può determinare il comportamento locale del sistema sulle sue varietà stabili  $X^-$  e instabili  $X^+$ . Per quanto riguarda, invece, il comportamento del sistema sulla varietà centro  $X^0$ , lo studio del sistema linearizzato non permette, in generale, di trarre alcuna conclusione. In altre parole, il comportamento su  $X^0$  è legato alle non linearità (cioè ai termini trascurati nella linearizzazione). In Fig. 6 sono, ad esempio, mostrati tre possibili quadri di traiettorie sulla varietà centro  $X^0$  di un sistema non lineare, il cui sistema linearizzato  $\delta\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{J}\delta\mathbf{x}$  ha le traiettorie mostrate in Fig. 5b.

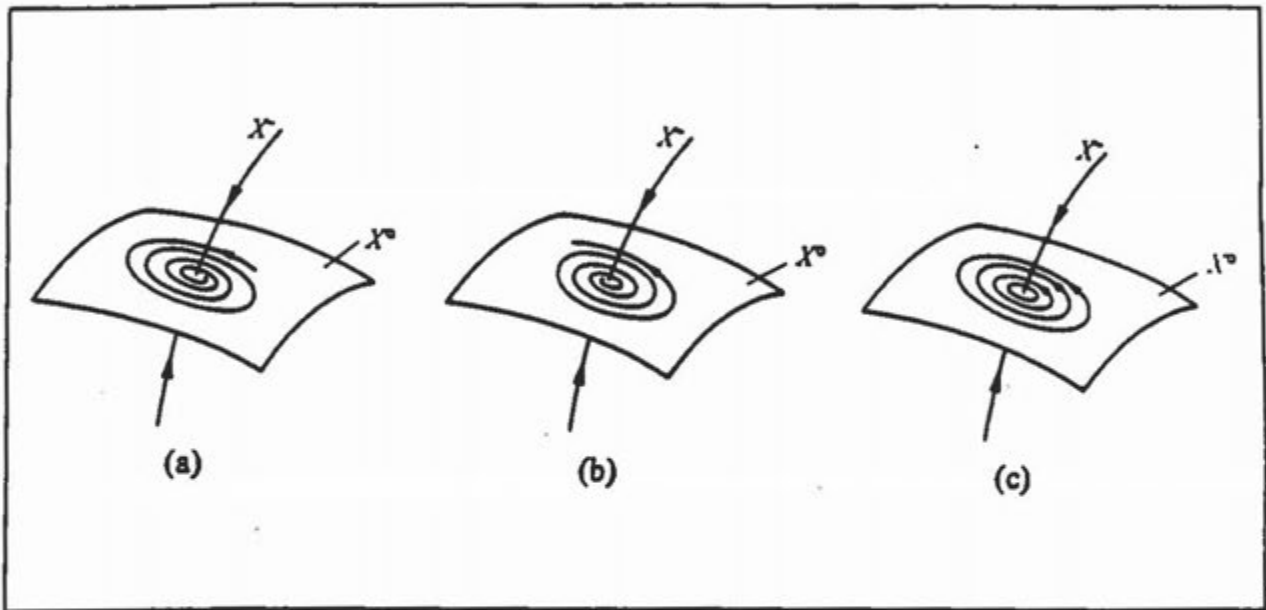


Fig. 6 - Tre possibili quadri corrispondenti alla linearizzazione di Fig. 5b

Possiamo, pertanto, concludere che lo studio della stabilità degli equilibri iperbolici è eseguibile sistematicamente (via linearizzazione), mentre lo studio della stabilità degli equilibri non iperbolici richiede per forza di cose un approfondimento per determinare il comportamento del sistema sulle varietà centro. In linea di principio questo approfondimento può essere fatto per mezzo di uno dei criteri di Liapunov per lo studio della stabilità o instabilità dell'equilibrio. Riportiamo, a titolo di esempio, l'enunciato del criterio di asintotica stabilità.

#### Criterio di asintotica stabilità di Liapunov

Se  $V(\mathbf{x})$  è continua insieme alle sue derivate ed è definita positiva in  $\bar{\mathbf{x}}$  e  $\dot{V}(\mathbf{x}) = \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}(\mathbf{x})$  è definita negativa in  $\bar{\mathbf{x}}$ , allora  $\bar{\mathbf{x}}$  è asintoticamente stabile.  $\square$

Naturalmente, il metodo di Liapunov può essere usato anche solo limitatamente alla varietà centro, qualora questa sia stata determinata. Non è, però, semplice, anche in tale caso, individuare una funzione di Liapunov (cioè una funzione che soddisfi le condizioni del criterio

di Liapunov). Possiamo tuttavia citare, per le importanti applicazioni in campo biologico, la *funzione di Volterra*

$$V = \sum_{i=1}^n \alpha_i \left( \frac{x_i}{\bar{x}_i} - 1 - \log \frac{x_i}{\bar{x}_i} \right)$$

che è continua insieme alle sue derivate e definita positiva in  $\bar{x} = |\bar{x}_1 \dots \bar{x}_n|^T$  per  $\alpha_i > 0, i = 1, \dots, n$ . Tale funzione permette, per esempio, di dimostrare (la verifica, via criterio di Liapunov, è lasciata al lettore come utile esercizio) che gli equilibri strettamente positivi ( $\bar{x}_i > 0, i = 1, \dots, n$ ) dei *modelli quadratici alla Kolmogorov*

$$\dot{x}_i(t) = x_i(t) \left( r_i + \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j(t) \right)$$

sono asintoticamente stabili se la matrice  $A = [a_{ij}]$  è tale che  $A + A^T$  sia definita negativa.

#### 4. CICLI

I cicli sono, per definizione, linee chiuse  $\gamma$  in  $R^n$  corrispondenti a soluzioni periodiche di periodo  $T$  delle (1). Esistenza e unicità dei cicli sono temi classici, con contributi radicati nella *teoria di Bendixon-Poincaré*. Risultati più moderni saranno citati nel prossimo capitolo perché legati ad alcune biforcazioni.

Definizione e studio della stabilità dei cicli risultano concettualmente semplici, qualora siano illustrati sulla cosiddetta *sezione di Poincaré*, indicata con  $\mathcal{P}$  in Fig. 7.

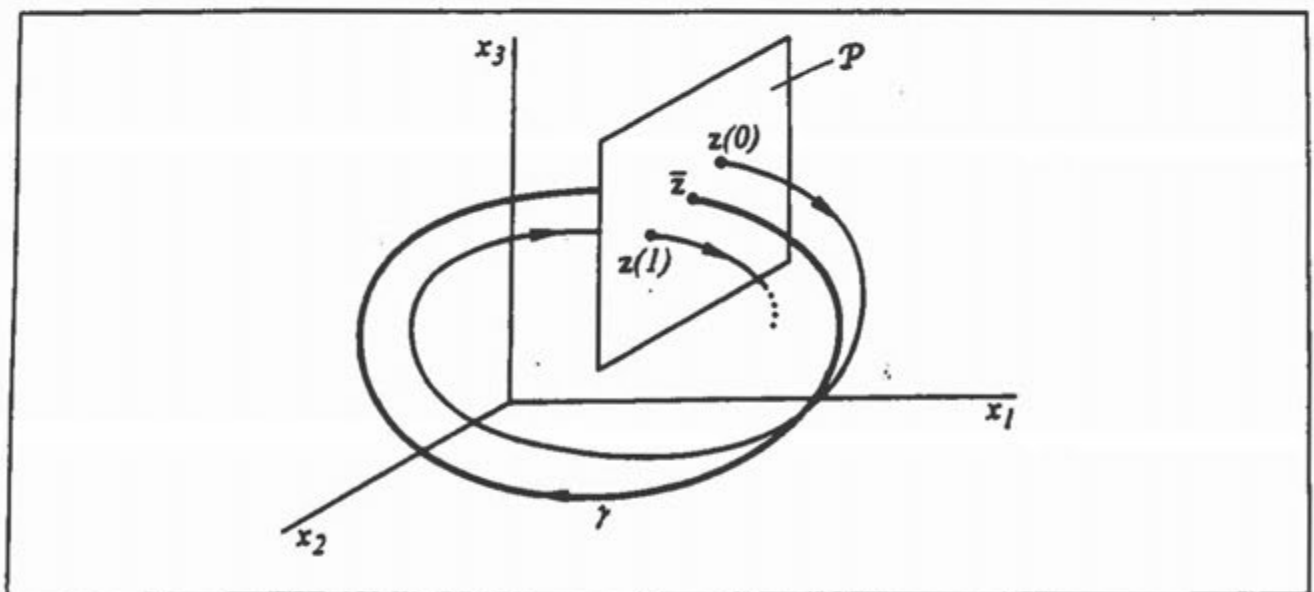


Fig. 7 - Ciclo  $\gamma$  e sezione di Poincaré  $\mathcal{P}$  in  $R^3$ . La funzione di primo ritorno  $z(1) = \mathcal{P}(z(0))$  si chiama *mapa di Poincaré*

Tale sezione è una varietà trasversale a  $\gamma$  in  $\bar{z}$ , così che un suo punto è individuato da un vettore  $z$  di dimensioni  $n-1$ . Preso un punto  $z(0)$  di  $\mathcal{P}$  è, allora, possibile integrare le equazioni (1) a partire dal corrispondente punto  $x(0)$  e determinare il punto  $z(1)$  di primo ritorno della traiettoria su  $\mathcal{P}$ . Resta così definita una funzione

$$z(1) = P(z(0))$$

su  $\mathcal{P}$ , detta mappa di primo ritorno o, più comunemente, *mappa di Poincaré*. Tale mappa può essere usata recursivamente per determinare la successione di punti  $z(1)$ ,  $z(2)$ ,  $z(3)$ , ... conseguenti ad un punto iniziale  $z(0)$ . In altre parole, anziché seguire con continuità la traiettoria, si campiona lo stato del sistema ad ogni passaggio sulla sezione di Poincaré. Ciò corrisponde a considerare l'evoluzione del sistema  $(n-1)$ -dimensionale a tempo discreto

$$z(t+1) = P(z(t)) \quad (2)$$

che ha come equilibrio il punto  $\bar{z}$  di intersezione di  $\gamma$  con  $\mathcal{P}$ . Il tempo di ritorno, cioè il tempo necessario per la transizione  $z(0) \rightarrow z(1)$  dipende da  $z(0)$ , anche se tale tempo tende, per continuità, al periodo  $T$  del ciclo  $\gamma$  per  $z(0) \rightarrow \bar{z}$ . Un ciclo  $\gamma$  è allora asintoticamente stabile, se e solo se l'equilibrio  $\bar{z}$  del sistema (2) è asintoticamente stabile. Analogamente,  $\gamma$  è semplicemente stabile o instabile se tale è l'equilibrio  $\bar{z}$  in (2). La stabilità di  $\gamma$  può, allora, essere studiata linearizzando la mappa di Poincaré e determinando gli  $n-1$  autovalori dello Jacobiano  $[\partial P / \partial z]_{\bar{z}}$  (che devono essere minori di 1 in modulo affinché il sistema linearizzato sia asintoticamente stabile). Anche in questo caso, l'analisi è relativamente semplice se l'equilibrio  $\bar{z}$  di (2) è iperbolico (cioè se tutti gli autovalori dello Jacobiano della mappa di Poincaré sono diversi da uno in modulo). In caso contrario, si dovrà approfondire il comportamento del sistema sulla varietà centro  $Z^0$  di  $\bar{z}$ .

E' opportuno osservare che gli autovalori dello Jacobiano  $[\partial P / \partial z]_{\bar{z}}$  non possono essere negativi nei sistemi del secondo ordine di cui è riportato un esempio in Fig. 8. In tale caso, la mappa di Poincaré  $z(t+1) = P(z(t))$  è monodimensionale, per cui, linearizzando intorno a  $\bar{z}$  e ponendo  $\delta z(t) = z(t) - \bar{z}$ , si ottiene

$$\delta z(t+1) = \left[ \frac{\partial P}{\partial z} \right]_{\bar{z}} \delta z(t)$$

Ma una traiettoria che parte (come in figura) da un punto  $z(0)$  esterno al ciclo  $\gamma$  (quindi, con  $\delta z(0) > 0$ ) deve rimanere esterna allo stesso, perché la traiettoria non può intersecare il ciclo. Pertanto, deve essere  $\delta z(1) \geq 0$  per cui segue che  $[\partial P / \partial z]_{\bar{z}} \geq 0$ .

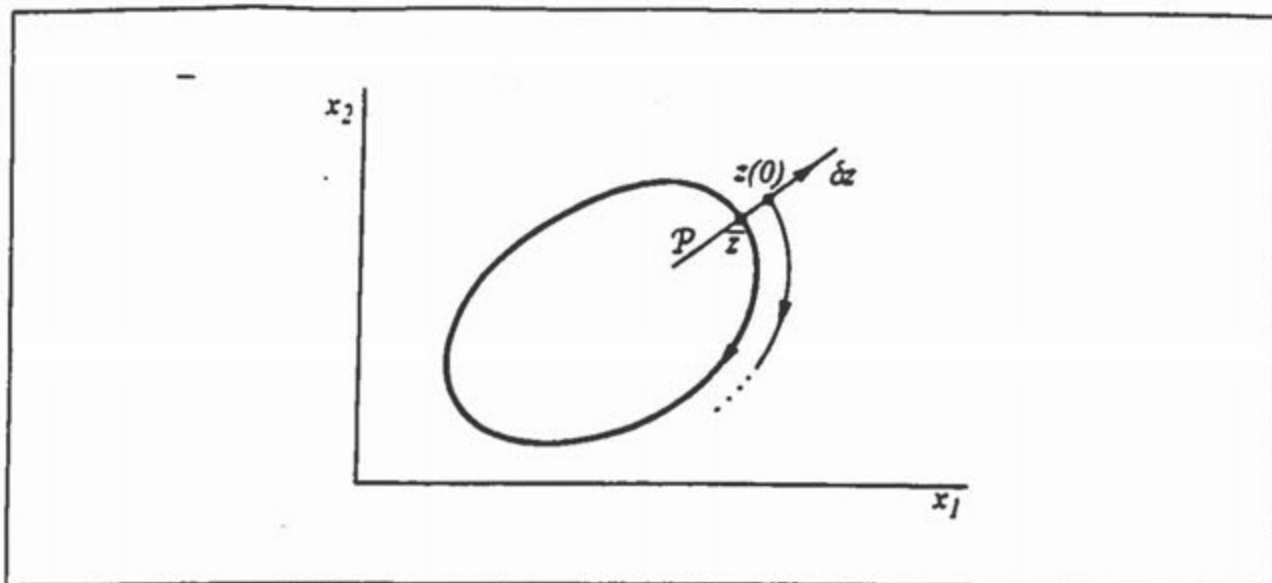


Fig. 8 - Ciclo  $\gamma$  e sezione di Poincaré di un sistema del secondo ordine

I cicli possono così essere classificati in iperbolici e non iperbolici e i primi sono classificabili, a loro volta, in attrattori, repulsori e selle. La Fig. 9 riporta tre casi analoghi a quelli visti in Fig. 4 per gli equilibri.

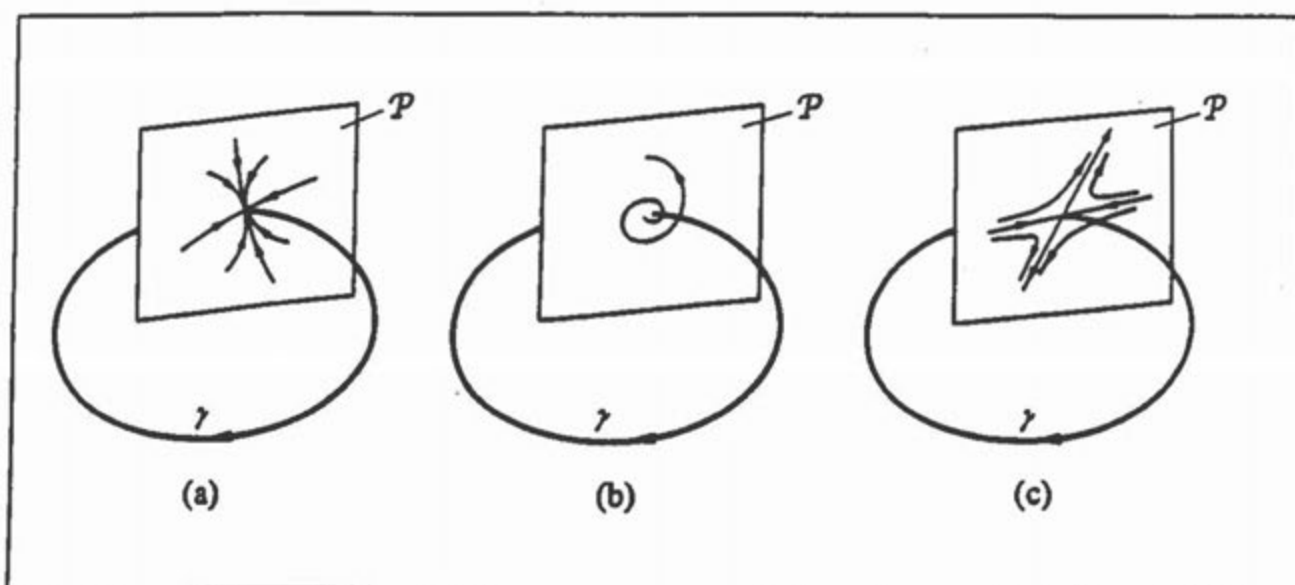


Fig. 9 - Esempi di cicli attrattori (a), repulsori (b) e sella (c) in  $R^3$

Naturalmente, le linee indicate sulle sezioni di Poincaré di Fig. 9 non sono le traiettorie di un sistema a tempo continuo. Esse rappresentano il luogo dei punti  $z(0), z(1), z(2), \dots$  ottenuti recursivamente con la mappa di Poincaré (2). Tuttavia, è comodo considerare queste linee come delle vere e proprie traiettorie di un sistema dinamico: esse illustrano chiaramente l'evoluzione temporale dei punti di ritorno e mettono in evidenza in modo molto esplicito la stabilità o l'instabilità di un ciclo.

Prima di passare ad altro argomento, è bene osservare che la mappa di Poincaré è calcolabile esplicitamente solo in casi rarissimi. Quanto visto è, quindi, importante solo sul piano concettuale e sul piano dell'analisi numerica. Molti package per lo studio della stabilità dei cicli sono, infatti, basati sul calcolo approssimato dello Jacobiano  $[\partial P / \partial z]_x$  e dei suoi autovalori.

## 5. TORI E STRANI ATTRATTORI

Se due sistemi del secondo ordine completamente indipendenti l'uno dall'altro hanno come attrattori due cicli  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$ , rispettivamente di periodo  $T_1$  e  $T_2$ , l'insieme dei due sistemi, che è pur sempre un sistema dinamico, ha, in generale, un attrattore che non è un ciclo. Ciò è dovuto al fatto che i due periodi  $T_1$  e  $T_2$  sono, genericamente, in rapporto irrazionale, per cui lo stato del sistema  $(x^{(1)}(t), x^{(2)}(t))$  non è periodico, anche se  $x^{(1)}(t)$  e  $x^{(2)}(t)$  sono tali. La Fig. 10 mostra come sia virtualmente possibile visualizzare l'attrattore come un toro in un opportuno spazio tridimensionale.

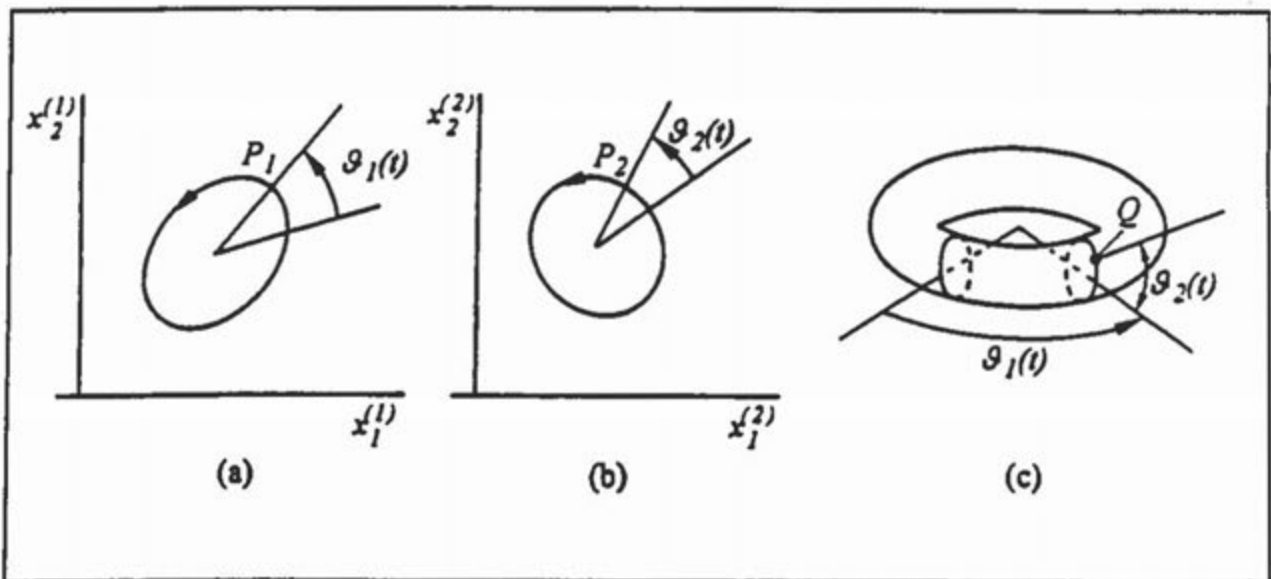


Fig. 10 - Due oscillatori (a) e (b) e il corrispondente toro (c) in  $R^3$

L'attrattore è costituito dalle coppie di punti  $P_1$  e  $P_2$  sui cicli  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  ed è, quindi, individuato dai due angoli  $\theta_1(t)$  e  $\theta_2(t)$  indicati in figura. Questi due angoli definiscono univocamente un punto  $Q$  sulla superficie di un toro. Pertanto, l'evoluzione nel tempo di  $P_1$  e  $P_2$  è equivalente all'evoluzione nel tempo di un punto  $Q$  sulla superficie bidimensionale di un toro immerso in  $R^3$ . Se  $T_1$  e  $T_2$  sono in rapporto razionale, cioè se  $T_1/T_2 = m/n$ , allora la traiettoria percorsa dal punto  $Q$  si chiude su se stessa dopo  $m T_2 = n T_1$  unità di tempo. In questo caso particolare l'attrattore è ancora un ciclo (che può essere utile immaginare su un toro). Ma se  $T_1$  e  $T_2$  sono in rapporto irrazionale la traiettoria percorsa dal punto  $Q$  non si

chiude mai su se stessa e continua a rigare indefinitamente la superficie del toro, che viene, così, densamente ricoperto da tale traiettoria. In questi casi si dice che il sistema funziona in *regime quasi periodico*.

Così come non esistono cicli in sistemi del primo ordine, non possono, per ovvi motivi geometrici, esistere tori in sistemi del secondo ordine. La visualizzazione di un attrattore a toro richiede, pertanto, di tracciare traiettorie in uno spazio per lo meno tridimensionale (vedi Fig. 11a) a meno che si usi la tecnica già illustrata della sezione di Poincaré. Su tale sezione il toro appare come una linea regolare e chiusa, come mostrato in Fig. 11b. Partendo da un punto di tale linea, dopo  $T_1$  unità di tempo si rientra sulla sezione di Poincaré (perché  $\vartheta_1(T_1) = 2\pi$ ) nel punto caratterizzato da  $\vartheta_2(T_1)$ . Continuando così si visitano successivamente i punti della linea caratterizzati da angoli  $\vartheta_2(h T_1)$ ,  $h = 1, 2, \dots$  e tali punti riempiono densamente la linea, in accordo con la proprietà di indecomponibilità degli attrattori.

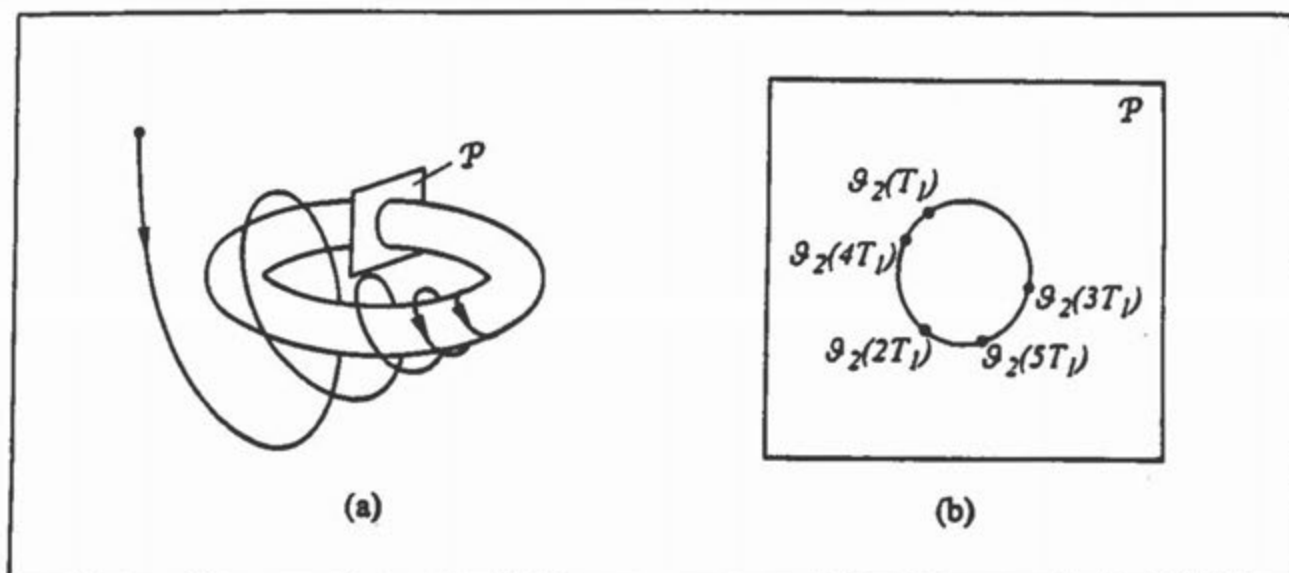


Fig. 11 - Un attrattore a toro in  $R^3$  (a) e un ingrandimento della corrispondente sezione di Poincaré (b)

L'attrattore a toro gode di due proprietà che non sono, a priori, richieste dalla definizione generale di attrattore. Infatti, due traiettorie radicate in due punti vicini sul toro restano indefinitamente vicine, cioè non divergono l'una dall'altra. Inoltre, il toro è un insieme di dimensione intera (2 in  $R^3$  e 1 sulla sezione di Poincaré). Queste osservazioni sono il punto di partenza per varie definizioni di *strano attrattore*. Innanzitutto, in modo molto empirico, potremmo definire gli strani attrattori come tutti quegli attrattori che non sono tori e, quindi, a maggior ragione, cicli o equilibri. Non è detto, a rigore, che ciò implichi forzatamente che gli strani attrattori abbiano dimensione non intera e traiettorie divergenti. Per questo motivo, definizioni basate sulla *frattalità* (dimensione non intera) dell'attrattore o sulla proprietà di divergenza di traiettorie vicine (meglio nota come *sensibilità alle condizioni iniziali*) non sono da ritenersi del tutto equivalenti, né tra loro, né alla precedente. Sono queste, comunque, le



caratteristiche più interessanti e affascinanti degli strani attrattori sulle quali torneremo nel terzo capitolo di questa rassegna.

Il fatto che per condizioni iniziali anche molto simili si ottengano traiettorie divergenti, fa pensare a meccanismi di instabilità e ciò è, in un certo senso, conflittuale con l'idea stessa di attrattore. Ciò significa che il meccanismo locale della divergenza delle traiettorie vicine (*stretching*) deve essere compensato da un meccanismo globale di riavvicinamento delle traiettorie lontane (*folding*), come mostrato in Fig. 12 dove è simbolicamente illustrata l'evoluzione nel tempo di un insieme di stati iniziali.

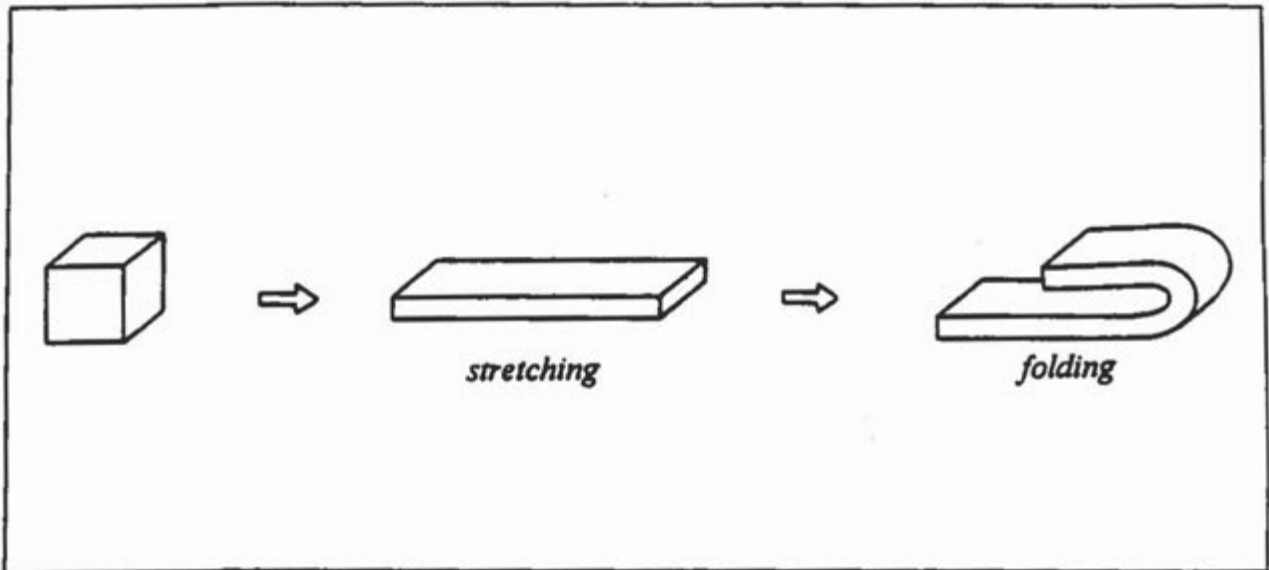


Fig. 12 - I meccanismi di *stretching* e *folding*

In altre parole, in un sistema caratterizzato da uno strano attrattore  $A$  è lecito prevedere che sui tempi lunghi il sistema evolva verso  $A$  a partire da qualsiasi condizione iniziale nel bacino di attrazione  $B(A)$  (vedi Fig. 13a). Ciò tuttavia non autorizza a pensare che le previsioni

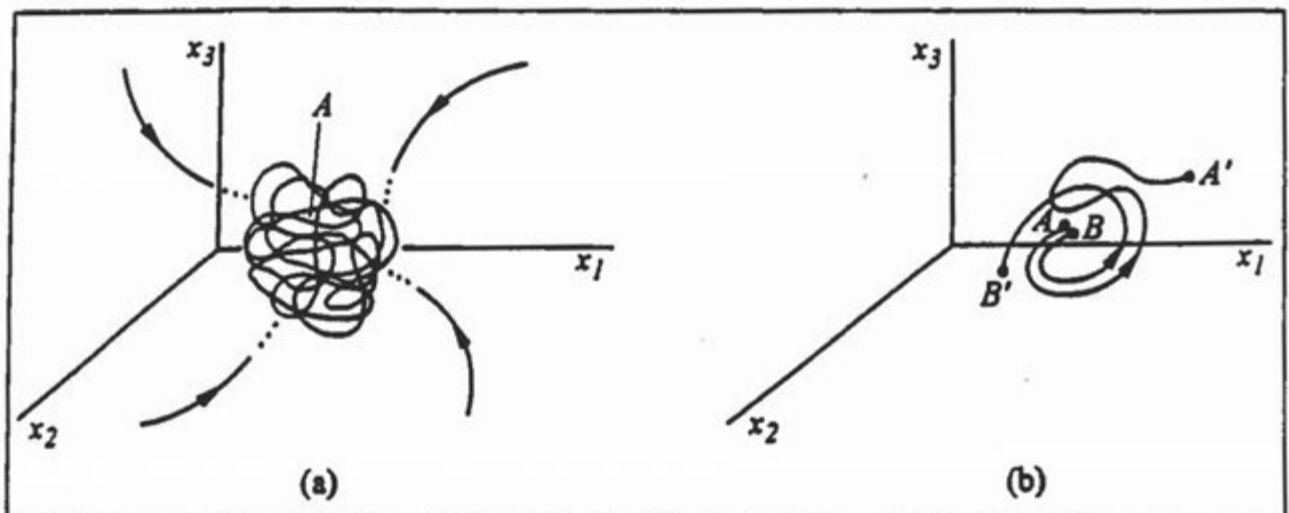


Fig. 13 - Avvicinamento verso l'attrattore (a) e divergenza all'interno dell'attrattore (b)

possano essere eseguite anche all'interno dell'attrattore. Anzi, punti infinitamente vicini sull'attrattore danno luogo a traiettorie che si trovano, prima o poi, agli estremi dell'attrattore (vedi punti *A*, *B* e *A'*, *B'* di Fig. 13 b).

La scoperta di questa possibilità ha rivoluzionato l'atteggiamento scientifico che per lungo tempo ha dominato in molti settori. Anziché pensare, a priori, che certe imprevedibilità oggettive siano dovute ad interazioni, più o meno casuali, del sistema con il resto del mondo, possiamo anche sospettare che queste imprevedibilità siano il prodotto di meccanismi endogeni non lineari. In altre parole, è il sistema stesso che, pur essendo perfettamente deterministico, finisce per evolvere in modo apparentemente casuale (*chaos deterministico*). E quando ciò accade è molto più semplice "spiegare" il sistema con le sue equazioni di stato che con la descrizione del suo attrattore.

La visualizzazione di uno strano attrattore richiede, come per i tori, l'uso di spazi almeno tridimensionali (vedi Fig. 13a). Per questo motivo risulta particolarmente vantaggioso rappresentare gli strani attrattori sulle sezioni di Poincaré. La Fig. 14 ne riporta alcuni a puro titolo di esempio. L'attrattore non è più un punto o una linea chiusa e regolare, come nel caso dei cicli o dei tori, ma un insieme molto più complesso che evidenzia tuttavia una propria geometria. Se dell'attrattore è mostrata una approssimazione ottenuta con qualche centinaio di punti sulla sezione di Poincaré (come fatto in Fig. 14) la densità di tali punti è un indicatore della frequenza con cui certe nicchie dell'attrattore vengono visitate.

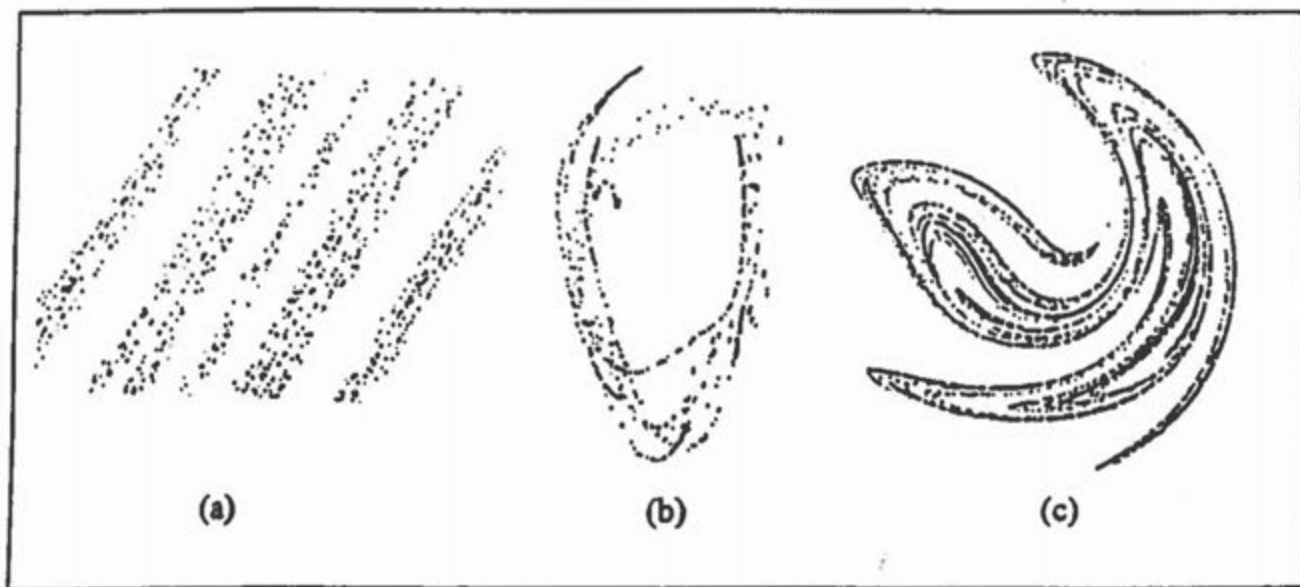


Fig. 14 - Tre esempi di strani attrattori sulla sezione di Poincaré: (a) pallina che rimbalza su un piano oscillante; (b) esperimento di Bénard; (c) oscillatore meccanico forzato periodicamente

La geometria frattale degli strani attrattori, particolarmente evidente sulle sezioni di Poincaré, ha incuriosito molti ricercatori, anche perché numerosi sono stati, in questi ultimi anni, gli studi che, su base puramente empirica, hanno permesso di evidenziare la natura frattale di fenomeni fisici e biologici (anelli di Saturno, formazione delle coste, struttura ossea,



formazione dei coralli, struttura del cervello, ...). E ciò non sorprende se si riflette sul fatto che quanto si osserva in natura è spesso l'impronta lasciata dall'evoluzione di un sistema dinamico.

## 6. CONCLUSIONI

In questo capitolo abbiamo presentato le quattro categorie di attrattori (equilibri, cicli, tori e strani attrattori) mettendo in evidenza le loro principali caratteristiche. Sugli strani attrattori daremo ulteriori precisazioni nel terzo capitolo di questa rassegna interamente dedicato al caos deterministico. Di cicli e tori ci occuperemo, invece, di nuovo nel prossimo capitolo specificando i meccanismi secondo cui, al variare di un parametro, un equilibrio si trasforma in ciclo (biforcazione di Hopf) e un ciclo si trasforma in toro (biforcazione di Naimark-Sacker).

Per un approfondimento, il lettore potrà far riferimento a testi recenti e rigorosi sui sistemi dinamici non lineari quali Arnold [1982], Guckenheimer e Holmes [1983] e Wiggins [1990]. Per la teoria della stabilità dei sistemi lineari, sia invarianti che varianti, consigliamo invece di far riferimento a Callier e Desoer [1991]. Infine, numerosi sono i testi a carattere introduttivo in cui gli argomenti sono presentati in modo più intuitivo, facendo spesso perno su semplici esempi. Tra questi possiamo, ad esempio, citare Koçak [1986], Thompson e Stewart [1986] e Schuster [1988] che tratta, in particolare, la dinamica dei sistemi a tempo discreto.

## RINGRAZIAMENTI

L'autore ringrazia i colleghi Massimo Miari e Carlo Piccardi per le utili discussioni e per i suggerimenti costruttivi. Il lavoro è stato svolto nel contesto del contratto di ricerca MURST 40% "Teoria dei sistemi e del controllo".

## RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

- V.I. Arnold, *Geometrical Methods in the Theory of Ordinary Differential Equations*, Springer-Verlag, 1982.
- F.M. Callier e C.A. Desoer, *Linear System Theory*, Springer-Verlag, 1991.
- J. Guckenheimer e P. Holmes, *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields*, Springer-Verlag, 1983.
- H. Koçak, *Differential and Difference Equations through Computer Experiments with Diskettes Containing PHASER*, Springer-Verlag, 1986.
- H.G. Schuster, *Deterministic Chaos: an Introduction*, VCH, Weinheim, 1988.
- J.M.T. Thompson e H.B. Stewart, *Nonlinear Dynamics and Chaos*, John Wiley and Sons, 1986.
- S. Wiggins, *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos*, Springer-Verlag, 1990.

# **STABILITA' STRUTTURALE E BIFORCAZIONI**

*a cura di*

**Sergio Rinaldi**

**Dipartimento di Elettronica e Informazione, Politecnico di Milano**

# STABILITA' STRUTTURALE E BIFORCAZIONI

Sergio Rinaldi

Dipartimento di Elettronica e Informazione, Politecnico di Milano

## 1. INTRODUZIONE

Questo capitolo è dedicato alla stabilità strutturale che è, senza dubbio, uno dei temi più importanti della teoria dei sistemi. Esso risulta fondamentale per la comprensione di numerosi fenomeni di dinamica non lineare, tra cui possiamo citare le transizioni catastrofiche, l'isteresi, le subarmoniche, l'aggancio in frequenza e il caos deterministico. La stabilità strutturale permette di spiegare con rigore perché al variare di un parametro si può assistere alla nascita o alla sparizione di un attrattore o alla sua trasformazione.

Scopo ultimo della stabilità strutturale è lo studio del comportamento asintotico di una famiglia di sistemi

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{p}) \quad (1)$$

al variare del parametro  $\mathbf{p} = [p_1 \dots p_k]^T$ . Più precisamente, si tratta di individuare delle regioni  $\mathcal{P}_i$  nello spazio dei parametri, in cui il comportamento del sistema (1) sia qualitativamente lo stesso, intendendo con ciò che tutti i quadri delle traiettorie corrispondenti a sistemi con  $\mathbf{p}$  interno a  $\mathcal{P}_i$  sono ottenibili l'uno dall'altro per semplice deformazione delle traiettorie. In particolare, quindi, al variare di  $\mathbf{p}$  in  $\mathcal{P}_i$  il sistema (1) conserverà tutti i suoi attrattori, i suoi repulsori e le sue selle, cioè tutti gli elementi chiave della sua dinamica. La Fig. 1 mostra il risultato tipico (noto come *diagramma di biforcazione*) di uno studio di stabilità strutturale: nello spazio dei parametri  $(p_1, p_2)$  di un sistema del secondo ordine sono state individuate tre regioni  $\mathcal{P}_i$  in ognuna delle quali il quadro delle traiettorie è quello indicato in figura. Nella regione  $\mathcal{P}_1$  c'è un solo attrattore, un ciclo, per cui il sistema funziona da oscillatore; nella regione  $\mathcal{P}_2$  l'attrattore è, invece, un equilibrio; infine, nella regione  $\mathcal{P}_3$  esistono tre equilibri, di cui due attrattori e uno sella.

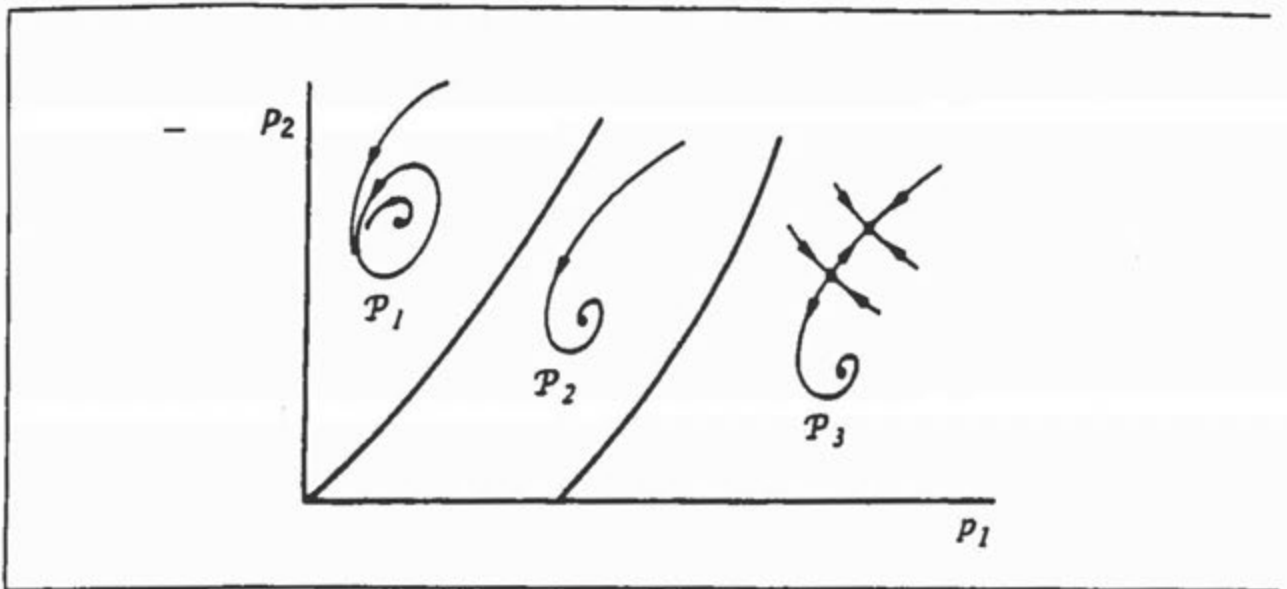


Fig.1 - Diagramma di biforcazione di un sistema del secondo ordine

Se  $\bar{p}$  è un punto interno di una regione  $\mathcal{P}_i$ , si dice che il sistema  $\dot{x} = f(x, \bar{p})$  è *strutturalmente stabile* perché il suo quadro delle traiettorie è lo stesso di quello dei sistemi ottenuti perturbando di poco, ma in tutti i modi possibili, il parametro  $p$ . Se invece  $\bar{p}$  è un punto di frontiera delle regioni  $\mathcal{P}_i$ , si dice che il sistema è *non strutturalmente stabile*. In questo caso, piccole perturbazioni dei parametri possono dar luogo a quadri di traiettorie qualitativamente diversi. I punti di frontiera delle regioni  $\mathcal{P}_i$  si chiamano, per definizione, *punti di biforcazione*. Nel seguito, dopo aver interpretato le biforcazioni come collisioni tra attrattori, repulsori e selle (o tra loro varietà stabili e instabili), passeremo in rassegna le più semplici biforcazioni (quelle cosiddette di codimensione 1).

## 2. BIFORCAZIONI COME COLLISIONI

Un elemento generico (cioè un elemento scelto a caso) della famiglia di sistemi (1) deve essere, per forza di cose, immaginato come un sistema strutturalmente stabile, cioè come un sistema in cui il parametro  $p$  è interno ad una delle regioni  $\mathcal{P}_i$  di cui abbiamo parlato nell'introduzione. Supponendo, per semplicità, che non esistano strani attrattori (in modo da evitare sforzi eccessivi di immaginazione) possiamo supporre che gli stati di equilibrio, i cicli e i tori di questo sistema siano isolati e iperbolici, perché in condizioni generiche i vari Jacobiani non sono critici. Ciò significa che anche le varietà stabili e instabili degli equilibri, dei cicli e dei tori sono ben individuate, così come i bacini di attrazione degli attrattori. Per continuità, per piccole variazioni dei parametri, tutti gli elementi sopra menzionati varieranno di poco. Pertanto equilibri, cicli e tori, pur deformandosi, rimarranno isolati e iperbolici e le loro varietà stabili e instabili resteranno disgiunte se originariamente tali. Affinché il quadro delle traiettorie possa radicalmente cambiare, è necessario che le variazioni dei parametri siano consistenti e diano luogo a una perdita di genericità. In altre parole, per ottenere un sistema non

strutturalmente stabile (cioè una biforcazione) è necessario perturbare i parametri fino ad ottenere la collisione di qualche equilibrio (o ciclo o toro) o di alcune varietà stabili e instabili prima disgiunte.

Il primo dei due meccanismi di collisione dà luogo a una *biforcazione locale*, rivelabile anche dagli autovalori degli Jacobiani degli equilibri (o cicli) coinvolti nella collisione. Se, ad esempio, due equilibri  $\bar{x}^{(1)}(p)$  e  $\bar{x}^{(2)}(p)$  vanno in collisione per  $p \rightarrow p^*$ , i due sistemi linearizzati  $\delta \dot{x}^{(i)}(t) = J_i \delta x^{(i)}(t)$  hanno Jacobiani  $J_i$  che diventano singolari per  $p = p^*$  perché per tale valore del parametro l'equazione  $J_i \delta x^{(i)} = 0$  deve ammettere soluzioni  $\delta x^{(i)} \neq 0$ . Ciò significa che un autovalore di  $J_i$  tende a zero per  $p \rightarrow p^*$ . In generale, ogni biforcazione locale è marcata dal fatto che un autovalore reale (o una coppia di autovalori complessi) di un sistema linearizzato tende verso la "frontiera di stabilità" (asse immaginario del piano complesso, nel caso di sistemi linearizzati a tempo continuo, o circonferenza di raggio unitario nel caso di sistemi linearizzati a tempo discreto). Per esempio, nella biforcazione rappresentata in Fig. 2, relativa alla collisione di due cicli  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$ , lo Jacobiano della mappa di Poincaré del ciclo  $\gamma_1$  (coincidente con il suo autovalore) è positivo e maggiore o uguale a 1 per  $p < p^*$  (si noti che  $\gamma_1$  è instabile per  $p < p^*$ ), mentre l'analogo Jacobiano di  $\gamma_2$  è positivo e minore o uguale a 1 ( $\gamma_2$  è asintoticamente stabile). Ovviamente per  $p = p^*$  i due autovalori devono essere uguali e, pertanto, sono unitari.

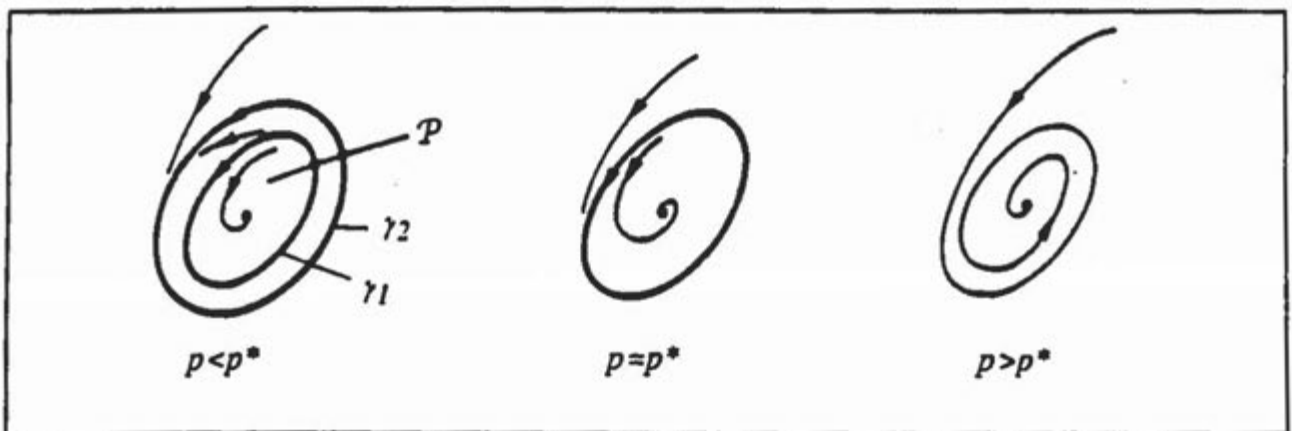


Fig. 2 - Esempio di biforcazione locale: due cicli  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  vanno in collisione per  $p = p^*$  e spariscono (la biforcazione si chiama *tangente*)

Il secondo meccanismo di collisione dà luogo a *biforcazioni globali* e non è rivelabile dagli autovalori di alcun Jacobiano. Esso è illustrato in Fig. 3, per mezzo di un semplice esempio relativo a un sistema del secondo ordine con due selle  $S_1$  e  $S_2$ . Le due selle rimangono ben distinte e i loro autovalori non degenerano per  $p = p^*$ , valore del parametro al quale una delle due semivarietà instabili della prima sella coincide con una delle due semivarietà stabili dell'altra sella. La figura mette bene in evidenza che questa collisione di varietà deve essere considerata una biforcazione.

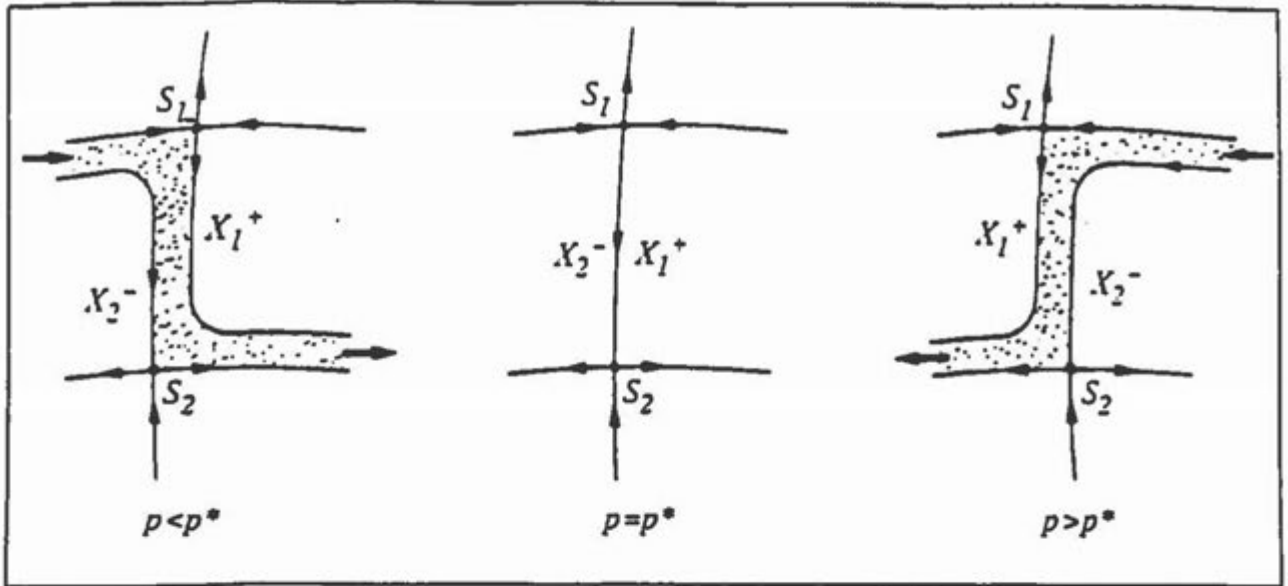


Fig. 3 - Esempio di biforcazione globale: la varietà instabile  $X_1^+$  della sella  $S_1$  va in collisione per  $p=p^*$  con la varietà stabile  $X_2^-$  della sella  $S_2$  (la biforcazione si chiama *eteroclina*, come la traiettoria che collega le due selle per  $p=p^*$ )

Infatti, il sistema è strutturalmente instabile per  $p=p^*$ , perché a seconda del segno della perturbazione del parametro si crea un "corridoio" di traiettorie di verso opposto nello spazio di stato (area punteggiata in figura).

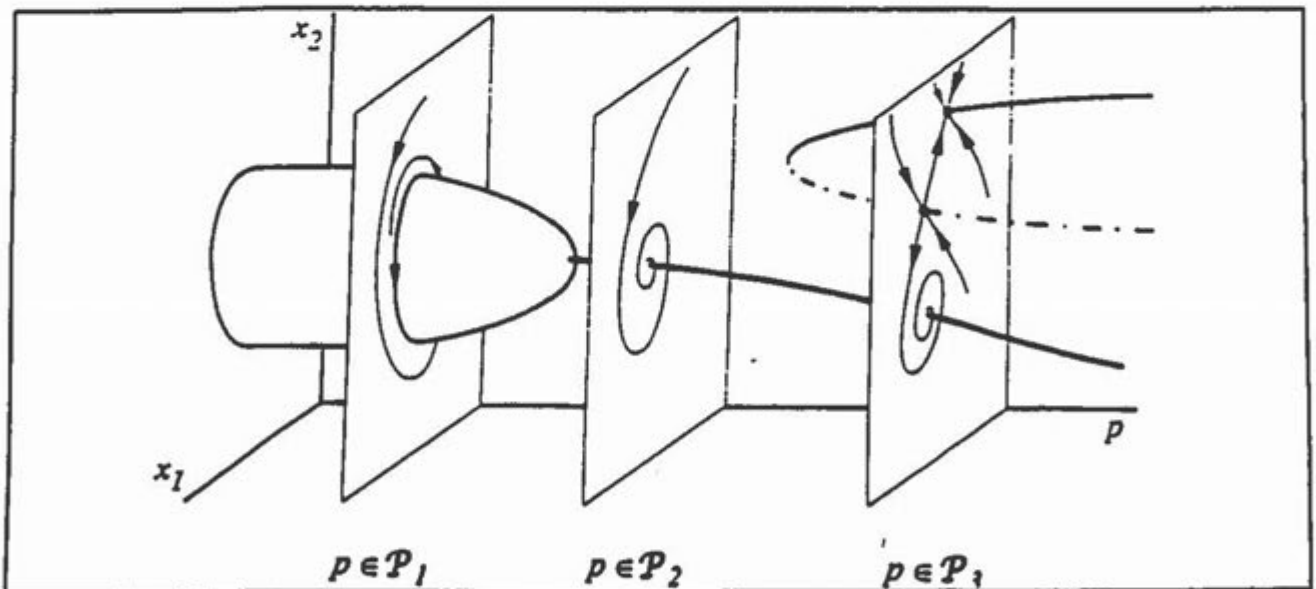


Fig. 4 - Biforcazioni nello spazio di controllo: un ciclo stabile  $\gamma$  collide (da sinistra) con un equilibrio instabile nel punto  $H$  e un nodo stabile collide (da destra) con una sella in  $NS$  (i simboli  $\mathcal{P}_i$ ,  $i=1,2,3$ , fanno riferimento alla Fig. 1)

La rappresentazione delle biforcazioni come collisioni è particolarmente efficace nel caso dei sistemi del secondo ordine dipendenti da un unico parametro  $p$ . In questo caso, infatti, non possono esistere né tori né strani attrattori ed è, quindi, possibile rappresentare graficamente



equilibri e cicli nello spazio tridimensionale  $(x_1, x_2, p)$ . Tale spazio è a volte chiamato *spazio di controllo*, perché nelle applicazioni il parametro  $p$  è spesso una variabile usata per "controllare" la dinamica del sistema. In Fig. 4 sono, ad esempio, rappresentate le biforcazioni del sistema discusso in Fig. 1 al variare di  $p_1$  per un valore costante di  $p_2$ . La figura, letta da sinistra, mette in evidenza una collisione (punto  $H$ ) tra un ciclo stabile e un equilibrio instabile (in realtà il ciclo si restringe a un punto nel momento della collisione). Dopo la collisione, il ciclo non esiste più e l'equilibrio è stabile. La stessa figura, letta da destra, mette invece in evidenza una collisione (punto  $NS$ ) tra due equilibri, un nodo stabile e una sella. In questo caso, i due equilibri si annientano l'un l'altro nella collisione. Queste due biforcazioni, note rispettivamente, come biforcazione di Hopf e biforcazione nodo-sella, sono tra quelle discusse nel prossimo paragrafo.

### 3. BIFORCAZIONI LOCALI

Presentiamo in questo paragrafo le più semplici biforcazioni locali, interpretandole tutte come collisioni tra invarianti (equilibri, cicli e tori). Tre di queste biforcazioni (scambio di stabilità, nodo-sella e forcone) sono collisioni tra equilibri, una (Hopf) è una collisione tra un ciclo e un equilibrio, due (tangente e flip) sono collisioni tra cicli e l'ultima (Naimark-Sacker) è una collisione tra un ciclo e un toro. In accordo con quanto detto nel paragrafo precedente, ognuna di queste biforcazioni è caratterizzata dal fatto che i sistemi linearizzati associati ai due invarianti che vanno in collisione hanno autovalori sulla frontiera di stabilità per  $p=p^*$ . Ciò significa che il sistema  $\dot{x} = f(x, p^*)$  non può essere studiato via linearizzazione, a causa dell'esistenza di una varietà centro. Questa varietà è di dimensione pari al numero di autovalori del sistema linearizzato localizzati per  $p=p^*$  sulla frontiera di stabilità, ed è, pertanto, pari a 1 (autovalore reale) o a 2 (autovalori complessi) nella maggior parte dei casi. Ciò significa che tutta la difficoltà dell'analisi è concentrabile sulla varietà centro, o, in altre parole, che il comportamento del sistema nell'intorno dell'invariante può essere determinato studiando un sistema molto semplice del primo o del secondo ordine. Questo è il motivo per cui le biforcazioni locali sono presentate con riferimento a particolari sistemi del primo o secondo ordine. Questi sistemi, noti come *forme normali* catturano la dinamica del sistema  $\dot{x} = f(x, p^*)$  sulla varietà centro. Consistentemente con quanto detto, le biforcazioni che presenteremo nel seguito saranno discusse con riferimento a sistemi del primo e del secondo ordine.

#### Scambio di stabilità, nodo-sella e forcone

Osserviamo innanzitutto che il più semplice sistema dinamico, cioè il sistema lineare del primo ordine  $\dot{x}(t) = ax(t)$ , ha una biforcazione per  $a = a^* = 0$ . Esso è infatti asintoticamente stabile per  $a < 0$  e instabile per  $a > 0$ . Il comportamento del sistema è mostrato in Fig. 5 nello spazio di controllo  $(x, a)$ . Per  $a \neq a^*$  esiste un unico equilibrio, mentre per  $a = a^*$  tutti gli stati sono di equilibrio (semplice stabilità). Si può, quindi, affermare che per  $a = a^*$  si ha una collisione tra

equilibri (asse orizzontale e verticale di Fig. 5). Si noti anche che l'autovalore del sistema è pari ad  $a$  e si annulla nel punto di biforcazione.

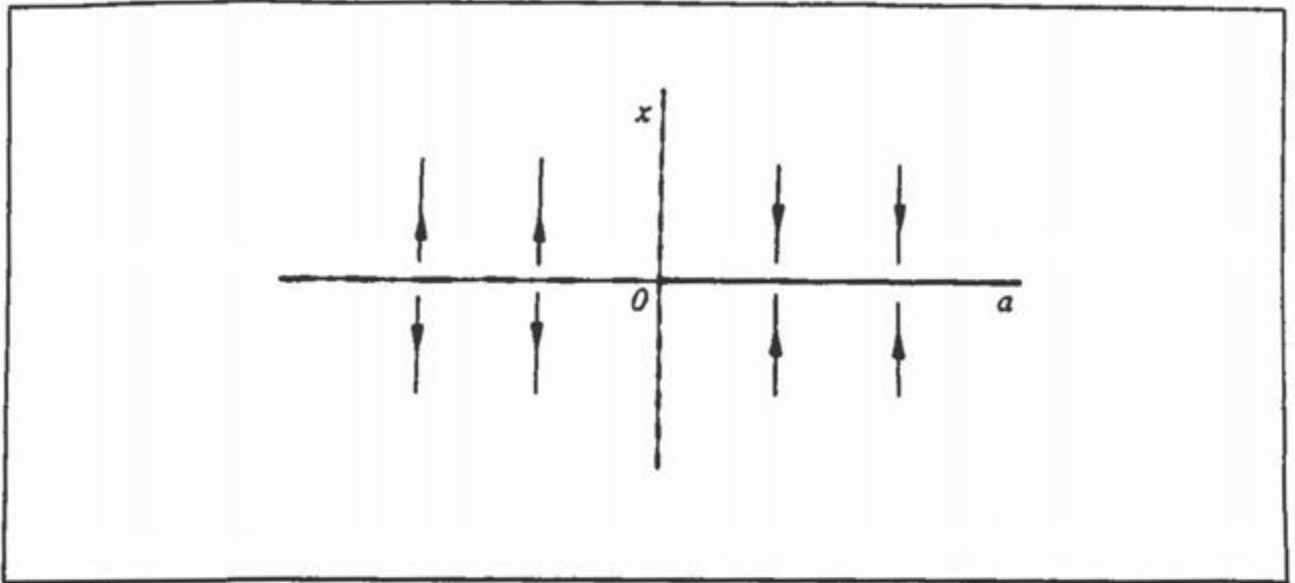


Fig. 5 - Comportamento del sistema lineare  $\dot{x}(t) = a x(t)$

In Fig. 6 sono riportati tre tipi diversi di collisioni tra equilibri di un sistema del primo ordine  $\dot{x} = f(x, p)$ . Stato e parametro sono stati normalizzati in modo tale che la biforcazione avvenga per  $p^* = 0$  e che il corrispondente stato di equilibrio sia nullo. In figura, le linee continue rappresentano equilibri asintoticamente stabili, mentre le linee a tratto rappresentano equilibri instabili. Nel primo diagramma la collisione si realizza sia da destra che da sinistra, mentre negli altri due diagrammi la collisione si realizza solo in uno dei due versi. Le tre biforcazioni si chiamano, rispettivamente, *scambio di stabilità*, *nodo-sella* e *forcone* e sono descrivibili con le tre seguenti forme normali

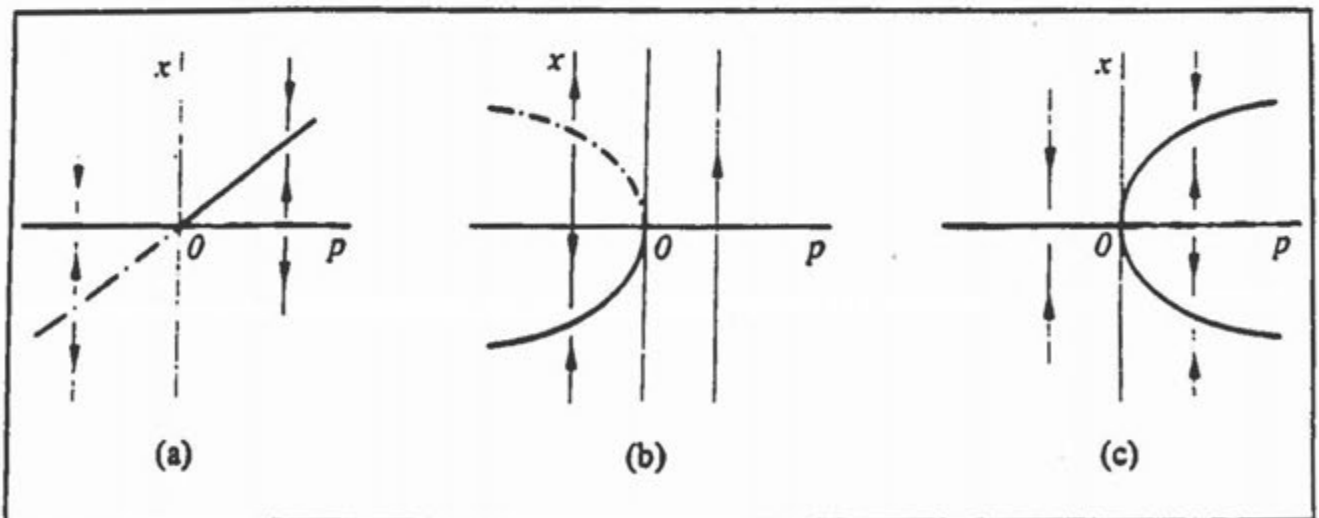


Fig. 6 - Tre biforcazioni locali interpretabili come collisioni tra equilibri: (a) scambio di stabilità; (b) nodo-sella; (c) forcone



|     |                               |                             |
|-----|-------------------------------|-----------------------------|
| (a) | $\dot{x}(t) = px(t) - x^2(t)$ | <i>scambio di stabilità</i> |
| (b) | $\dot{x}(t) = p + x^2(t)$     | <i>nodo-sella</i>           |
| (c) | $\dot{x}(t) = px(t) - x^3(t)$ | <i>forcone</i>              |

Il motivo di queste denominazioni è chiaro per la prima e la terza biforcazione. Per spiegare la seconda, invece, è necessario aggiungere un'ulteriore variabile di stato, ottenendo così il sistema del secondo ordine

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= p + x_1^2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= ax_2(t)\end{aligned}$$

Per  $a \neq 0$  e  $p < 0$  tale sistema ha due equilibri caratterizzati da  $x_2 = 0$  e  $x_1$  come in Fig. 6b. Questi equilibri sono, comunque, un nodo e una sella (il nodo è stabile se  $a < 0$  e instabile se  $a > 0$ ) e ciò giustifica il nome dato alla biforcazione.

È opportuno notare che le forme normali (a), (b) e (c) (e i corrispondenti diagrammi di biforcazione riportati in Fig. 6) non sono le uniche possibili. È, infatti, sempre possibile cambiare segno ai termini quadratici o cubici delle forme normali ottenendo nel caso specifico

|      |                               |                             |
|------|-------------------------------|-----------------------------|
| (a') | $\dot{x}(t) = px(t) + x^2(t)$ | <i>scambio di stabilità</i> |
| (b') | $\dot{x}(t) = p - x^2(t)$     | <i>nodo-sella</i>           |
| (c') | $\dot{x}(t) = px(t) + x^3(t)$ | <i>forcone</i>              |

I corrispondenti diagrammi di biforcazione sono riportati in Fig. 7. Confrontando questa figura con la precedente, è facile constatare che nulla cambia, sul piano fenomenologico, nei primi due casi. Nel caso del forcone, invece, la forma (c) è diversa dalla (c'). Infatti, mentre nel caso (c) abbiamo almeno un equilibrio asintoticamente stabile per ogni valore del parametro, nel caso (c') per  $p > 0$  abbiamo solo un equilibrio instabile.

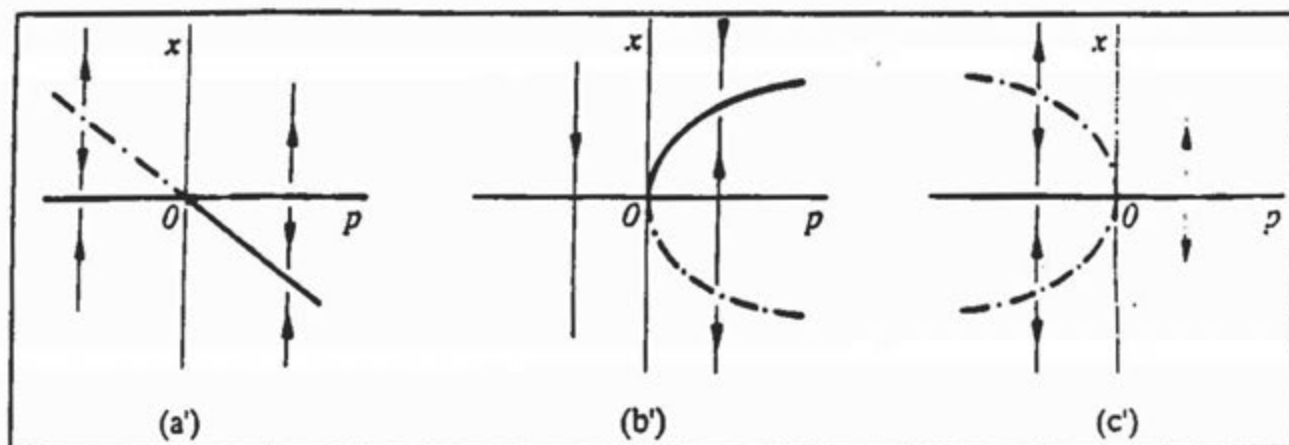


Fig. 7 - Diagrammi di biforcazione corrispondenti alle forme normali indicate con (a'), (b') e (c') nel testo

Numerosissimi sono i sistemi non lineari in cui sono presenti queste biforcazioni. Anzi, in alcuni sistemi si ha più di una di queste biforcazioni, naturalmente per diversi valori del parametro.

### Esempio (carico di punta)

Si consideri la semplice struttura meccanica riportata in Fig. 8, a volte usata come "paradigma" per lo studio del *carico di punta*. Dette  $x_1$  e  $x_2$  la posizione e la velocità angolare dell'asta, le equazioni di stato sono

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= -\frac{I}{ML^2}(PL \operatorname{sen} x_1(t) - Kx_1(t) - Hx_2(t))\end{aligned}$$

dove  $M$  è la massa che rappresenta il carico,  $P$  il peso corrispondente,  $L$  la lunghezza dell'asta (supposta rigida e non pesante) e  $H$  e  $K$  due coefficienti definenti il momento di reazione elastica e il momento di attrito viscoso. Gli stati di equilibrio sono caratterizzati da velocità nulla ( $x_2=0$ ) e da angoli  $x_1$  che, annullando la somma dei momenti, soddisfano l'equazione

$$\frac{K}{PL}x_1 = \operatorname{sen} x_1$$

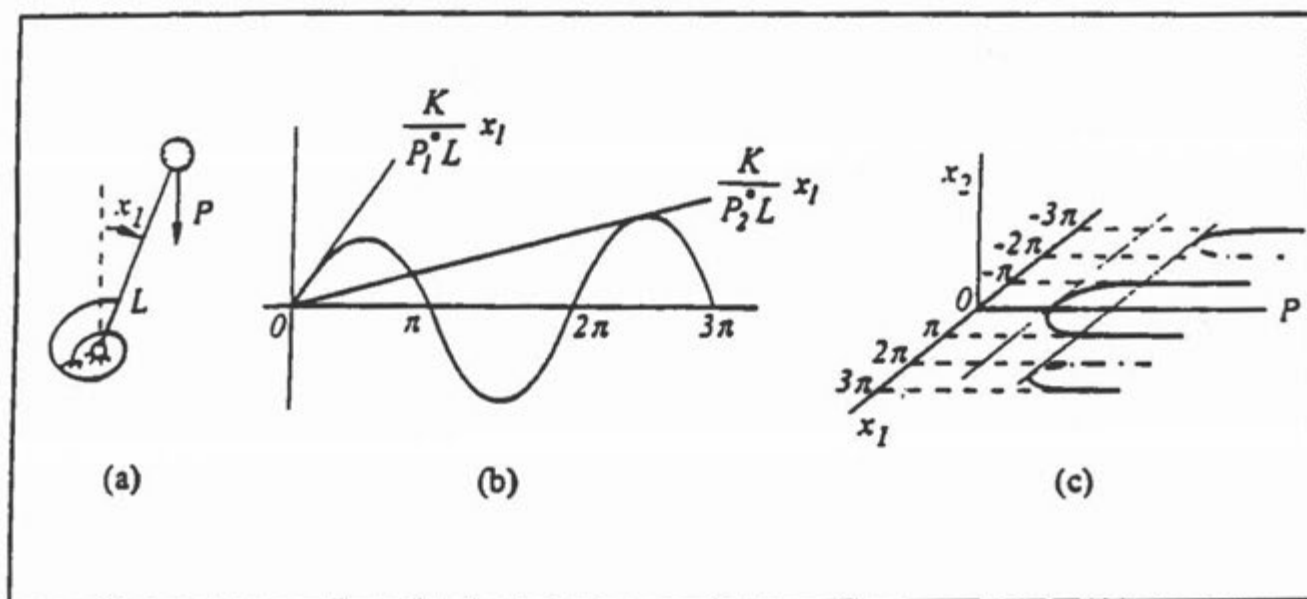


Fig. 8 - Asta rigida caricata di punta con momento di reazione elastica (a), bilanciamento dei momenti (b) e corrispondenti biforcazioni al variare del carico  $P$  (c)

Se  $P < K/L = P_1^*$ , l'unica soluzione è  $x_1 = 0$  e l'equilibrio è asintoticamente stabile, come mostrato in Fig. 8b. Tuttavia, per  $P$  leggermente più grande di  $P_1^*$ , esistono altre due soluzioni simmetriche rispetto allo zero. Ciò significa che per  $P = P_1^*$  abbiamo un forcone, come mostrato in Fig. 8c. All'aumentare del carico i due angoli tendono verso  $\mp \pi$  e i corrispondenti equilibri sono asintoticamente stabili mentre l'equilibrio  $\bar{x}_1 = \bar{x}_2 = 0$  è instabile. Infine, per  $P \geq P_2^*$  (vedi Fig. 8b) abbiamo altre due coppie di equilibri simmetrici. Diminuendo il carico, tali equilibri vanno in collisione e spariscono. La collisione è, pertanto, una biforcazione nodo-sella, come evidenziato in Fig. 8c. All'aumentare di  $P$  la retta  $(K/PL)x_1$  di Fig. 8b ruota in senso orario e, quindi, diventa tangente, per valori successivi  $P_3^*, P_4^*, \dots$  del carico, alla terza, quarta, ... ansa positiva del grafo della funzione  $\sin x_1$ . Ovviamente, per ognuno di questi valori abbiamo una biforcazione nodo-sella. Il sistema ha, pertanto, una biforcazione forcone e infinite biforcazioni nodo-sella.  $\square$

### Biforcazione di Hopf

La biforcazione di Hopf è una delle più comuni. Essa spiega come un ciclo possa nascere per trasformazione continua di un equilibrio al variare di un parametro, un fenomeno molto frequente, non solo nei sistemi elettromeccanici, ma anche in quelli economici e biologici. In termini di collisione questa biforcazione coinvolge un equilibrio e un ciclo che, in realtà, si restringe ad un punto, nel momento della collisione. La Fig. 9 rappresenta i due casi possibili, noti rispettivamente come *Hopf supercritica* e *Hopf subcritica*.

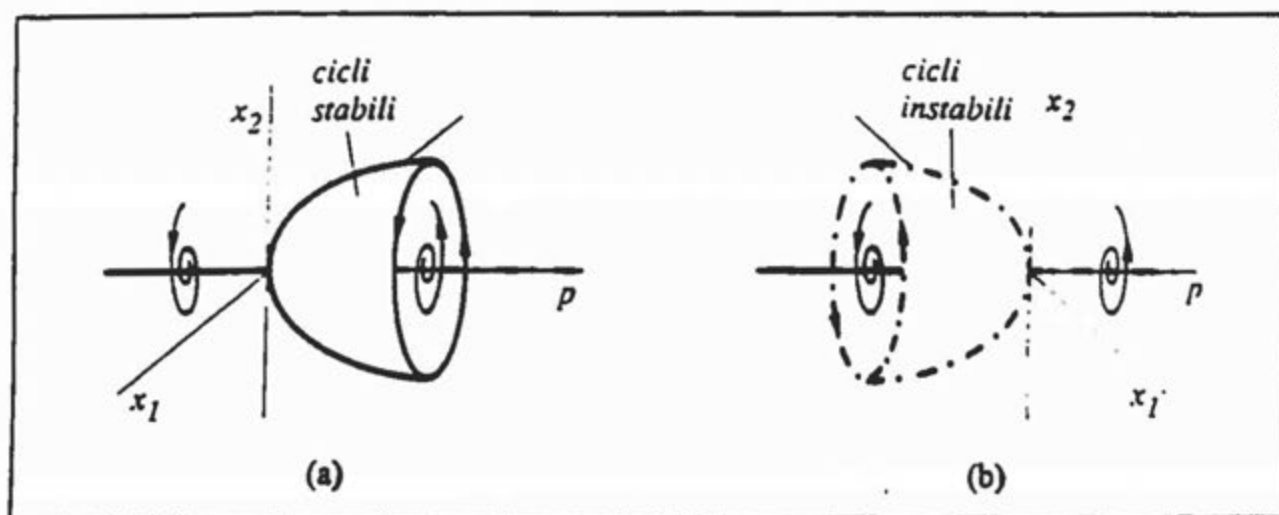


Fig. 9 - Biforcazione di Hopf supercritica (a) e subcritica (b)

Nel caso supercritico un ciclo asintoticamente stabile ha, al suo interno, un fuoco instabile. Al variare del parametro il ciclo si restringe fino a collidere con l'equilibrio. Dopo la collisione rimane solo l'equilibrio che, però, cambia stabilità e diventa, quindi, un fuoco stabile. Nel caso subcritico, invece, il ciclo è instabile e costituisce la frontiera del bacino di attrazione del fuoco stabile contenuto al suo interno.

La forma normale della biforcazione di Hopf è

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= p x_1 + w x_2 + c x_1 (x_1^2 + x_2^2) \\ \dot{x}_2 &= -w x_1 + p x_2 + c x_2 (x_1^2 + x_2^2)\end{aligned}$$

che in coordinate polari diventa

$$\begin{aligned}\dot{\rho} &= p \rho + c \rho^3 \\ \dot{\vartheta} &= \omega\end{aligned}$$

Quest'ultima forma mostra che la traiettoria spirala intorno all'origine a velocità angolare costante  $\omega$ , mentre la distanza  $\rho(t)$  dello stato dall'origine varia in accordo con l'equazione differenziale  $\dot{\rho} = p\rho + c\rho^3$ . Questa equazione è la forma normale (già discussa) del forcone, per cui la stabilità del ciclo dipende dal segno della costante  $c$ , nota come *numero di Liapunov*. Il lettore potrà facilmente verificare, tenendo presente le Fig. 6c e 7c', che la biforcazione di Hopf è supercritica se  $c < 0$  e subcritica se  $c > 0$  (nel caso  $c = 0$  il sistema è lineare e per  $p = p^* = 0$  l'equilibrio è un centro, contornato da infiniti cicli semplicemente stabili). Per  $p = p^*$  l'origine dello spazio di stato è asintoticamente stabile nel caso supercritico e instabile nel caso opposto. Lo Jacobiano della forma normale, valutato nell'origine, è

$$J = \begin{vmatrix} p & \omega \\ -\omega & p \end{vmatrix}$$

e i suoi due autovalori  $\lambda_{1,2} = p \mp i\omega$  attraversano, quindi, l'asse immaginario al variare del parametro  $p$ . Questa è la proprietà che viene comunemente usata nelle applicazioni per scoprire le biforcazioni di Hopf. Per individuare, invece, se la biforcazione è supercritica o subcritica si può usare il criterio di Liapunov per determinare se per  $p = p^*$  l'equilibrio è asintoticamente stabile (supercriticità) o instabile (subcriticità). Alternativamente (ma equivalentemente), si può determinare il segno del numero di Liapunov  $c$  seguendo una procedura (spesso piuttosto onerosa) che per brevità non riportiamo.

#### Esempio (risorse-consumatori)

Il modello più accreditato per la descrizione della dinamica di un consumatore  $x_2$  (predatore) e della sua risorsa  $x_1$  (preda) è quello di Rosenzweig

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= r x_1 \left( 1 - \frac{x_1}{K} \right) - x_2 \frac{a x_1}{b + x_1} \\ \dot{x}_2 &= e \frac{a x_1}{b + x_1} x_2 - m x_2\end{aligned}$$

in cui  $r$  e  $K$  sono tasso di crescita e capacità portante della risorsa,  $a x_1 / (b - x_1)$  è la cosiddetta risposta funzionale del consumatore (cioè la quantità di risorsa consumata nell'unità di tempo da un consumatore),  $m$  è la mortalità del consumatore ed  $e$  la sua efficienza, cioè il fattore di conversione esistente tra flusso di risorsa consumato e crescita dei consumatori. Questo sistema ha tre equilibri

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \bar{x} = \begin{pmatrix} K \\ 0 \end{pmatrix} \quad \bar{x} = \begin{pmatrix} \frac{bm}{ae-m} \\ \frac{b^2 mre}{(ae-m)^3} (Kae - (K+b)m) \end{pmatrix}$$

il terzo dei quali è significativo (positivo) se

$$e \geq e_1^* = \frac{m}{a} + \frac{bm}{aK}$$

Se  $e = e_1^*$  il secondo e il terzo equilibrio coincidono e la biforcazione è uno scambio di stabilità (vedi Fig. 10). Il calcolo degli autovalori dello Jacobiano  $J_3$  corrispondente al terzo equilibrio permette di stabilire che per  $e = e_2^* = (m/a)(K+b)/(K-b)$  tali autovalori sono puramente immaginari.

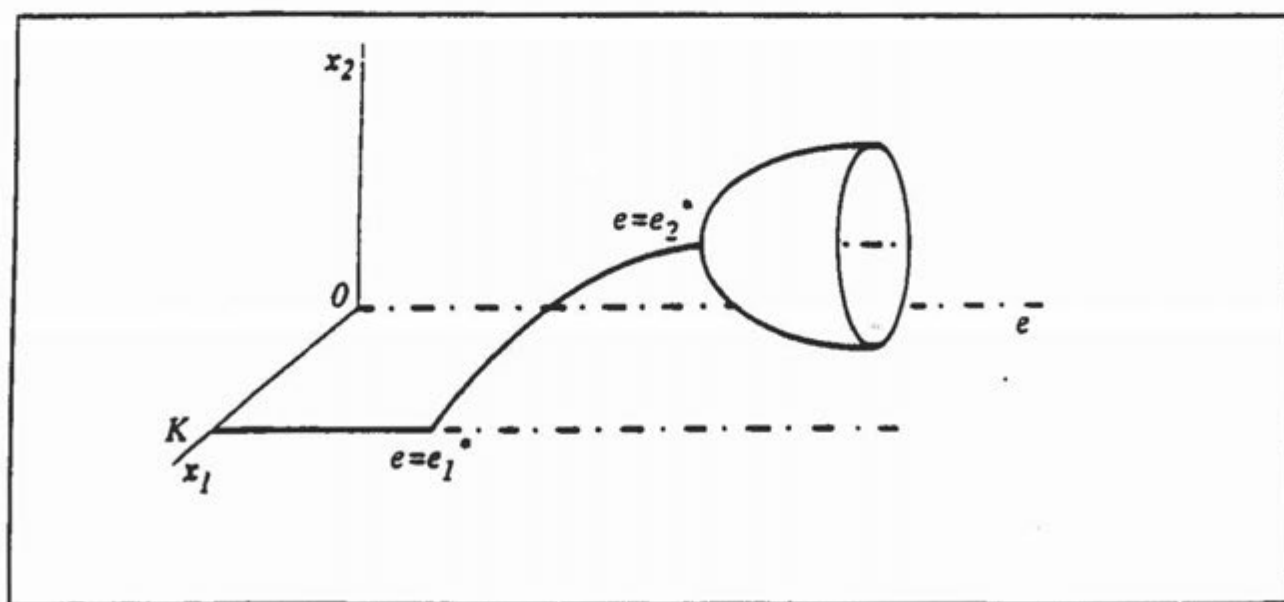


Fig. 10 - Biforcazioni del modello di Rosenzweig al variare dell'efficienza dei consumatori

Per  $e = e_2^*$  si ha, pertanto, una biforcazione di Hopf. Il numero di Liapunov  $c$  è facilmente calcolabile e risulta negativo, per cui la biforcazione è supercritica come indicato in figura.

L'interpretazione del diagramma di Fig. 10 è la seguente. Se l'efficienza è troppo bassa ( $e < e_1^*$ ) i consumatori non sopravvivono, mentre se è troppo alta ( $e > e_2^*$ ) essi, pur sopravvivendo, oscillano periodicamente nel tempo insieme alla loro risorsa. Inoltre, l'ampiezza delle oscillazioni cresce rapidamente con il surplus ( $e - e_2^*$ ) di efficienza e il periodo delle oscillazioni, per piccoli surplus di efficienza, è circa pari a  $2\pi/\omega$ ,  $\omega$  essendo la parte immaginaria degli autovalori dello Jacobiano  $J_3$ .  $\square$

### Tangente e flip

La biforcazione tangente è l'analogo, a livello dei cicli, della biforcazione nodo-sella. Due cicli vanno in collisione al variare del parametro e si annientano l'uno con l'altro (vedi Fig. 2). Per variazioni opposte del parametro si assiste, invece, alla nascita di due cicli dal nulla. A differenza della Hopf, in cui il ciclo nasce di ampiezza nulla, in questo caso i cicli non nascono degeneri, né in ampiezza né in frequenza. Nello spazio di controllo la biforcazione appare come mostrato, ad esempio, in Fig. 11. Per  $p < p^*$  un equilibrio asintoticamente stabile è circondato da un primo ciclo instabile e da un secondo ciclo asintoticamente stabile. I due cicli collidono per  $p = p^*$  e per  $p > p^*$  l'unico attrattore è l'equilibrio.

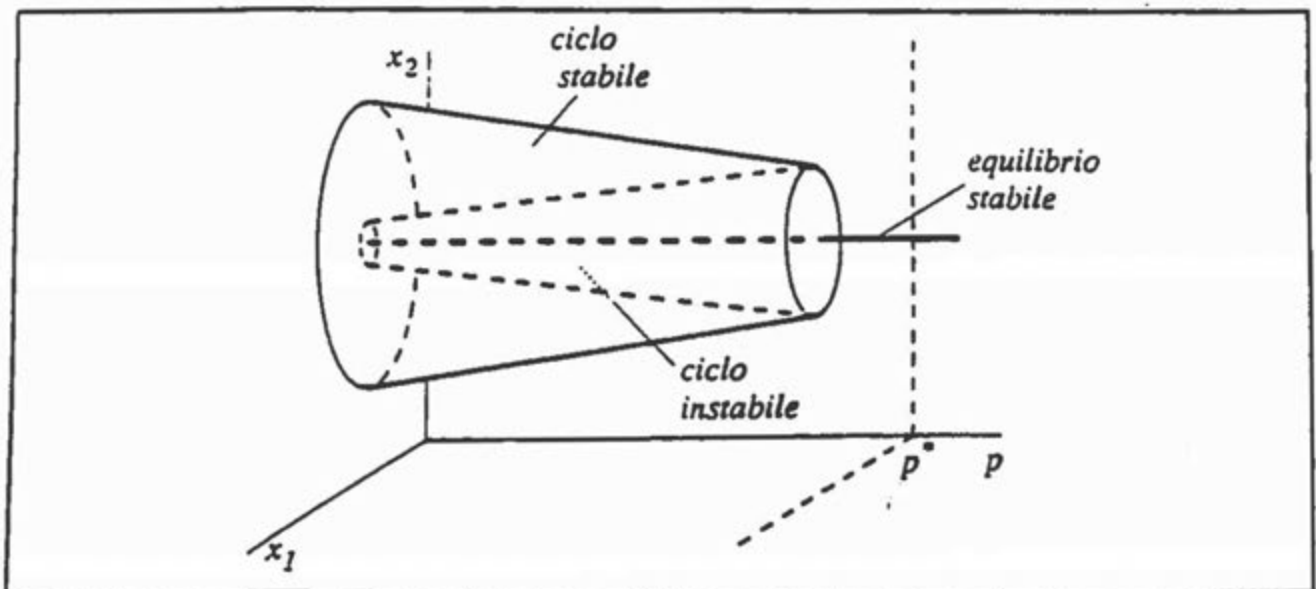


Fig. 11 - Biforcazione tangente di cicli

La biforcazione flip può avvenire soltanto in sistemi di ordine superiore al secondo e non può, pertanto, essere visualizzata nello spazio di controllo. Essa viene usualmente presentata con i due quadri delle traiettorie di Fig. 12 corrispondenti ai valori  $p^* - \varepsilon$  e  $p^* + \varepsilon$  del parametro.



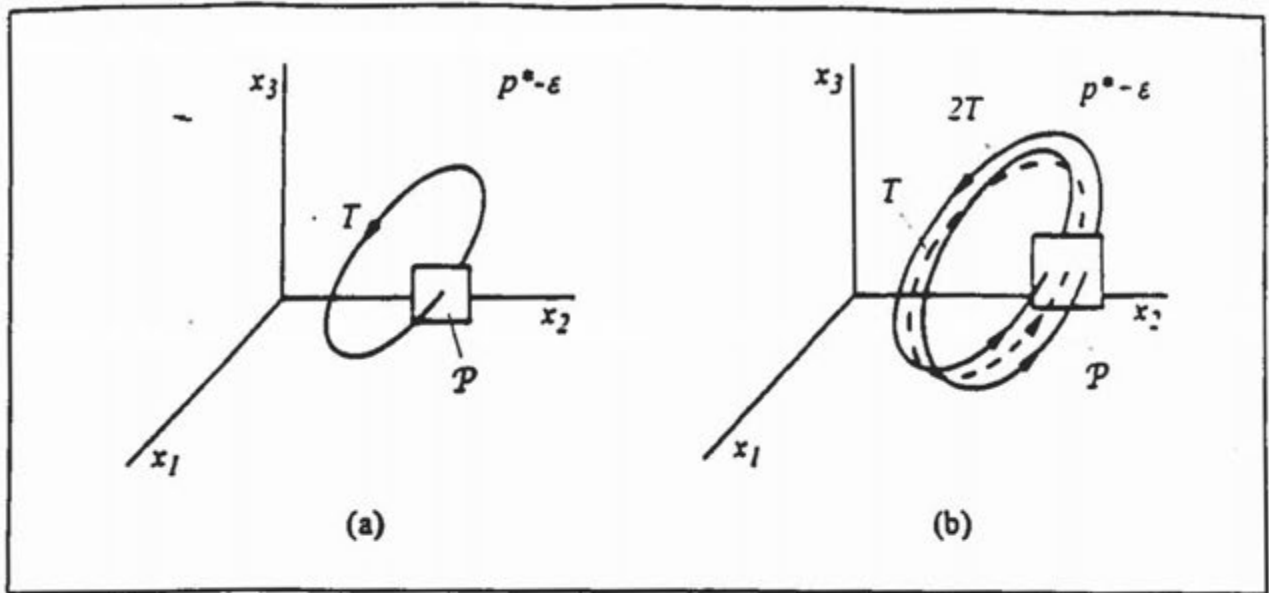


Fig. 12 - Biforcazione flip: un ciclo stabile di periodo  $T$  si "apre" e raddoppia di periodo

Un ciclo asintoticamente stabile di periodo  $T$  si sdoppia per  $p=p^*$  in un ciclo asintoticamente stabile di periodo  $2T$  e in uno instabile di periodo  $T$ . Ovviamente, nel verso opposto si assiste ad una collisione di cicli. La biforcazione flip può essere anche illustrata sulla sezione di Poincaré  $\mathcal{P}$  come fatto in Fig. 12. Per  $p < p^*$  si ha un solo punto di equilibrio su  $\mathcal{P}$  corrispondente al ciclo di Fig. 12a, mentre per  $p > p^*$  si hanno tre punti: quello centrale corrisponde al ciclo di periodo  $T$  e gli altri due, visitati alternativamente, corrispondono al ciclo di periodo  $2T$ . Per  $p \rightarrow p^*$  i tre punti collidono e, pertanto, lo Jacobiano della mappa di Poincaré deve avere un autovalore che tende a  $-1$  per  $p \rightarrow p^*$ .

I tre cicli coinvolti nella biforcazione flip possono anche essere tutti instabili, nel qual caso la biforcazione non è di solito di grande interesse dal punto di vista fisico. Ma quando, invece, due dei tre cicli sono stabili, come ipotizzato in Fig. 12, il fenomeno è decisamente interessante. Al variare del parametro il sistema si continua a comportare da oscillatore ma diventa più lento, raddoppiando il periodo delle oscillazioni. Il ciclo di periodo  $2T$  è inizialmente molto simile a quello di periodo  $T$  che lo ha originato, ma al variare del parametro esso si differenzia di solito notevolmente sia in forma che in frequenza.

Il fenomeno del raddoppio di periodo è stato osservato in moltissimi sistemi non lineari del secondo ordine forzati periodicamente e descritti pertanto dalle equazioni

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= f_1\left(x_1(t), x_2(t), U \sin \frac{2\pi}{T} t\right) \\ \dot{x}_2(t) &= f_2\left(x_1(t), x_2(t), U \sin \frac{2\pi}{T} t\right)\end{aligned}$$

dove  $U$  e  $T$  sono ampiezza e periodo della forzante. Il caso più standard (si pensi alla risposta in frequenza dei sistemi lineari) è che un tale sistema forzato ammetta un unico modo di

funzionamento: un ciclo stabile di periodo pari a quello della forzante ( $T$ ). Considerando il tempo come terza variabile di stato, e aggiungendo la corrispondente equazione di stato  $\dot{x}_3 = 1 \pmod{T}$  il sistema può essere interpretato come un sistema autonomo del terzo ordine  $\dot{x} = f(x, U)$  ed è quindi, lecito aspettarsi che al variare dell'ampiezza della forzante possano nascere delle *subarmoniche* (raddoppio di periodo). Ciò accade, ad esempio, in molti sistemi meccanici (si osservi, ad esempio, il periodo del moto orizzontale di una barca attraccata ad un punto fisso con una fune e lo si confronti con il periodo dell'onda (forzante)) ed elettrici, ma anche in numerosi sistemi biologici spesso influenzati da fattori varianti periodicamente (cicli giornalieri, lunari e annuali).

### Naimark-Sacker

Questa biforcazione spiega il più semplice meccanismo di nascita di un toro da un ciclo. Essa è illustrata in Fig. 13. Per  $p < p^*$  abbiamo un ciclo (che in figura è stato ipotizzato asintoticamente stabile) e per  $p > p^*$  abbiamo un toro asintoticamente stabile contenente al suo interno un ciclo instabile. Osservate nell'ordine opposto, le figure mostrano chiaramente che il toro si restringe fino a collidere con il ciclo contenuto al suo interno.

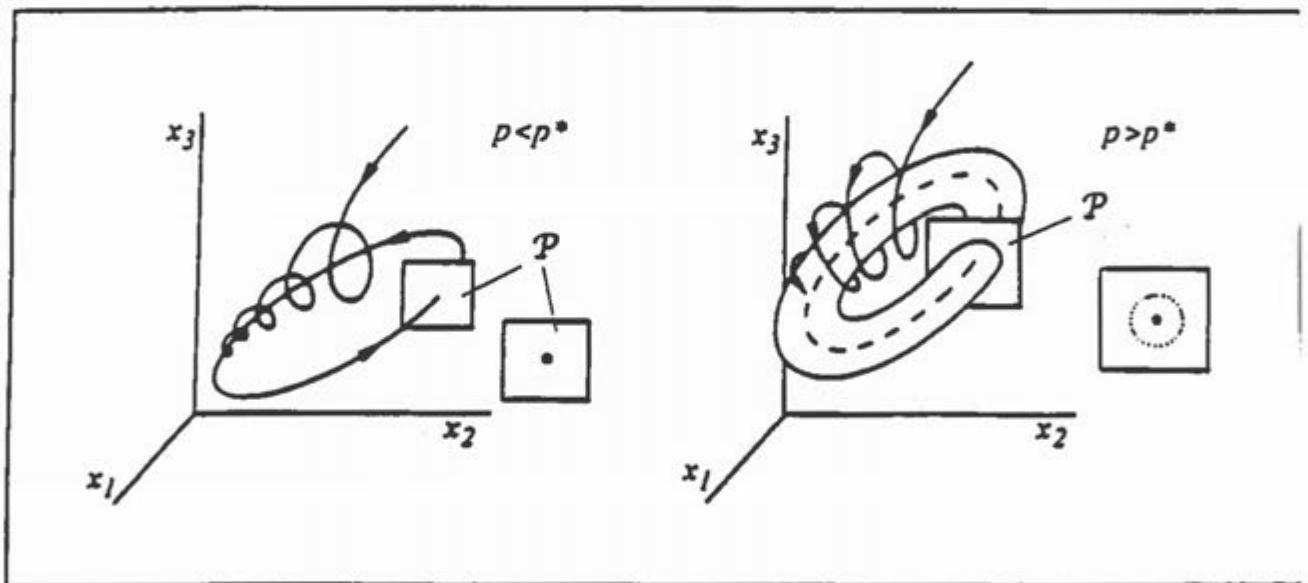


Fig. 13 - Biforcazione di Naimark-Sacker: un ciclo e un toro collidono per  $p \rightarrow p^*$

Naturalmente, i tori possono subire anche altri tipi di biforcazione. Ad esempio, due tori, uno interno all'altro, possono collidere ed annientarsi tra loro per tangenza.

## 4. BIFORCAZIONI GLOBALI

Come già detto nel secondo paragrafo, le biforcazioni globali sono interpretabili come collisioni tra varietà stabili e instabili di selle. In Fig. 3 è già stato riportato un esempio, quello di una collisione tra la varietà instabile  $X_1^+$  di un equilibrio sella con la varietà stabile  $X_2^-$  di un altro



equilibrio sella. Queste collisioni si chiamano *eterocline*. Esse possono riguardare anche più di due equilibri sella, come mostrato in Fig. 14a, o due o più cicli sella, come mostrato in Fig. 14b.

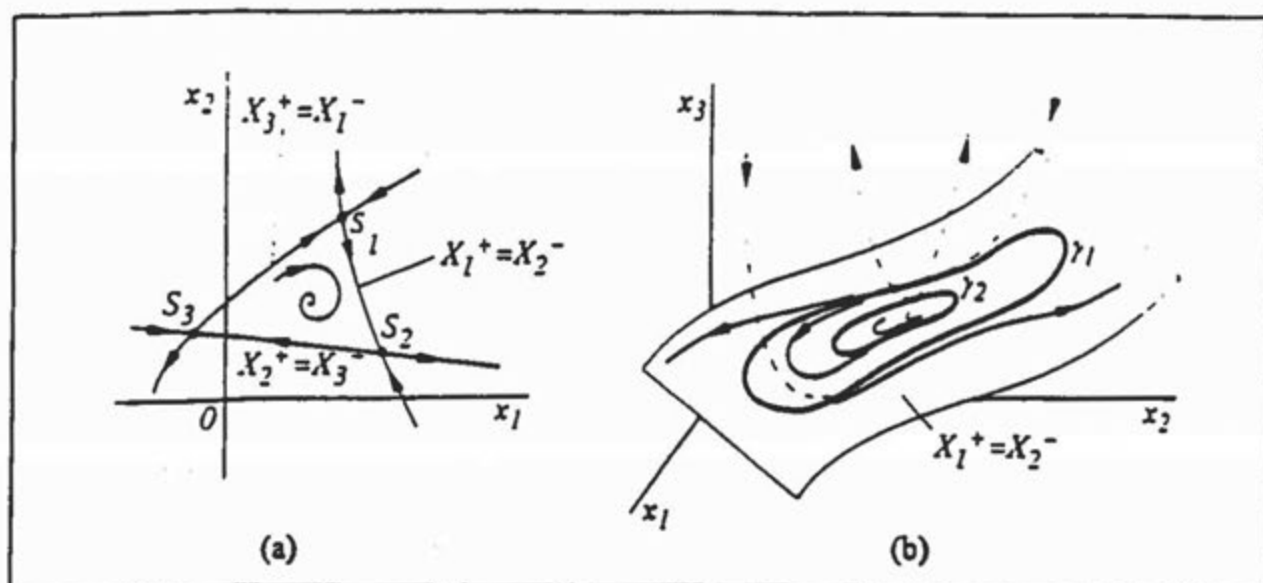


Fig. 14- Esempi di biforcazioni eterocline: (a) collegamento di tre selle; (b) eterocline tra cicli

Un caso speciale, ma importante nelle applicazioni, è quello della biforcazione *omoclina*, caratterizzato da collisione di varietà stabili e instabili della stessa sella. Il caso più semplice, illustrato in Fig. 15, mostra che la biforcazione omoclina in  $R^2$  è anche interpretabile come collisione per  $p=p^*$  di un ciclo  $\gamma(p)$  con un equilibrio sella  $S(p)$ . Avvicinandosi alla sella, il ciclo ha periodo  $T$  sempre più lungo, anzi  $T \rightarrow \infty$  per  $p \rightarrow p^*$ . La figura, letta da destra, mostra la nascita di un ciclo con relativo bacino di attrazione (regione punteggiata). Anche in questo caso, il ciclo nasce in modo degenere, non in ampiezza (come nel caso della biforcazione di Hopf) bensì in frequenza.

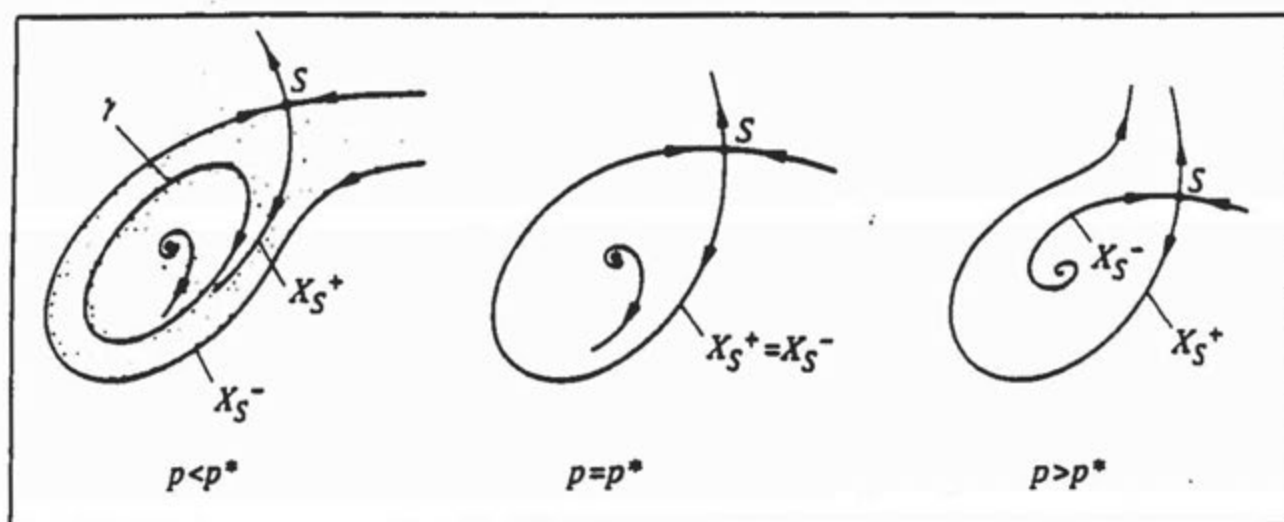


Fig. 15- Biforcazione omoclina: per  $p=p^*$  si ha collisione della varietà stabile  $X_S^-$  con la varietà instabile  $X_S^+$  della sella  $S$ . La biforcazione è anche interpretabile come collisione del ciclo  $\gamma$  con la sella  $S$

Questo fatto non è fortuito perché le biforcazioni omocline in  $R^2$  sono sempre accompagnate dalla presenza di un ciclo che nasce perturbando l'omoclina in uno dei due sensi. Anzi, la natura del ciclo può essere precisata analizzando il segno del valore di sella  $\sigma$  che, per definizione, è la somma dei due autovalori della sella (traccia dello Jacobiano). Più precisamente, se  $\sigma < 0$  il ciclo è unico e stabile e se  $\sigma > 0$  il ciclo è unico e instabile. Questa proprietà è stata estesa da Shil'nikov ai casi tridimensionali illustrati in Fig. 16.

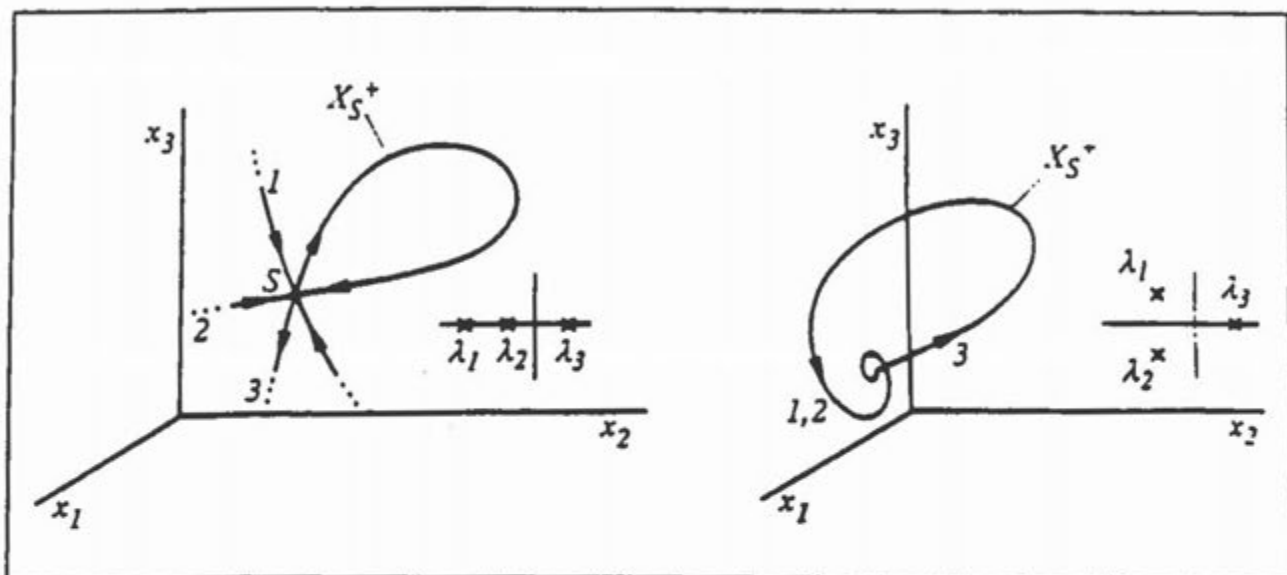


Fig. 16 -Biforcazioni omocline in  $R^3$  (si noti che  $X_S^+ \subset X_S^-$ ): (a) autovalori reali; (b) autovalori complessi.

Infatti, definendo il valore di sella  $\sigma$  come  $(\lambda_2 + \lambda_3)$  nel caso (a) e come  $(Re(\lambda_1) + \lambda_3)$  nel caso (b), si può ancora affermare che se  $\sigma < 0$  il ciclo è unico e stabile. Se, invece,  $\sigma > 0$  il ciclo è unico e instabile (sella) nel caso (a), mentre nel caso (b) perturbando l'omoclina si ottengono infiniti cicli sella. In quest'ultimo caso, qualora valgano ulteriori proprietà legate al comportamento del sistema in punti lontani dalla sella, si ottiene comportamento caotico (detto omoclino o alla Shil'nikov).

## 5. CATASTROFI, ISTERESI E CUSPIDE

Sulla base di quanto sviluppato nei precedenti paragrafi, è possibile inquadrare in modo semplice e comprensivo il problema delle transizioni catastrofiche nei sistemi dinamici. Su questo argomento è stato detto molto negli ultimi decenni, anche se la cosiddetta teoria delle catastrofi è stata, purtroppo, spesso invocata a sproposito e caricata di attese che potranno soltanto essere insoddisfatte. Ridotto ai minimi termini, il problema delle catastrofi è il seguente. Supponendo che il sistema abbia praticamente raggiunto un suo comportamento di regime, può accadere che, a causa di una variazione microscopica dei parametri, si inneschi un transitorio al termine del quale il sistema sia in un regime di funzionamento macroscopicamente diverso? Quando ciò accade, si dice che il sistema subisce una *transizione catastrofica*.

Supponiamo, allora, che all'istante  $t_0$  il sistema sia su uno dei suoi attrattori, diciamo  $A(p)$ , o in un punto  $x_0$  molto vicino ad  $A(p)$  nel bacino di attrazione  $B(A(p))$  e supponiamo che a questo istante  $t_0$  il parametro venga perturbato da  $p$  a  $p + \Delta p$ .

Una prima ipotesi è che  $p$  e  $p + \Delta p$  non siano separati da alcuna biforcazione. Ciò implica che i quadri delle traiettorie del sistema  $\dot{x} = f(x, p)$  e del sistema  $\dot{x} = f(x, p + \Delta p)$  siano ottenibili l'uno dall'altro con una piccola deformazione. In particolare, l'attrattore si modifica da  $A(p)$  a  $A(p + \Delta p)$ , ma per continuità se  $\Delta p$  è piccolo il nuovo attrattore  $A(p + \Delta p)$  è interno a  $B(A(p))$ . Pertanto, anche  $x_0 \in B(A(p + \Delta p))$  così che il sistema evolve verso il nuovo attrattore  $A(p + \Delta p)$ . In conclusione, una variazione microscopica dei parametri ha generato una variazione microscopica nel funzionamento del sistema.

La seconda ipotesi, alternativa alla prima, è che  $p$  e  $p + \Delta p$  siano separati da una biforcazione. In tal caso può anche accadere, come vedremo tra poco, che lo stato del sistema subisca una variazione macroscopica che lo porta verso un altro attrattore. Quando ciò accade per tutti gli stati iniziali  $x_0$  la biforcazione si dice catastrofica. Se la transizione catastrofica è, invece, impossibile la biforcazione è detta non catastrofica. Infine, in tutti gli altri casi, si dice che la biforcazione è indeterminata.

Riprendiamo ora in esame, una ad una, le biforcazioni discusse in precedenza e analizziamole da questo nuovo punto di vista. Iniziamo con la Fig. 6 e supponiamo che  $p$  sia negativo e piccolo, diciamo  $p = -\varepsilon$ , che  $x_0$  sia vicino all'equilibrio asintoticamente stabile e che  $\Delta p$  sia uguale a  $2\varepsilon$  in modo che il valore di  $p$  dopo la perturbazione sia  $\varepsilon$ . Nel caso della prima biforcazione (scambio di stabilità)  $x(t) \rightarrow \varepsilon$  se  $x_0 > 0$  e  $x(t) \rightarrow -\infty$  se  $x_0 < 0$ . Pertanto, questa biforcazione è indeterminata perché può dar luogo, ma non dà sempre luogo, a una transizione catastrofica. In un caso come questo, viene quindi esaltato il ruolo del rumore che eventualmente agisce sul sistema e che determina il segno dello stato all'istante della perturbazione. La seconda biforcazione (nodo-sella) è, invece, catastrofica mentre la terza (forcone) è non catastrofica perché  $x(t) \rightarrow \mp \sqrt{\varepsilon}$  (la biforcazione di Fig. 7c' è, invece, catastrofica). Passando alla Fig. 9 ci si rende immediatamente conto che la biforcazione di Hopf supercritica è non catastrofica e che quella subcritica è catastrofica, e questa è la differenza fondamentale tra i due tipi di biforcazione di Hopf. Infine, la biforcazione tangente (Fig. 11) e l'omoclina (Fig. 15) sono catastrofiche, mentre la flip di Fig. 12 e la Naimark-Sacker di Fig. 13 sono non catastrofiche.

Quando, al variare di  $p$ , un attrattore  $A'(p)$  subisce una biforcazione catastrofica, a transizione avvenuta il sistema si trova in un nuovo attrattore  $A''(p + \Delta p)$ . È allora interessante sapere se variando opportunamente il parametro, eventualmente per successione di piccole variazioni, è possibile tornare sull'attrattore  $A'(p)$ , nel qual caso la catastrofe si dice *reversibile*. L'esempio più noto di questo tipo di possibilità è quello dell'*isteresi*, di cui in Fig. 17 sono riportati due esempi relativi a sistemi del primo ordine con un solo parametro.

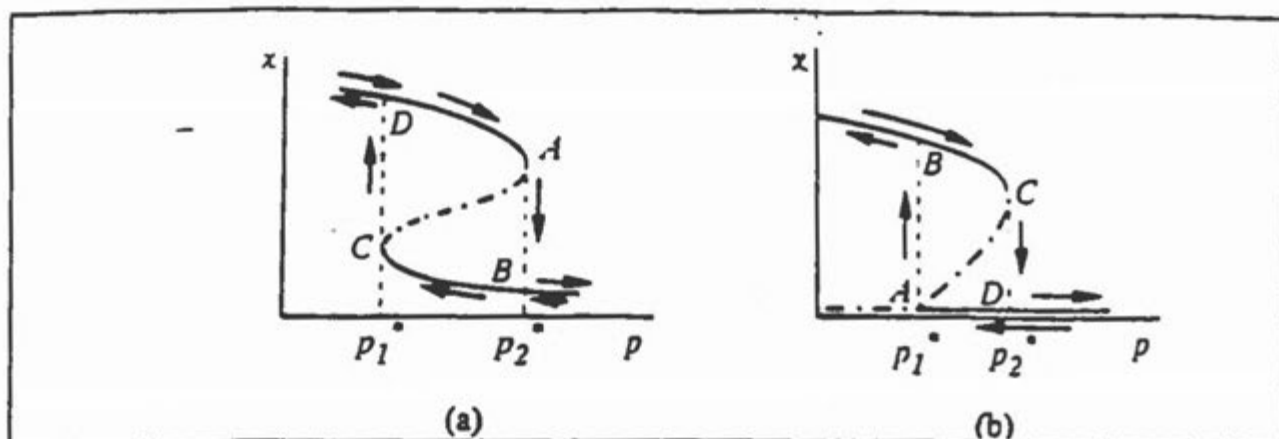


Fig. 17 - Due sistemi con isteresi: (a) coppia di biforcazioni nodo-sella; (b) scambio di stabilità e nodo-sella

Nel primo caso il sistema ha una coppia di biforcazioni nodo-sella mentre nel secondo caso ha uno scambio di stabilità e una nodo-sella. Tutte le biforcazioni sono catastrofiche (transizioni  $A \rightarrow B$  e  $C \rightarrow D$  in figura) e se il parametro  $p$  viene variato, per piccoli incrementi o decrementi successivi, tra un valore  $p_{min} < p_1^*$  e un valore  $p_{max} > p_2^*$  e poi in verso opposto da  $p_{max}$  a  $p_{min}$  il ciclo isteretico  $ABCD$  viene interamente percorso. Le catastrofi sono, quindi, reversibili, ma per tornare in un attrattore  $A'$  dopo una transizione catastrofica  $A' \rightarrow A''$  è necessario passare attraverso una seconda transizione catastrofica. Questo semplice tipo di isteresi interpreta numerosi fenomeni della fisica, della chimica e dell'elettromeccanica, ma anche numerosi fenomeni biologici. Ad esempio, l'isteresi di Fig. 17a può essere usata per spiegare il battito cardiaco, immaginando che  $x$  rappresenti l'estensione delle fibre del cuore,  $p$  lo stimolo (potenziale del nodo seno-atriale) e  $A \rightarrow B$  e  $C \rightarrow D$  le transizioni diastole  $\rightarrow$  sistole e sistole  $\rightarrow$  diastole. L'isteresi di Fig. 17b interpreta, invece, il problema del collasso dei pascoli spiegato da Noy-Meir con il semplice sistema

$$\dot{x} = rx \left( 1 - \frac{x}{K} \right) - p \frac{x}{b+x}$$

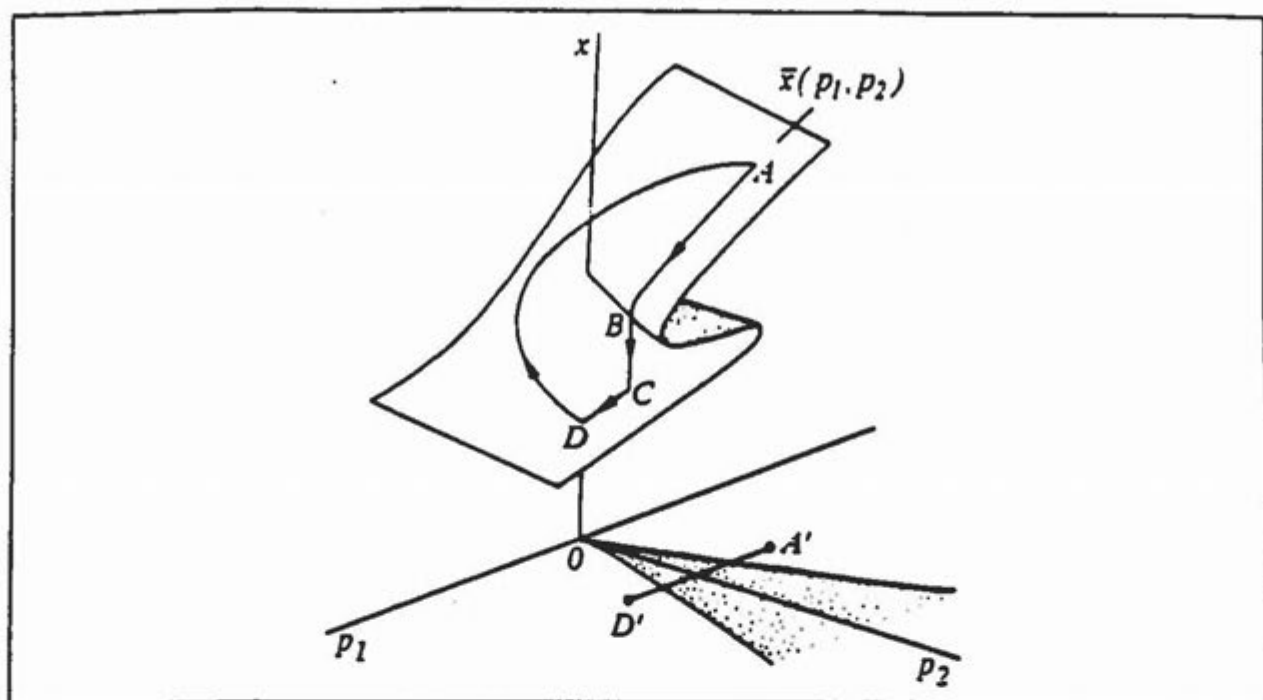
in cui  $x$  è la biomassa erbacea per ettaro e  $p$  il numero di capi per ettaro. All'aumentare di  $p$  l'equilibrio  $\bar{x} > 0$  subisce per  $p = p_2^*$  una biforcazione nodo-sella e il pascolo collassa. Affinché la risorsa possa rigenerarsi si deve diminuire radicalmente ( $p < p_1^*$ ) il numero di capi.

Una variante dell'isteresi è rappresentata dalla *cuspid* descritta dalla forma normale

$$\dot{x} = p_1 + p_2 x - x^3$$

che, a differenza di quanto visto finora, è un sistema con due parametri. Per  $p_1 = 0$  si ottiene la forma normale del forcone, mentre per  $p_2 > 0$  si ha una isteresi rispetto a  $p_1$  con due nodi-sella. Gli stati di equilibrio  $\bar{x}(p_1, p_2)$  sono mostrati in Fig. 18. La regione a cuspid nello spazio dei parametri (regione punteggiata) è quella per cui si hanno tre equilibri (due asintoticamente stabili e uno instabile (quello centrale)). Variando i parametri in modo opportuno si può tornare in

un attrattore dal quale è avvenuta una transizione catastrofica senza dover subire una seconda transizione catastrofica (linea A B C D A di figura).



**Fig. 18** -Equilibri  $\bar{x}(p_1, p_2)$  di un sistema a cuspidi. Gli equilibri punteggiati sono instabili e corrispondono ai punti della regione a cuspidi (pure punteggiata) dello spazio dei parametri

La cuspidi è stata usata per interpretare un gran numero di fenomeni in cui è essenziale che la discussione sia fatta al variare di due parametri. La *Fig. 18* può anche essere usata a puro titolo qualitativo per inquadrare fenomeni che non siano stati neppure modellizzati. Riprendendo, ad esempio, il problema del battito cardiaco, in cui  $x$  è l'estensione delle fibre e  $p_1$  il potenziale del nodo seno-atriale, possiamo immaginare che  $p_2$  sia la pressione arteriosa. In condizioni normali  $p_2$  è costante e tale che le variazioni periodiche di  $p_1$  sostengano il ciclo isteretico costituito da due transizioni catastrofiche. In altre parole, nello spazio dei parametri si percorre ripetutamente nei due sensi un segmento parallelo all'asse  $p_1$  posizionato a cavallo della cuspidi, come il segmento  $A'D'$  di *Fig. 18*. Un aumento o una diminuzione di pressione avrà allora come effetto quello di allontanare o avvicinare il segmento  $A'D'$  all'asse  $p_1$ . Un consistente aumento di pressione potrà allora far sì che il segmento  $A'D'$  sia tutto interno alla regione a cuspidi. In tali condizioni il ciclo isteretico non è più sostenuto e si ha, quindi, un arresto cardiaco.

Terminiamo questo paragrafo con un esempio riassuntivo: un sistema con cinque biforcazioni, di cui alcune catastrofiche e irreversibili e con un ciclo di isteresi decisamente interessante.



### Esempio (catena alimentare)

Si consideri il sistema

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= r x_1 \left(1 - \frac{x_1}{K}\right) - x_2 \frac{a x_1}{b + x_1} \\ \dot{x}_2 &= e \frac{a x_1}{b + x_1} x_2 - m x_2 - p \frac{c x_2}{d + x_2}\end{aligned}$$

in cui  $x_1(t)$  e  $x_2(t)$  sono le popolazioni del primo e del secondo compartimento (prede e predatori) di una catena alimentare che termina con un terzo livello trofico rappresentato da una popolazione costante indicata con  $p$ . Il modello è una semplice estensione del classico modello di Rosenzweig descritto nel terzo paragrafo (vedi anche Fig. 10). L'unica variante è l'aggiunta della mortalità  $p c x_2 / (d + x_2)$  dei predatori dovuta alla presenza dei superpredatori  $p$ . Senza entrare nei dettagli dell'analisi del modello mostriamo in Fig. 19 gli equilibri e i cicli del sistema al variare della densità  $p$  dei superpredatori per una scelta opportuna di tutti gli altri parametri ( $r, K, a, b, c, d, e, m$ ).

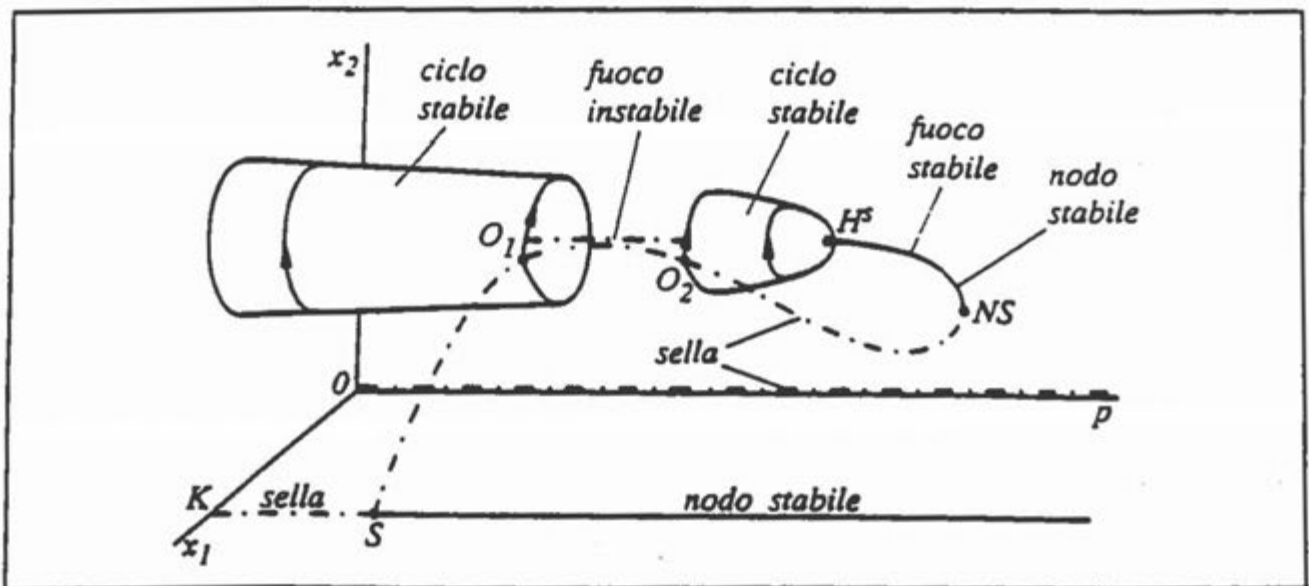


Fig. 19 - Equilibri, cicli e biforcazioni di una catena alimentare

La figura mette in evidenza cinque biforcazioni, di cui una sola (la Hopf supercritica  $H^S$ ) è non catastrofica. Due delle rimanenti quattro biforcazioni, la nodo-sella  $NS$  e l'omoclina  $O_2$  sono catastrofiche e irreversibili. Infatti, da  $NS$  e da  $O_2$  si "catastrofa" sul nodo stabile  $\bar{x}_1 = K, \bar{x}_2 = 0$  e da questo attrattore non è più possibile tornare su  $O_2$  o su  $NS$  variando il parametro  $p$ . Le altre due biforcazioni, lo scambio di stabilità  $S$  e l'omoclina  $O_1$ , sono, invece, catastrofiche e reversibili. Esse sono, infatti, le biforcazioni caratterizzanti un ciclo isteretico ottenuto variando lentamente e periodicamente la densità dei superpredatori in un campo contenente al proprio

interno i valori  $p_s^*$  e  $p_{01}^*$ . L'isteresi coinvolge un equilibrio (il nodo stabile  $\bar{x}_1=K$ ,  $\bar{x}_2=0$ ) e un ciclo con frequenza che decresce gradualmente fino a zero man mano che ci si avvicina all'omoclina  $O_1$ . Il diagramma temporale della popolazione  $x_2$  lungo il ciclo di isteresi è, quindi, quello mostrato in Fig. 20.

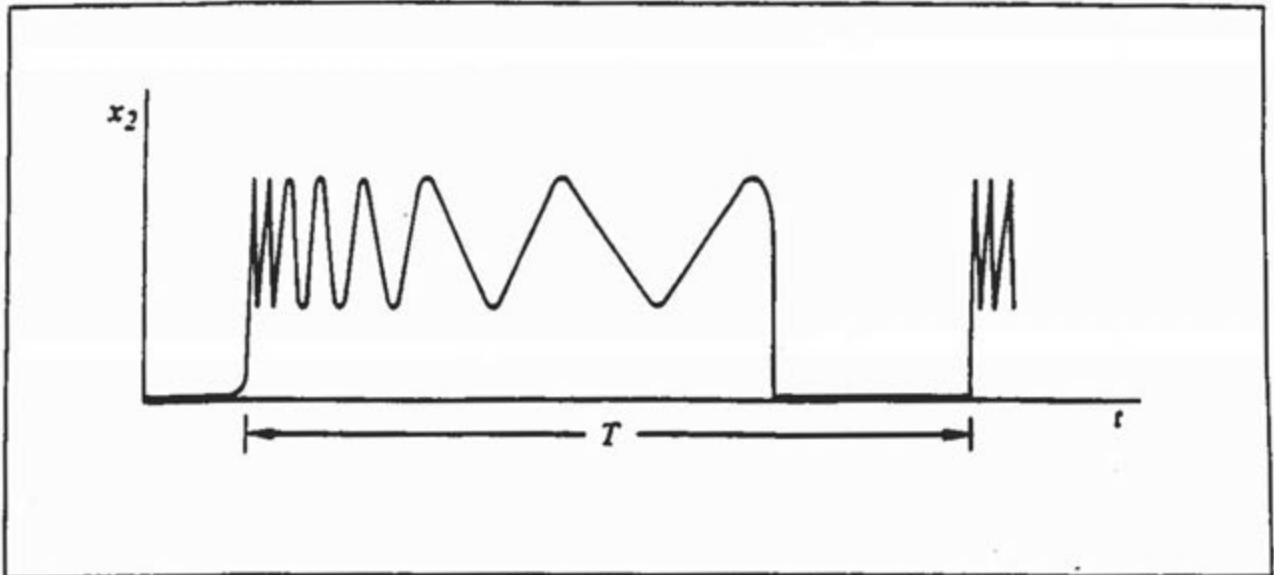


Fig. 20- Andamento periodico della popolazione di livello trofico intermedio conseguente ad una variazione periodica di periodo  $T$  del superpredatore

Naturalmente, non tutte le catene alimentari hanno un comportamento dinamico così singolare. In effetti, molte catene hanno un diagramma molto più semplice di quello di Fig. 19, con solo due biforcazioni (la Hopf supercritica e lo scambio di stabilità) del tipo di quello mostrato in Fig. 10. In questi casi, la catena alimentare non può avere transizioni catastrofiche e cicli di isteresi. □

## 6. SISTEMI A DINAMICA DIFFERENZIATA

Le biforcazioni, in particolare la loro visualizzazione nello spazio di controllo, sono molto utili per inquadrare il tema del comportamento dei sistemi a dinamica differenziata. Tali sistemi sono, in generale, costituiti da due o più compartimenti caratterizzati da tempi di risposta radicalmente diversi. Ciò è la regola, piuttosto che l'eccezione, nei sistemi biologici (si pensi, ad esempio, alle interazioni tra sistema nervoso e sistema muscolare o agli ecosistemi forestali in cui crescono e muoiono, con dinamiche completamente diverse, decompositori, alberi, defogliatori e insettivori).

Se indichiamo con  $x(t)$  il vettore di stato del compartimento veloce e con  $p(t)$  quello del compartimento lento un sistema a dinamica differenziata è descritto dalle equazioni



$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x, p) \\ \dot{p} &= \varepsilon g(x, p)\end{aligned}$$

con  $\varepsilon > 0$  e piccolo. Se  $\varepsilon$  è molto piccolo,  $\dot{p}$  è praticamente nullo e, quindi,  $p$  è praticamente costante. Si può, allora, immaginare che lo stato del sistema veloce evolva rapidamente verso un suo attrattore  $A'(p)$  che naturalmente si deforma lentamente nel tempo dato che  $p$  non è, in realtà, costante. Lo stato del sistema veloce evolve, quindi, seguendo l'attrattore  $A'(p(t))$ , finché eventualmente  $p(t)$  arriva ad un valore  $p^*$  che rappresenta una biforcazione catastrofica per il sistema veloce. Qui l'analisi si complica perché per  $p \rightarrow p^*$  il sistema veloce diventa eccezionalmente lento (in prossimità della biforcazione l'attrattore  $A'(p)$  perde la sua stabilità almeno in una direzione). Tuttavia, nella maggioranza dei casi, non appena la biforcazione è superata il sistema veloce subisce una transizione catastrofica che lo porta su un altro attrattore  $A''(p)$ . La Fig. 21 illustra quanto detto per due sistemi del secondo ordine che hanno, quindi, compartimenti lenti e veloci monodimensionali. In figura sono rappresentate le varietà  $f=0$  e  $g=0$  la cui geometria è fondamentale per la comprensione del comportamento del sistema.

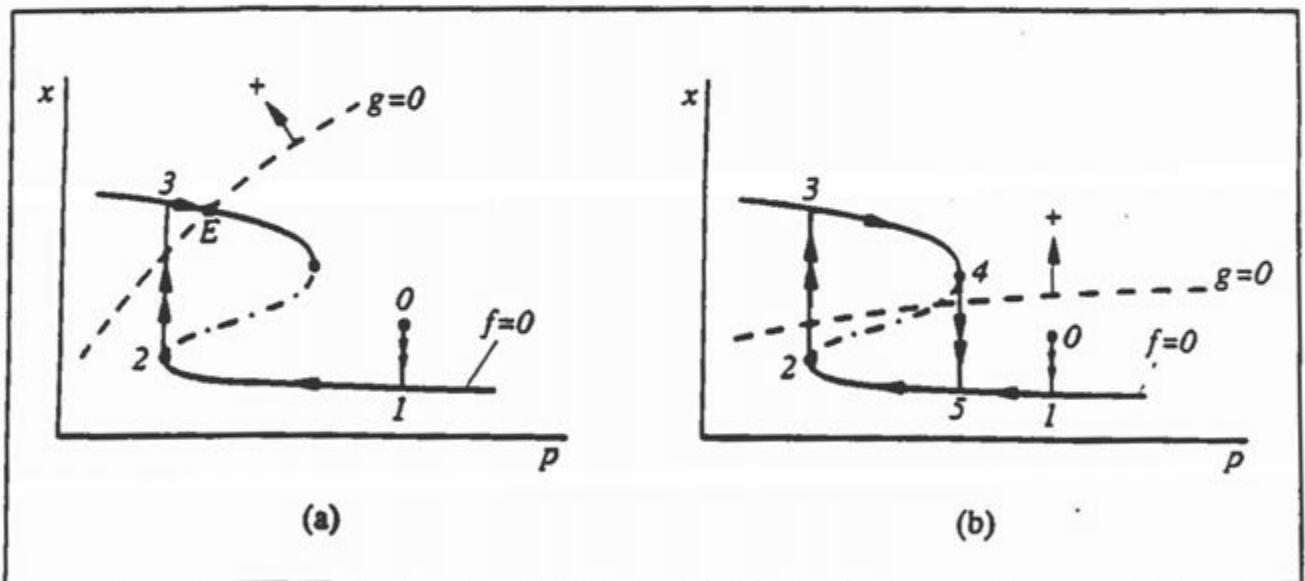


Fig. 21- Traiettorie di sistemi a dinamica differenziata. Nel primo caso (a) le traiettorie tendono verso un equilibrio  $E$ . Nel secondo caso (b) le traiettorie tendono verso un ciclo lento-veloce  $5 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 5$

Partendo da un punto generico  $0$  la componente veloce ( $x$ ) tende rapidamente (traiettoria con doppia freccia) verso l'equilibrio  $1$  del sistema  $\dot{x} = f(x, p)$  con  $p$  congelato al valore corrispondente al punto  $0$ . A questo punto si attiva la componente lenta e  $p$  decresce lentamente dato che nel punto  $1$  si ha  $g(x, p) < 0$ . Pertanto, il sistema evolve lentamente, lungo la varietà  $f=0$ , fino a raggiungere il punto di biforcazione nodo-sella  $2$ , dove la componente veloce subisce una transizione catastrofica  $2 \rightarrow 3$ . Nel punto  $3$  il segno di  $g$  è cambiato per cui  $p$  comincia a crescere. Nel caso di Fig. 21a lo stato del sistema evolve, di nuovo lentamente, fino all'equilibrio  $E$ . Nel caso di Fig. 21b, invece, il moto lento non si arresta e il sistema raggiunge

la biforcazione nodo-sella 4 dalla quale la componente veloce catastrofa sull'altro ramo della varietà  $f=0$  (punto 5). Si è così chiuso un ciclo lento-veloce ( $5 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 5$ ) costituito da due transizioni lente ( $5 \rightarrow 2$  e  $3 \rightarrow 4$ ) e due veloci ( $2 \rightarrow 3$  e  $4 \rightarrow 5$ ). L'esistenza del ciclo lento-veloce è facilmente individuabile: basta, infatti, verificare che la varietà lenta  $g=0$  separi i rami stabili della varietà veloce  $f=0$ . Questa regola, nota come *principio di separazione*, è valida anche in sistemi di ordine superiore al secondo ed è utilissima per determinare condizioni sufficienti per l'esistenza di cicli in sistemi a dinamica differenziata. Ad esempio, se volessimo completare l'analisi della catena alimentare discussa in Fig. 19 nel caso di un superpredatore a dinamica lenta (come è nella maggior parte delle catene alimentari) potremmo procedere nel modo seguente. Innanzitutto, potremmo descrivere la dinamica del superpredatore, ipotizzando che il suo tasso di crescita sia proporzionale, secondo un coefficiente di efficienza  $e'$ , al tasso di cattura di predatori, cioè

$$\dot{p} = e' \frac{c x_2}{d + x_2} p - m' p$$

La varietà lenta  $g=0$  è, pertanto, data da

$$\frac{e' c x_2}{d + x_2} - m' = 0$$

ed è, quindi, un piano parallelo al piano  $(x_1, p)$  di equazione  $x_2 = m'd/(e'c - m')$ . Risulta così evidente dalla Fig. 19 che se  $m'd/(e'c - m')$  è sufficientemente piccolo, il piano  $g=0$  è sufficientemente basso da separare i nodi stabili  $\bar{x}_1 = K$ ,  $\bar{x}_2 = 0$  dai cicli stabili. In queste condizioni,  $\dot{p} > 0$  sui cicli stabili e  $\dot{p} < 0$  sui nodi stabili, per cui la catena oscillerebbe naturalmente secondo il ciclo isteretico illustrato in Fig. 20.

## 7. CONCLUSIONI

Benché questa rassegna sulle biforcazioni possa essere sembrata relativamente lunga e dettagliata, essa rappresenta soltanto una piccola parte di quanto è oggi noto sull'argomento. Inoltre, è bene che il lettore tenga presente che lo stile con cui il tema è stato trattato è certamente carente per affrontare problemi più delicati. In particolare, abbiamo lasciato sullo sfondo il vero problema delle biforcazioni, che è quello della determinazione delle forme normali, nonché tutta la tematica dell'analisi numerica, senza la quale ben poco è fattibile in questo campo. A questo proposito, citiamo anche che per studiare le biforcazioni dei sistemi dipendenti da due parametri, risulta fondamentale la nozione di codimensione di una biforcazione, nozione che non abbiamo neppure introdotto per motivi di brevità e semplicità. Infine, segnaliamo che i nessi con lo studio dei sistemi a dinamica differenziata non sono così semplici come potrebbe apparire dall'accenno qui fatto al problema. Infatti, quando la dinamica

della componente veloce diventa paragonabile a quella della componente lenta (cosa che può accadere in prossimità delle biforcazioni) le transizioni catastrofiche possono aver luogo con un certo ritardo. Questo fenomeno, noto come *biforcazione dinamica*, può essere elegantemente ed efficacemente trattato per mezzo della cosiddetta "analisi non standard".

Numerosi sono i testi cui è possibile far riferimento qualora si intenda approfondire il tema delle biforcazioni. Tra quelli relativamente semplici possiamo ricordare Thompson e Stewart [1986] e Schuster [1988], mentre tra i più completi e rigorosi vanno citati Guckenheimer e Holmes [1983], Arnold et al. [1986] e Wiggins [1990]. Il lettore interessato ai risultati più recenti e alle applicazioni della teoria delle biforcazioni potrà utilmente consultare la rivista *International Journal of Bifurcation and Chaos*.

## RINGRAZIAMENTI

L'autore ringrazia i colleghi Yuri Kuznetsov, Massimo Miari e Carlo Piccardi per utili discussioni e suggerimenti. Il lavoro è stato svolto nel contesto del contratto di ricerca MURST 40% "Teoria dei sistemi e del controllo".

## RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

- V.I. Arnold, V.S. Afraimovich, Yu. S. Il'yashenko e L.P. Shi'l'nikov, "Bifurcation Theory" in *Dynamical Systems n. 5*, (D.V. Anosov, V.I. Arnold, Eds.), VINITI, Mosca (in russo), 1986.
- J. Guckenheimer e P. Holmes, *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Field*, Springer-Verlag (New York), 1983.
- H.G. Schuster, *Deterministic Chaos: an Introduction*, VCH, Weinheim, 1988.
- J.M.T. Thompson e H.B. Stewart, *Nonlinear Dynamics and Chaos*, John Wiley and Sons, 1986.
- S. Wiggins, *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos*, Springer-Verlag, 1990.

# **IL CAOS DETERMINISTICO**

*a cura di*

**Sergio Rinaldi**

**Dipartimento di Elettronica e Informazione, Politecnico di Milano**

# IL CAOS DETERMINISTICO

*Sergio Rinaldi*

Dipartimento di Elettronica e Informazione, Politecnico di Milano

## 1. INTRODUZIONE

Questo capitolo è dedicato al problema del caos deterministico che, come già detto nel primo capitolo, è dovuto all'esistenza degli strani attrattori, cioè alla possibilità che un sistema dinamico abbia un comportamento decisamente aperiodico ma confinato in una regione limitata dello spazio di stato. Questa possibilità, che per molti ha costituito una vera e propria sorpresa, era, in un certo senso, nota da tempo a tutti quelli che si occupavano di algoritmi di generazione di numeri casuali (rumore). Il punto saliente di tali algoritmi è, infatti, costituito da una relazione ricorrente che può essere interpretata come un vero e proprio sistema dinamico non lineare.

La presa di coscienza della possibilità che un sistema puramente deterministico evolva in modo apparentemente casuale è stata estremamente importante sul piano scientifico. Essa ha stimolato dei ripensamenti che hanno portato a numerose scoperte scientifiche, come, per citarne solo alcune, quella che le irregolarità del clima siano dovute alle leggi stesse del moto dei fluidi nell'atmosfera o che la dinamica apparentemente casuale delle epidemie sia il prodotto di leggi puramente deterministiche o, ancora, che certe variabilità delle grandezze cardiovascolari tra un battito cardiaco e il successivo siano conseguenza diretta di specifiche relazioni funzionali. Ma, più in generale, la scoperta del caos deterministico ha rivoluzionato l'atteggiamento dei ricercatori. Davanti ad un risultato sperimentale caratterizzato da certe regolarità, ad esempio l'andamento vagamente periodico di una grandezza rilevata in continua, l'atteggiamento prevalente era, fino a qualche anno fa, quello di spiegare con modelli deterministici tale regolarità e di incapsulare tutto il resto, cioè tutte le deviazioni dal regolare, in una componente esogena e casuale, chiamata *rumore*, eventualmente interpretabile formalmente, ma a posteriori, con modelli stocastici empiricamente tarati sui dati rilevati. Oggi, invece, si guarda alle deviazioni con interesse, non escludendo la possibilità che esse costituiscano una componente essenziale con cui il sistema si rivela all'osservatore. Ciò significa che nella fase della ricerca delle leggi di funzionamento di un sistema, tutta l'informazione contenuta nelle rilevazioni viene presa in considerazione nella speranza di poter dare un'interpretazione compatta agli esperimenti, basata su un unico modello completamente deterministico.

Da un punto di vista tecnico lo studio del caos deterministico è decisamente difficile. Dimostrare formalmente l'esistenza di uno strano attrattore in un sistema a tempo continuo è



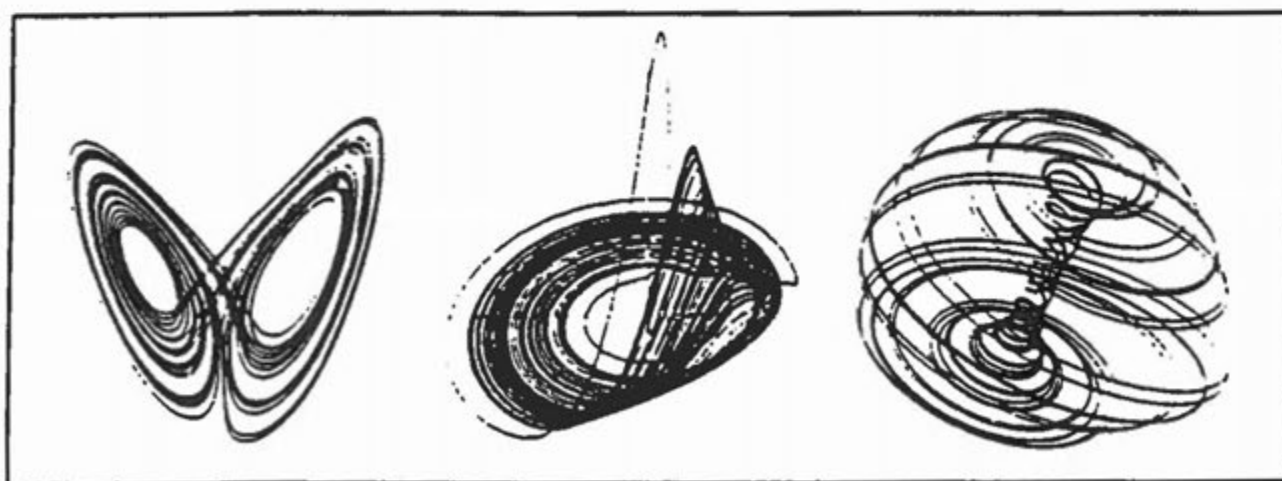
un'impresa decisamente ardua, finora compiuta solo su pochi casi, tra i quali è citabile quello, molto noto, dell'equazione di Lorenz. Per i sistemi a tempo discreto l'analisi è più semplice perché il caos può essere presente anche in sistemi del primo ordine. Ma anche in questi casi le dimostrazioni richiedono un notevole impegno e, pertanto, non verranno riportate nel seguito.

Relativamente semplice è, invece, constatare la presenza di caos deterministico attraverso simulazioni numeriche di un sistema dinamico. Per questo motivo inizieremo questa rassegna mostrando come il caos deterministico possa essere riconosciuto usando le forme più tradizionali di rappresentazione del comportamento di un sistema (serie temporale, spettro di potenza, quadro delle traiettorie, sezione di Poincaré). Indi caratterizzeremo in termini quantitativi i due aspetti principali del caos deterministico, cioè la sensibilità alle condizioni iniziali e la frattalità dello strano attrattore, per poi mostrare come un sistema a comportamento non caotico possa diventare gradualmente o bruscamente caotico attraverso una successione di biforcazioni locali o una sola biforcazione globale. Infine, faremo alcune osservazioni sulla possibilità di individuare il caos deterministico a partire dal rilevamento (in continua o campionato) di un'unica variabile (serie temporale monodimensionale).

## 2. COME APPARE IL CAOS

La rappresentazione più comune dell'evoluzione di un sistema dinamico è il quadro delle traiettorie. Poiché, nel caso specifico dei sistemi a tempo continuo, il caos deterministico non può esistere nei sistemi del primo e del secondo ordine, soltanto gli strani attrattori dei sistemi del terzo ordine possono essere rappresentati disegnando un tratto di traiettoria (sufficientemente lungo per essere rappresentativo) in uno spazio tridimensionale. Nel caso dei sistemi di ordine superiore al terzo, l'attrattore potrà, invece, essere rappresentato con un certo numero di proiezioni.

In *Fig. 1* sono riportati tre strani attrattori relativi a sistemi del terzo ordine.



**Fig. 1** - Strani attrattori di sistemi del terzo ordine

Le figure non riportano, per motivi di chiarezza, le traiettorie di avvicinamento verso l'attrattore che sono spesso molto contorte (così come il bacino di attrazione). Negli esempi mostrati è evidente che gli attrattori, non essendo dei cicli o dei tori, sono degli strani attrattori. Tuttavia, in altri casi (o quando si debba giudicare sulla base di proiezioni) può non essere semplice decidere per mezzo di un'ispezione di qualche figura se un attrattore è un toro o uno strano attrattore. In altre parole, non è sempre facile distinguere tra un comportamento quasi-periodico e un comportamento genuinamente caotico.

Questo è vero anche per i rilevamenti in continua di una variabile di stato o, più in generale, di una funzione dello stato  $y(t) = \eta(\mathbf{x}(t))$ . La Fig. 2 mostra un esempio di questo tipo, ottenuto integrando le equazioni di Duffing

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\alpha x_1^3 - \beta x_2 + \gamma \sin x_3 \\ \dot{x}_3 &= 1\end{aligned}\quad (1)$$

che descrivono il moto di un oscillatore meccanico costituito da una massa cui è applicata una forza di tipo sinusoidale, nell'ipotesi che la massa sia soggetta ad attrito viscoso e a una forza di richiamo di tipo cubico.

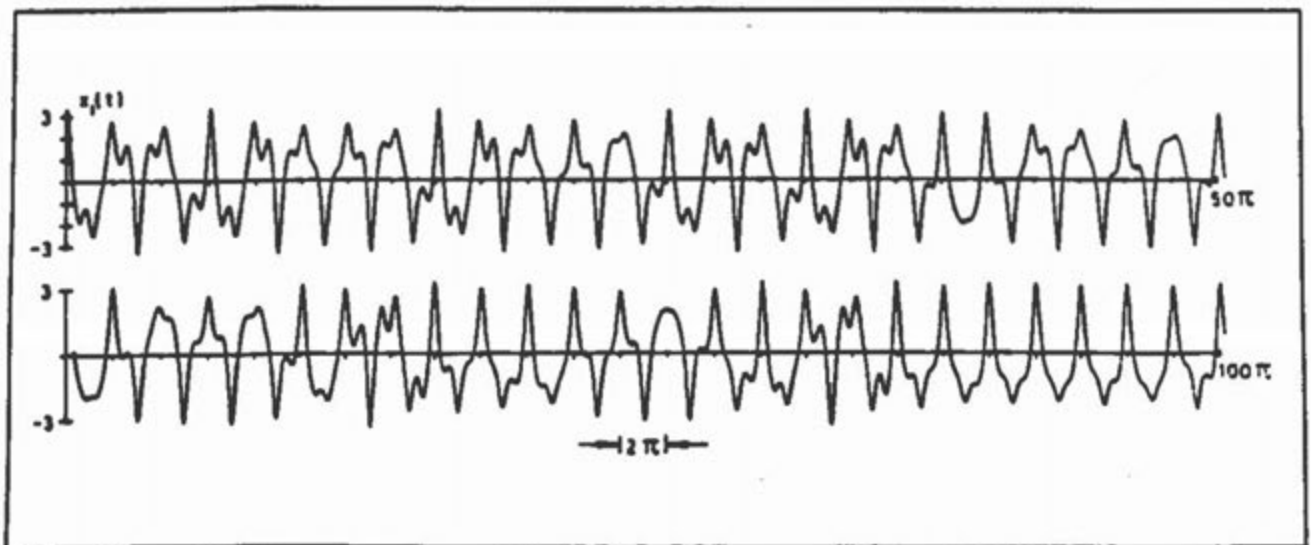


Fig. 2 - Andamento della variabile  $x_1$  del sistema (1) per  $\alpha = 1$ ,  $\beta = 0.05$ ,  $\gamma = 7.5$

L'andamento della posizione  $x_1$  della massa, mostrato in figura per un periodo di tempo pari a 50 cicli della forzante, non è periodico, ma è difficile poter affermare che non sia quasi-periodico.

Questa conclusione è, invece, molto più semplice da trarre se si dispone di una rappresentazione dell'attrattore su una sezione di Poincaré. In questo caso la sezione di Poincaré più spontanea da considerare è la sezione  $x_3 = 0 \pmod{2\pi}$ , cioè il piano  $(x_1, x_2)$  negli istanti di tempo  $x_3 = 0, 2\pi, 4\pi, \dots$ . Su questa sezione ogni punto dell'attrattore è un



campionamento di posizione e velocità della massa, eseguito all'istante in cui è massima la forza applicata. Un comportamento quasi-periodico dell'oscillatore (1) sarebbe rivelato, su questa sezione, da una linea chiusa e regolare (sezione di un toro nello spazio tridimensionale). La Fig. 3 mostra, pertanto, chiaramente che l'attrattore (noto come *attrattore di Ueda*) è caotico.

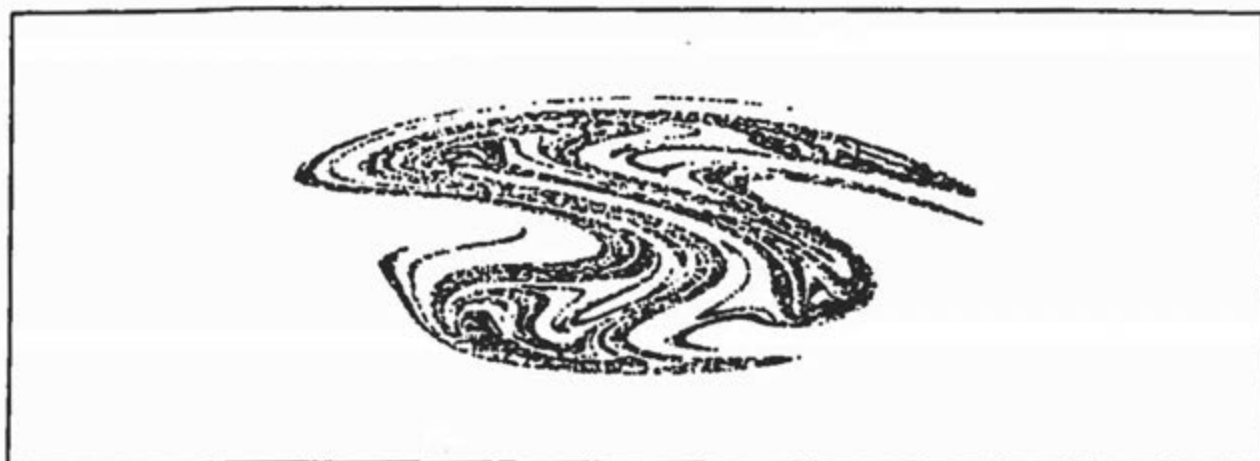


Fig. 3 - Strano attrattore del sistema (1) sulla sezione di Poincaré  $x_3 = 0 \pmod{2\pi}$  per valori opportuni dei parametri  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$

Un quarto modo di rappresentare uno strano attrattore, particolarmente efficace in certi contesti applicativi, è quello di mostrarne lo spettro di potenza. Anche in questo caso è in linea di principio facile distinguere uno strano attrattore da un ciclo o da un toro perché cicli e tori hanno spettri a righe, mentre uno strano attrattore ha uno spettro continuo (eventualmente sovrapposto ad uno spettro a righe). La Fig. 4 mostra gli spettri di potenza rilevati su un fluido in moto contenuto tra due cilindri coassiali rotanti (esperimento di Couette). Le figure fanno riferimento a tre diverse velocità relative di rotazione. Nel primo caso il moto del fluido è periodico, nel secondo quasi-periodico e nel terzo caotico.

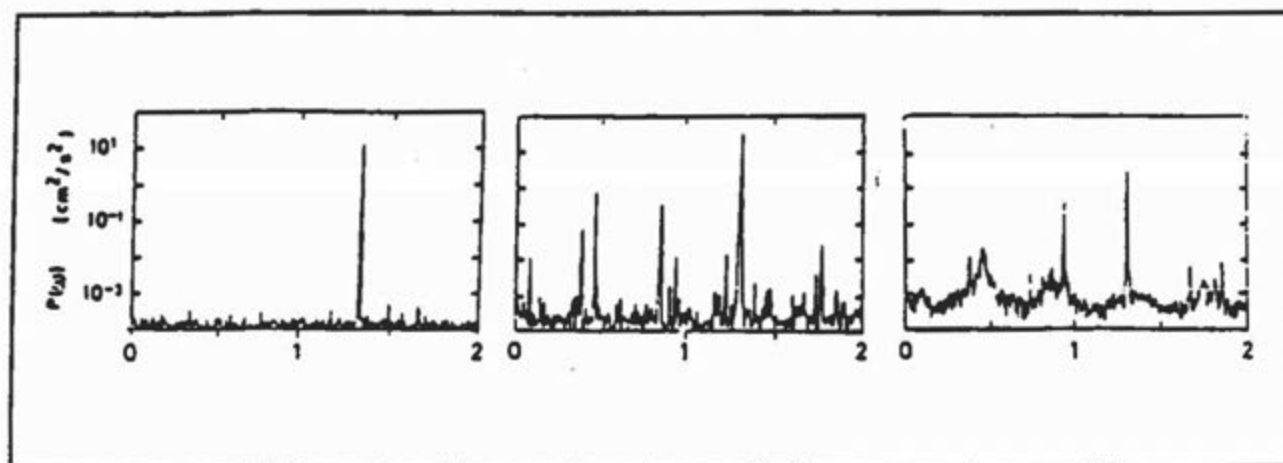


Fig. 4 - Spettri di potenza  $P(\omega)$  rilevati sperimentalmente su un fluido in moto (esperimento di Couette)

Naturalmente, quando la componente continua dello spettro non è molto consistente, può sorgere il dubbio che essa sia dovuta al rumore di fondo associato alla strumentazione piuttosto che a una debole caoticità dell'attrattore.

### 3. SENSIBILITÀ ALLE CONDIZIONI INIZIALI

Dato un attrattore  $A$ , le traiettorie che partono da punti del suo bacino di attrazione  $B(A)$  convergono asintoticamente verso  $A$ . Questo non significa, a priori, che due traiettorie che partono da punti vicini di  $B(A)$  non possano divergere tra loro, tendendo, quindi, verso  $A$  in modo diverso. Ciò può accadere anche nel caso degli equilibri. Ad esempio, nella seconda figura del primo capitolo le traiettorie che partono da parti opposte della traiettoria che tende verso  $NS$  dall'esterno, si sviluppano inizialmente in modo simile ma poi, avvicinandosi a  $NS$  divergono per poi tendere, comunque, verso il punto  $NS$ , che è, infatti, un attrattore. Ma, in generale, se l'equilibrio è iperbolico ciò non può accadere, perché nell'intorno dell'equilibrio lo spazio di stato può essere scomposto in somma di sottospazi individuati dagli autovettori (eventualmente generalizzati) dello Jacobiano. Ognuno di questi autovettori è associato ad un particolare autovalore  $\lambda_i$  che descrive la velocità con cui la traiettoria tende verso l'equilibrio nella direzione dell'autovettore. Inoltre, se la condizione iniziale è generica, sui tempi lunghi la traiettoria si allinea con l'autovettore dominante dello Jacobiano, cioè con l'autovettore associato all'autovalore con massima parte reale. In altre parole, la convergenza verso l'equilibrio avviene con la più lenta legge esponenziale  $e^{Lt}$  messa a disposizione dallo Jacobiano. Ciò significa che l'autovalore dominante  $L$  potrebbe essere calcolato lasciando evolvere il sistema da un punto  $\mathbf{x}(0)$  del bacino di attrazione verso  $\bar{\mathbf{x}}$  e determinando la legge esponenziale secondo cui  $\|\delta \mathbf{x}(t)\| = \|\mathbf{x}(t) - \bar{\mathbf{x}}\|$  tende a zero, cioè

$$L = \inf \lambda : \|\delta \mathbf{x}(t)\| \leq M e^{\lambda t} \quad (2)$$

Quando è calcolato in questo modo, l'autovalore dominante  $L$  si chiama *esponente di Liapunov* (a rigore esponente di Liapunov dominante). Naturalmente, se  $\mathbf{x}(0)$  è un punto di una delle traiettorie corrispondenti ad uno degli autovettori non dominanti, la (2) individua uno degli autovalori non dominanti dello Jacobiano (cioè uno degli altri  $(n-1)$  esponenti di Liapunov).

Quanto detto vale anche per i cicli e i tori per i quali, tuttavia, la (2) fornisce, in generale,  $L=0$ . Il motivo per questa apparente anomalia è spiegato in Fig. 5.



Fig. 5 - L'esponente di Liapunov (2) di un ciclo asintoticamente stabile (a) e di un toro asintoticamente stabile (b) è nullo

Traiettorie che partono da punti vicini ma distinti (punti 1 e 2 in figura) tendono verso l'attrattore ma restano, per sempre, a una certa distanza tra loro (punti 1' e 2' in figura) per cui la (2) fornisce  $L=0$ . Gli altri  $(n-1)$  esponenti di Liapunov, calcolati con la (2) per opportune condizioni iniziali, sono negativi se il ciclo è iperbolico. Nel caso del toro, invece, anche il secondo esponente di Liapunov è nullo (si pensi a coppie di punti 1 e 2 sulla superficie del toro e ai corrispondenti punti 1' e 2') e i rimanenti  $n-2$  esponenti sono negativi se l'attrattore a toro è iperbolico.

Nel caso di uno strano attrattore le traiettorie divergono tra loro, per cui l'esponente di Liapunov non può essere negativo. In certi casi la divergenza è più debole di una qualsiasi legge esponenziale, per cui  $L=0$ . In questi casi è lecito parlare di caoticità debole (o non iperbolica). Negli altri casi, invece  $L > 0$  e la caoticità è forte: in media, le traiettorie divergono secondo una legge esponenziale  $e^{Lt}$ . Poiché lo strano attrattore è individuato da una traiettoria (proprietà di indecomponibilità) esso ha uno degli esponenti di Liapunov uguale a zero (si pensi a perturbazioni lungo la traiettoria). D'altra parte, poiché lo strano attrattore è pur sempre un attrattore, è necessario che almeno uno dei rimanenti  $n-2$  esponenti di Liapunov sia negativo (o per lo meno non positivo).

L'esponente di Liapunov è una misura dello *stretching*, cioè di uno dei due meccanismi alla base del caos deterministico, l'altro essendo il meccanismo complementare, il *folding*, che è capace di "ripiegare" le traiettorie mantenendole al finito malgrado la loro tendenza alla divergenza. Numerosi sono gli algoritmi utilizzabili per il calcolo dell'esponente di Liapunov. Molti di essi sono basati su una semplice, ma accurata, integrazione delle equazioni di stato, mentre altri sono basati sull'elaborazione di un'unica serie temporale. Le esperienze, peraltro numerose, di calcolo di esponenti di Liapunov per la caratterizzazione del caos deterministico hanno permesso di constatare, dopo i primi entusiasmi, che il problema non è semplice per almeno tre motivi. Innanzitutto, il caos deterministico è spesso relativamente debole, così che  $L$  è spesso molto piccolo, per cui è necessaria una grande precisione di calcolo per poter

discriminare tra regime caotico e regime quasi-periodico. In secondo luogo, l'aggiunta di un rumore puramente casuale  $\varepsilon(t)$  (o di un rumore generato per mezzo di un sistema dinamico a regime caotico) ad un vettore di stato  $x(t)$  di un sistema in regime caotico, rende difficile la stima dell'esponente di Liapunov a partire dal segnale  $x(t)+\varepsilon(t)$ . Infine, poiché uno strano attrattore  $A(p)$  può variare in modo discontinuo (o comunque molto consistente) con il parametro  $p$ , ne segue che anche  $L(p)$  può essere molto sensibile a  $p$  e ciò non aiuta naturalmente né il calcolo né l'interpretazione dei risultati, in particolare di quelli sperimentali in cui i parametri sono a volte difficili da controllare.

#### 4. GEOMETRIA FRATTALE DEGLI STRANI ATTRATTORI

Gli strani attrattori, non essendo equilibri, cicli o tori, non sono enti geometrici a dimensione intera come punti, linee o superfici di uno spazio vettoriale. Essi hanno dimensione frazionaria e sono, pertanto, chiamati *frattali*.

I più semplici esempi di insiemi frattali sono i notissimi *insiemi di Cantor* di cui in Fig 6 sono mostrati due esempi elementari, o meglio, i primi tre elementi di due successioni di insiemi che hanno come limite un insieme di Cantor.

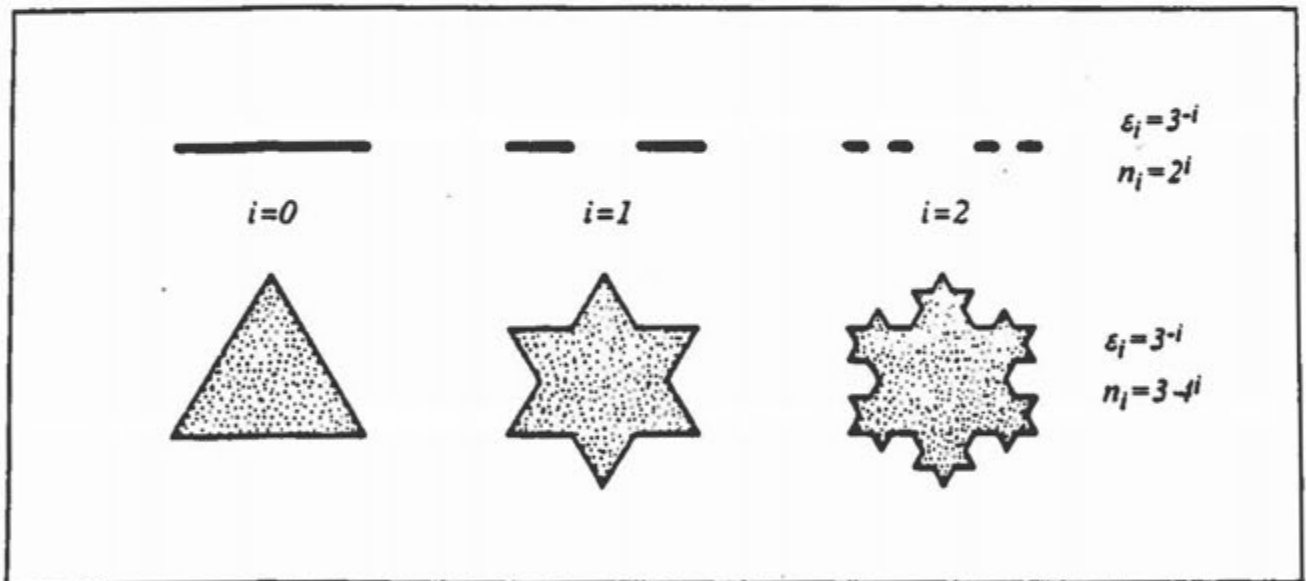


Fig. 6 - Due successioni di insiemi il cui limite è un insieme di Cantor

Nel primo caso si parte da un segmento, diciamo di lunghezza unitaria, lo si divide in tre parti uguali e si scarta quella centrale. Indi, si ripete la stessa operazione sui segmenti rimanenti e così si procede indefinitamente. Indicati con l'indice  $i=0, 1, 2, \dots$  gli insiemi della successione così costruita, si può notare che la lunghezza  $\varepsilon_i$  dei segmenti dell' $i$ -esimo insieme è  $\varepsilon_i = 3^{-i}$  e che il corrispondente numero di segmenti  $n_i$  che costituiscono l'insieme è  $n_i = 2^i$ . Nel secondo caso si parte, invece, da un triangolo equilatero e si divide ogni lato in tre parti uguali scartando quella centrale e sostituendola con due nuovi segmenti disposti in modo simmetrico

e così si continua indefinitamente. In questo caso, partendo da un triangolo di lato unitario, si ha  $\varepsilon_i = 3^{-i}$  e  $n_i = 3 \cdot 4^i$ .

Evidentemente, in entrambi i casi il numero  $n_i$  di segmenti cresce con  $i$ . Ma il prodotto  $n_i \varepsilon_i$  dei due numeri non è pari ad uno, come quando si divide sempre più fittamente un segmento unitario in tante parti uguali senza scartarne alcuna. Tuttavia, a mano a mano che ci si avvicina al limite della successione di insiemi è sempre più vero che  $n_i \varepsilon_i^d = 1$  con  $d$  positivo ma non intero. Questo numero  $d$ , caratterizzante il limite della successione e, quindi, l'insieme di Cantor, si chiama dimensione dell'insieme frattale o, più brevemente, *dimensione frattale*. Nei due casi di Fig. 6 si ha, rispettivamente,

$$d = \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{\log n_i}{-\log \varepsilon_i} = \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{i \log 2}{i \log 3} = \frac{\log 2}{\log 3} = 0.63$$

$$d = \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{\log n_i}{-\log \varepsilon_i} = \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{\log 3 + i \log 4}{i \log 3} = \frac{\log 4}{\log 3} = 1.26$$

Il primo insieme di Cantor ha, quindi, dimensione intermedia tra quella di un punto e quella di una linea, mentre il secondo ha dimensione superiore a quella di una linea ma inferiore a quella di una superficie (si noti che il secondo insieme di Cantor, che ha, ovviamente, area finita, ha perimetro infinito, dato che  $\lim n_i \varepsilon_i = \infty$ ). Per determinare la dimensione frattale di uno strano attrattore  $A$  sono disponibili diversi algoritmi che spesso si basano sul calcolo del numero  $n(\varepsilon)$  di "tasselli" (segmenti, quadrati...) di dimensione  $\varepsilon$  necessari per coprire l'attrattore  $A$ . Poiché per  $\varepsilon \rightarrow 0$  si ha  $n(\varepsilon) \cdot \varepsilon^d = \text{costante}$ , ne consegue che  $d$  è facilmente determinabile riportando in scala doppio logaritmica alcune coppie di punti  $(\varepsilon, n(\varepsilon))$  con  $\varepsilon$  sufficientemente piccolo.

La proprietà più interessante degli insiemi frattali è quella nota come *autosomiglianza*, cioè il fatto che l'insieme appaia simile a se stesso facendo degli ingrandimenti a qualsiasi scala. Questa proprietà è facile da verificare qualitativamente su numerose immagini (nuvole, alberi, coralli, coste, ...) ma anche sugli strani attrattori, come mostrato in Fig. 7 per un sistema a tempo discreto del secondo ordine (attrattore di Hénon).

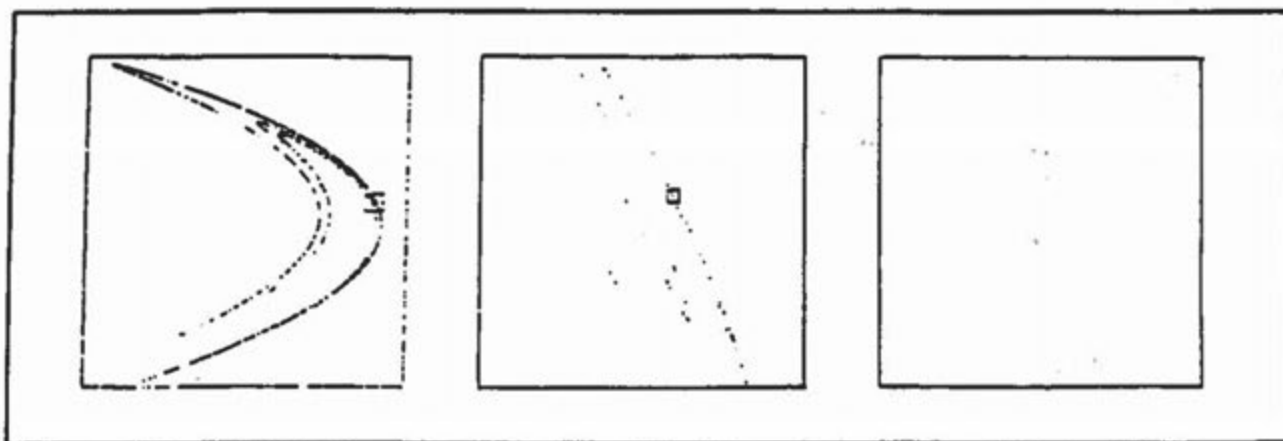


Fig. 7 - Due ingrandimenti successivi di uno strano attrattore di sistema a tempo discreto del secondo ordine (mappa di Hénon)

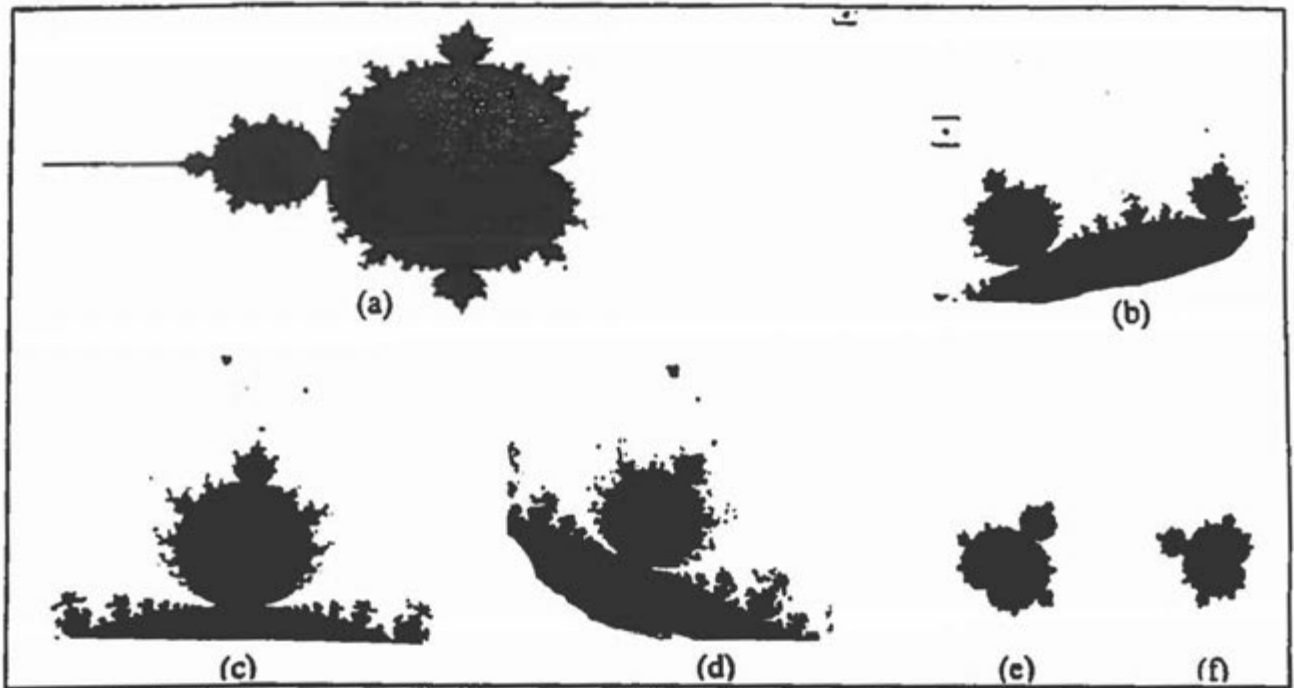


L'insieme frattale certamente più noto è quello di *Mandelbrot*, mostrato in *Fig. 8* insieme a un suo ingrandimento. Esso rappresenta la regione nello spazio dei parametri  $a$  e  $b$  per cui il movimento libero del sistema a tempo discreto

$$x_1(t+1) = x_1^2(t) - x_2^2(t) + a$$

$$x_2(t+1) = 2x_1(t)x_2(t) + b$$

è limitato.



**Fig. 8** - L'insieme di Mandelbrot (a) e alcuni suoi ingrandimenti (b), (c), (d), (e), (f) (gli ultimi due sono ingrandimenti di (b))

E' facile constatare che il sistema di Mandelbrot non ammette strani attrattori. Ciò mostra che gli insiemi frattali possono essere di interesse in contesto di dinamica dei sistemi anche in assenza di caos deterministico. Infatti, sia alcune linee di biforcazione nello spazio dei parametri, che le frontiere di alcuni bacini di attrazione possono avere natura frattale, senza che siano coinvolti degli strani attrattori.

La dimensione di un insieme frattale è a volte legata a delle proprietà fisicamente interessanti dell'insieme stesso. Ad esempio, la resistenza di un materiale poroso a sollecitazioni di qualsiasi frequenza, è legata alla presenza di cavità di tutte le dimensioni, cioè ad una marcata frattalità. Per questo motivo alcune degenerazioni del tessuto osseo, sono legate, in ultima analisi, ad una perdita di frattalità. Oppure, su scala diversa, la frattalità di un ambiente marino è certamente legata alla diversità del corrispondente ecosistema dato che ogni individuo di ogni specie deve poter trovare una nicchia di forma e dimensioni opportune per poter sopravvivere.

## 5. BIFORCAZIONI E CAOS

Come già detto più volte, un sistema a comportamento periodico o quasi-periodico può diventare caotico per una variazione dei suoi parametri. Questa transizione è pertanto caratterizzata da delle biforcazioni. Le più frequenti di queste transizioni da regime regolare a regime caotico sono note come *strade verso il caos*. Sulla base di quanto oggi noto, esse possono essere catalogate in due grandi classi.

La prima, nota come *cascata di Feigenbaum*, è una sequenza di infinite biforcazioni locali, più precisamente di flip. Un ciclo attrattore raddoppia di periodo per valori successivi del parametro, diciamo  $p_1, p_2, p_3, \dots$ . Tali valori di biforcazione si accumulano su un valore  $p_\infty$  al di là del quale il comportamento del sistema diventa caotico. La transizione al caos avviene, quindi, per  $p = p_\infty$  ma è, tuttavia, preannunciata da una sequenza (cascata) di biforcazioni. La Fig. 9 illustra la cascata di Feigenbaum per il più semplice sistema su cui essa è stata studiata. Tale sistema è a tempo discreto e del primo ordine ed è descritto dall'equazione di stato

$$x(t+1) = r x(t) (1-x(t)) \quad (3)$$

A causa dell'analogia con il modello della crescita logistica (modello di Verhulst)  $\dot{x}(t) = r x(t)(1-x(t))$ , la (3) è spesso chiamata *mappa logistica*. E', tuttavia, opportuno notare che l'analogia è solo apparente, dato che il sistema (3) non è reversibile (ad un valore di  $x(t+1)$  corrispondono, in generale, due valori di  $x(t)$ ), mentre ogni sistema a tempo continuo è reversibile.

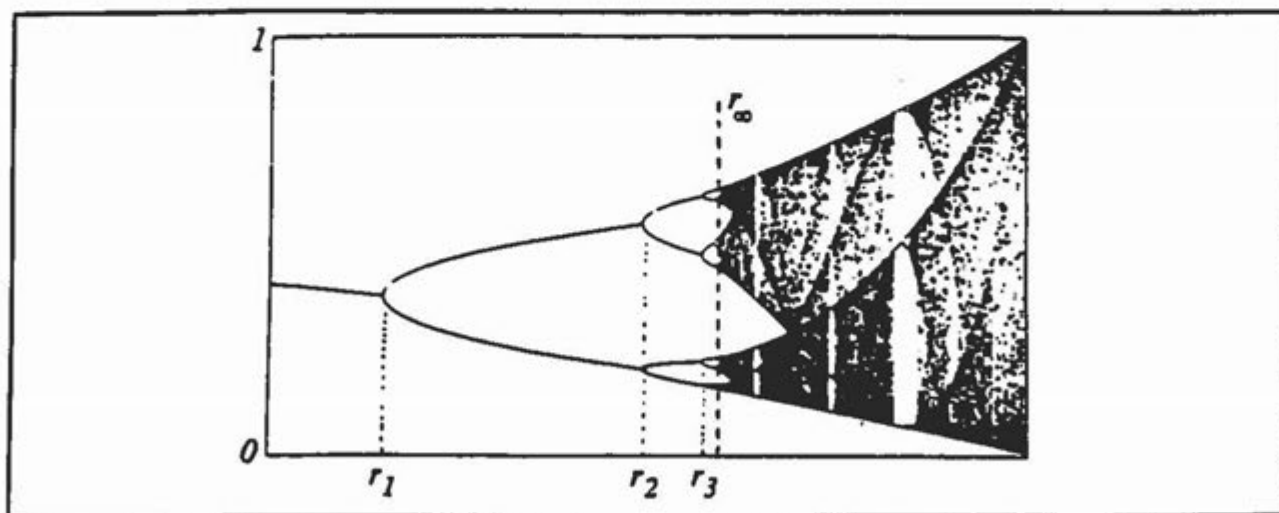


Fig. 9 - Cascata di Feigenbaum per la mappa logistica (3)

La mappa logistica con  $0 \leq r \leq 4$  trasforma l'intervallo unitario in sé. Per  $0 \leq r \leq r_1 (=3)$  il sistema (3) ammette come unico attrattore un equilibrio. Per  $r = r_1$  tale equilibrio perde stabilità e diventa successivamente instabile (per questo motivo esso non è riportato in Fig. 9). Contemporaneamente per  $r = r_1$  nasce un ciclo di periodo 2 che è asintoticamente stabile per



$r_1 < r < r_2$ . I due valori  $x'$  e  $x''$  dello stato caratterizzanti il ciclo sono leggibili in Fig. 9. Per  $r = r_1$  abbiamo quindi un raddoppio di periodo. Il fenomeno si ripete per  $r = r_2$ , dove il ciclo di periodo 2 perde stabilità ed è sostituito da un nuovo ciclo stabile di periodo 4. E così si continua con una successione  $r_1, r_2, r_3, \dots$  di biforcazioni che converge a  $r_\infty = 3,5699456\dots$  dove l'attrattore perde la sua periodicità e diventa caotico. La convergenza di  $r_n$  a  $r_\infty$  è rapida, perché è descritta (per alti valori di  $n$ ) da un sistema lineare a tempo discreto

$$(r_\infty - r_{n+1}) = \frac{1}{\delta}(r_\infty - r_n)$$

con autovalore  $1/\delta$  molto piccolo, dato che

$$\delta = 4.6692016\dots$$

Ciò che giustifica l'interesse per questo risultato è che si può dimostrare che il diagramma di Fig. 9 vale per una classe molto vasta di mappe (grosso modo, quelle unimodali con massimo di tipo quadratico) e che per tutte queste mappe la cascata di Feigenbaum è descritta dalla stessa legge (4) con la stessa costante  $\delta$ , che è, quindi, una costante universale, detta *costante di Feigenbaum*.

L'universalità della legge di Feigenbaum non si arresta alle mappe monodimensionali. Numerosi sono, infatti, i sistemi dinamici a tempo continuo in cui il fenomeno è stato osservato sperimentalmente o numericamente. Un esempio è riportato in Fig. 10 per il sistema di Rössler

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -x_2 - x_3 \\ \dot{x}_2 &= -x_1 + ax_2 \\ \dot{x}_3 &= -cx_3 + x_1x_3 + b\end{aligned}$$

che descrive una reazione chimica.

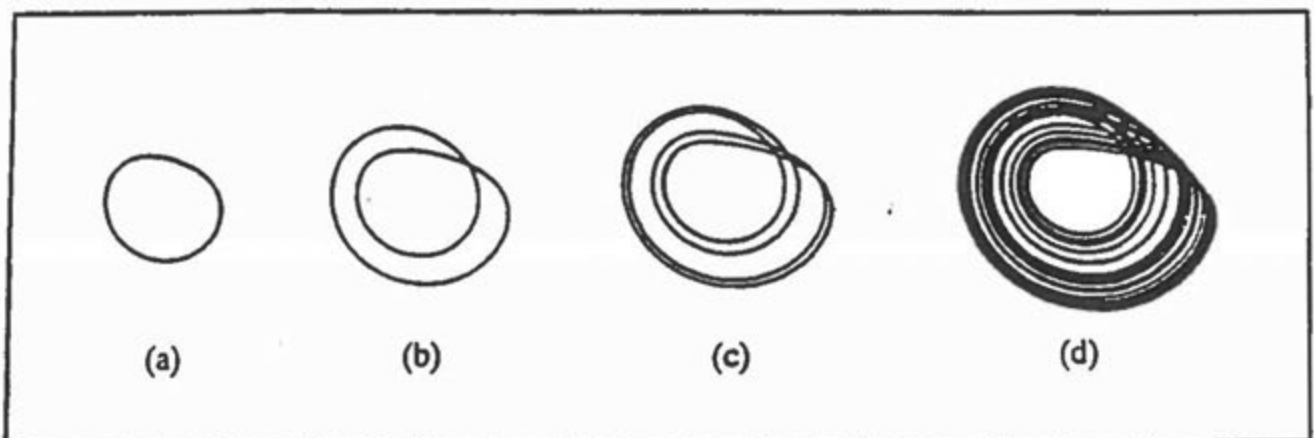


Fig. 10 - Proiezioni nel piano  $(x_1, x_2)$  dell'attrattore del sistema di Rössler per  $a = b = 0.2$  al variare del parametro  $c$ : (a) soluzione di periodo 1 ( $c=2.5$ ); (b) soluzione di periodo 2 ( $c=3.5$ ); (c) soluzione di periodo 4 ( $c=4$ ); (d) strano attrattore ( $c=5$ )

Il motivo per cui è plausibile aspettarsi cascate alla Feigenbaum in sistemi a tempo continuo  $\dot{x} = f(x)$ , è illustrato in Fig. 11 per un sistema del terzo ordine.

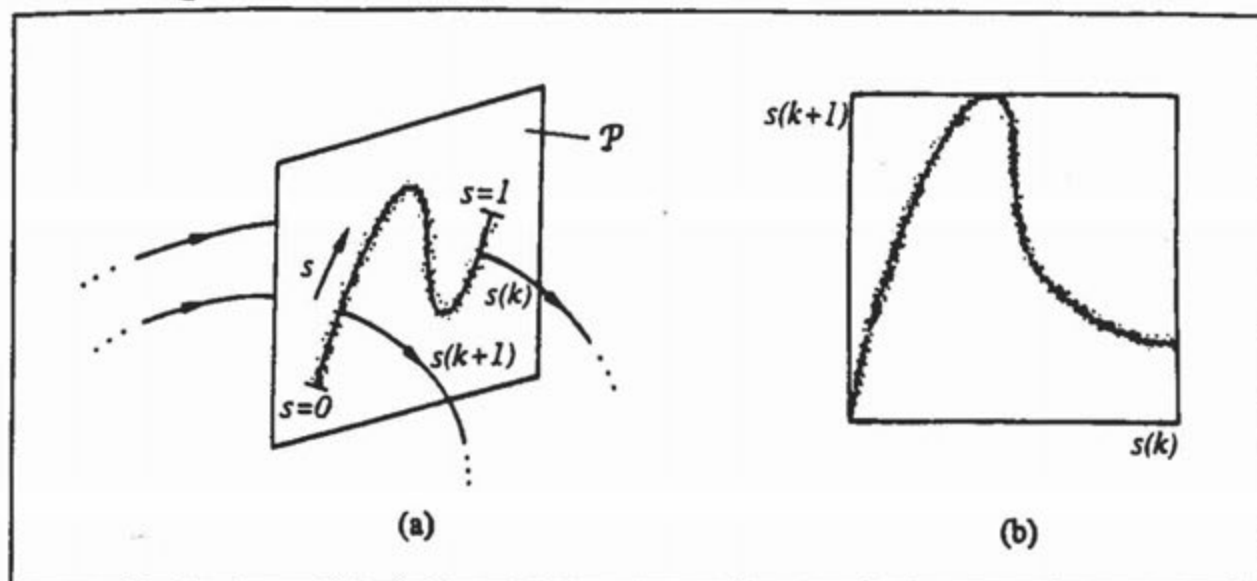


Fig. 11 - Sezione di Poincaré (a) e corrispondente mappa monodimensionale (b)

Se il sistema, per un certo valore dei parametri, è in regime caotico, sulla sezione di Poincaré  $\mathcal{P}$  apparirà uno strano attrattore di dimensione non intera. Tuttavia, se la dimensione è quasi intera, l'attrattore sarà grosso modo disposto lungo una linea come mostrato in Fig. 11a. E' allora possibile coordinatizzare tale linea con una variabile  $s$ , indicando con  $s=0$  e  $s=1$  i suoi due estremi. La mappa di Poincaré che, a rigore, è bidimensionale, risulta così approssimata da una mappa monodimensionale

$$s(k+1) = g(s(k)) \quad k = \text{intero}$$

definita sull'intervallo unitario. Se tale mappa risulta unimodale, come ipotizzato in Fig. 11b, ne consegue che la dinamica del sistema è bene approssimata da un sistema a tempo discreto per cui vale la legge di Feigenbaum. Non c'è, pertanto, da stupirsi se il sistema a tempo continuo  $\dot{x} = f(x)$  transiti da regime regolare a regime caotico attraverso una cascata di flip.

La seconda strada verso il caos è radicalmente diversa da quella di Feigenbaum. La transizione da regime regolare a regime caotico non è, infatti, preannunciata da una successione di biforcazioni, ma bensì concentrata in una sola biforcazione, che è però di tipo globale. La transizione al caos è, pertanto, marcata da collisioni di varietà stabili e instabili di selle e presenta caratteristiche diverse, a seconda che le selle siano una (*caos omoclino*) o due (*caos eteroclino*).

L'esempio più semplice di caos omoclino è quello di un sistema del terzo ordine in cui variando i parametri in modo opportuno si ha una collisione della varietà instabile con quella stabile di un equilibrio fuoco-sella con valore di sella positivo (vedi Fig. 16b del capitolo precedente). Il risultato è uno strano attrattore simile al secondo attrattore mostrato in Fig. 1 la

cui geometria "ricorda" quella dell'omoclina. Questo tipo di caos è spesso denominato caos alla Shil'nikov (vedi capitolo precedente).

Un secondo esempio di caos omoclino, che si verifica in numerosi sistemi dinamici, è quello in cui il passaggio al caos avviene a partire da un regime quasi-periodico. Anche qui, la biforcazione associata alla transizione al caos è una omoclina, ma questa volta la sella è un ciclo, anziché un equilibrio. In altre parole, il caos appare dopo che le varietà stabile e instabile di un ciclo sella sono entrate in collisione. La Fig. 12 mostra, sulla sezione di Poincaré, il caso di un sistema del terzo ordine, in cui un ciclo sella di periodo 3 (punti  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ) subisce una biforcazione omoclina (vedi Fig. 12b).

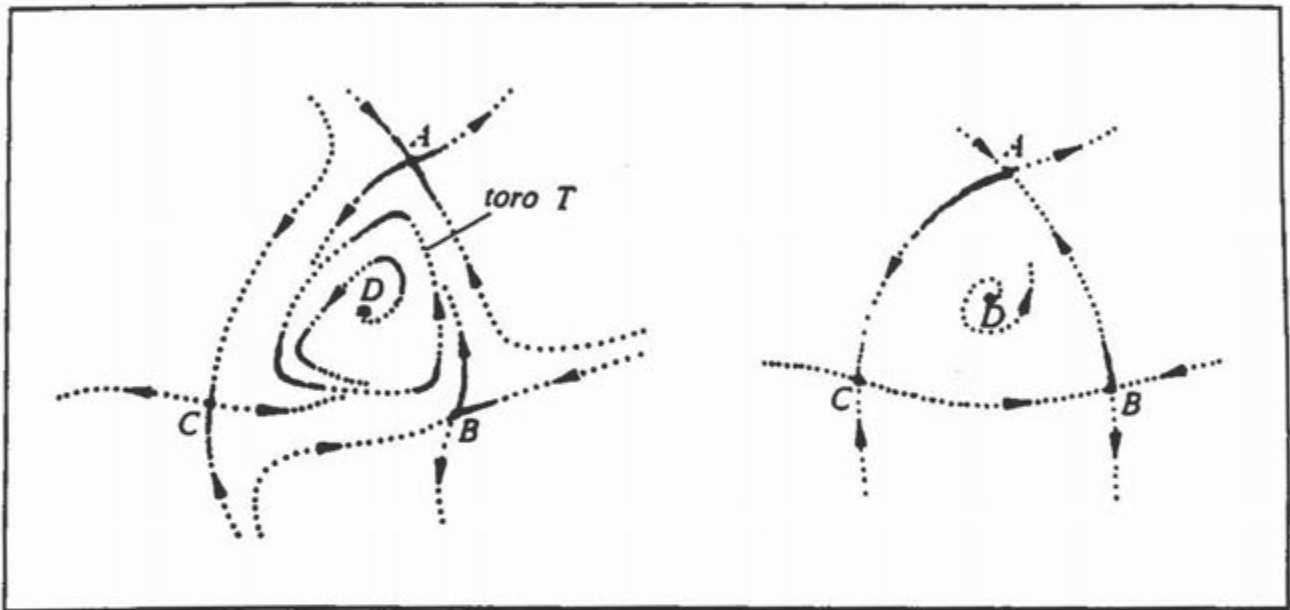


Fig. 12 - Transizione al caos con distruzione di toro: (a) prima della biforcazione; (b) biforcazione

La figura mostra che prima della biforcazione esiste un toro  $T$  che viene raggiunto sia dall'interno (il punto  $D$  rappresenta un ciclo instabile) che dall'esterno e che, pertanto, è un attrattore. Avvicinandosi alla biforcazione omoclina, i punti  $A$ ,  $B$ ,  $C$  si avvicinano al toro che, quindi, assume sempre più la forma di un triangolo curvilineo. La biforcazione omoclina è, quindi, caratterizzata anche dal contatto del ciclo di periodo 3 con la superficie del toro. Poiché, dopo questo contatto, il toro si infrange e si trasforma in uno strano attrattore, questa transizione al caos è spesso chiamata *distruzione di toro*. Naturalmente, lo strano attrattore nato per distruzione di toro assomiglia inizialmente al toro che lo ha generato, ma poi si deforma, in particolare, in prossimità dei punti in cui è entrato in contatto con il ciclo-sella. La Fig. 13 mostra, a puro titolo di esempio, come si deforma per incrementi successivi del parametro, uno strano attrattore nato per distruzione di toro.

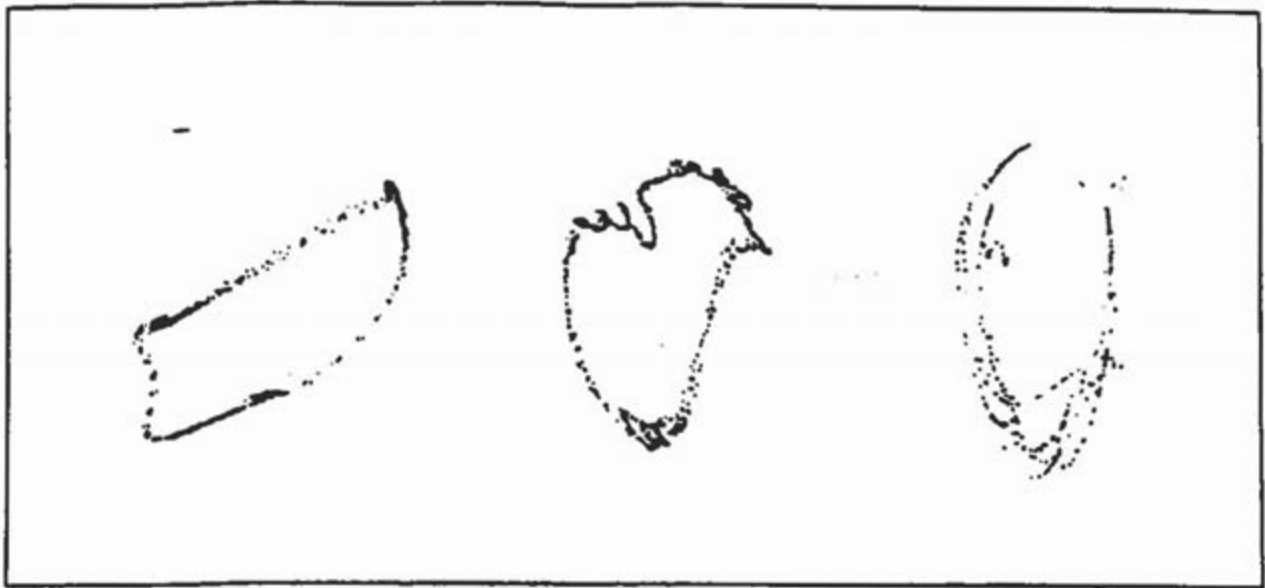


Fig. 13 - Deformazioni successive di uno strano attrattore nato per distruzione di toro

Chiudiamo questa breve rassegna con un esempio di caos eteroclinico, facendo riferimento al notissimo sistema di Lorenz

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -\sigma x_1 + \sigma x_2 \\ \dot{x}_2 &= r x_1 - x_2 - x_1 x_3 \\ \dot{x}_3 &= -\frac{8}{3} x_3 + x_1 x_2\end{aligned}$$

in cui le tre variabili di stato rappresentano le ampiezze delle armoniche dello sviluppo in serie di Fourier delle equazioni del moto di un fluido riscaldato e  $\sigma$  e  $r$  sono parametri legati alla viscosità e al gradiente termico. Per  $\sigma = 10$  (valore tipico) e  $r < 1$  il fluido è fermo (regime *conduttivo*), cioè l'equilibrio  $x_1 = x_2 = x_3 = 0$  è asintoticamente stabile. Per  $r = r_1 (= 1)$  tale equilibrio perde stabilità (biforcazione forcone) e diventa instabile (sella) per  $r > r_1$ . Contemporaneamente nascono due nodi stabili (si noti la simmetria del sistema) che interpretano la nascita del regime *convettivo* all'interno del fluido. All'aumentare di  $r$  tali nodi si trasformano in fuochi e restano stabili fino a  $r = r_4 (= 24.73)$  (biforcazione di Hopf subcritica). Per  $r = r_2 (= 13.92)$  si ha una biforcazione omoclina della sella (più precisamente, una doppia omoclina a causa della simmetria). Poiché il corrispondente valore di sella è positivo, per la teoria di Shil'nikov esposta nel capitolo precedente, nascono per  $r > r_2$  due cicli sella. Questa situazione descrive il regime preturbolento del fluido, caratterizzato da due attrattori simmetrici (fuochi) con bacini di attrazione molto intricati: partendo da un punto generico  $x(0)$  vicino alla sella si ottiene una traiettoria che spirala inizialmente intorno ad uno dei due cicli sella per poi allontanarsene e spiralarne intorno all'altro ciclo sella e così continuare alternando tra i cicli per un certo numero di volte prima di convergere verso uno dei due fuochi stabili. Dal punto di vista sia sperimentale che numerico, questo comportamento è difficilmente

distinguibile da un vero comportamento caotico che, per definizione, rimane irregolare anche asintoticamente (vedi Fig. 14).

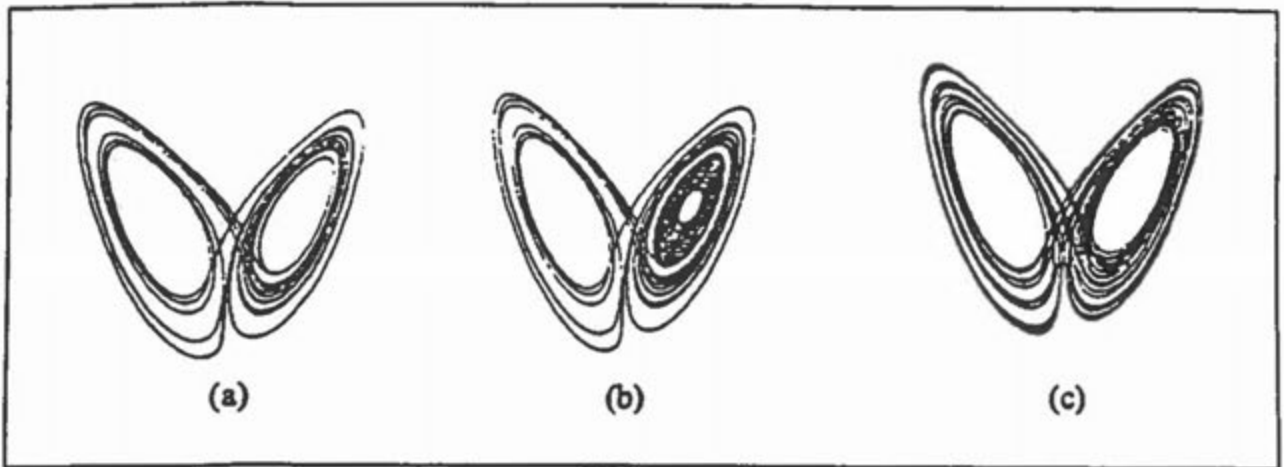


Fig. 14 - Tre traiettorie del sistema di Lorenz corrispondenti alle stesse condizioni iniziali: (a) regime preturbolento ( $r=22$ ) per un periodo di tempo  $T=18$ ; (b) come in (a) ma per un periodo di tempo maggiore ( $T=45$ ) per evidenziare la convergenza verso uno dei due fuochi stabili; (c) regime turbolento ( $r=25$ ) per un periodo di tempo  $T=45$

Il regime preturbolento diventa *turbolento*, cioè rigorosamente caotico per  $r=r_3(=24.06)$  in corrispondenza di una biforcazione eteroclina corrispondente alla collisione della varietà instabile (monodimensionale) dell'equilibrio sella con la varietà stabile (bidimensionale) dei cicli sella. Nasce così uno strano attrattore, detto *attrattore di Lorenz*, di cui è mostrato un esempio in Fig. 14 c. Per  $r_3 < r < r_4$  esistono quindi due possibili regimi, il regime convettivo e quello turbolento, mentre per  $r > r_4$  rimane soltanto il regime turbolento dato che quello convettivo sparisce, come già detto, per biforcazione di Hopf subcritica. Quanto detto è riassunto schematicamente in Fig. 15.

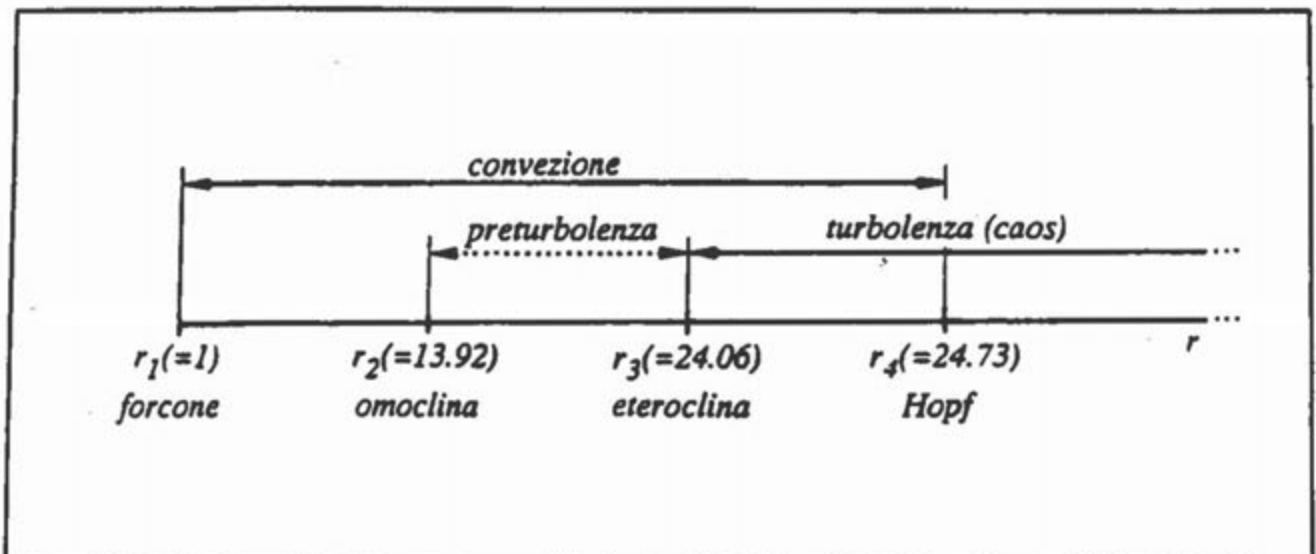


Fig. 15 - Sequenza di biforcazioni del sistema di Lorenz e corrispondenti regimi del fluido



Infine, vale la pena notare che per valori di  $r$  molto elevati (anzi, così elevati da non avere significato fisico) lo strano attrattore sparisce per cascata (inversa) di Feigenbaum.

## 6. RICOSTRUZIONE DI ATTRATTORI DA SERIE TEMPORALI

Spesso un fenomeno viene osservato rilevando in continua (o campionando) una sola variabile, d'ora in avanti indicata con  $y$ . Immaginando che tale variabile sia esclusivamente legata alle variabili di stato  $x_1, \dots, x_n$  del sistema, il fenomeno risulta descritto, nel caso ideale di assenza di errori di misura e di processo, da equazioni del tipo

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{f}(\mathbf{x}(t)) \\ y(t) &= \eta(\mathbf{x}(t))\end{aligned}$$

nel caso dei sistemi a tempo continuo, o del tipo

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(t+1) &= \mathbf{f}(\mathbf{x}(t)) & t = 0, 1, 2, \dots \\ y(t) &= \eta(\mathbf{x}(t)) & t = 0, 1, 2, \dots\end{aligned}$$

nel caso dei sistemi a segnali campionati. E' noto che nel caso dei sistemi lineari, in cui  $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t)$  e  $y(t) = \mathbf{c}^T \mathbf{x}(t)$  lo stato del sistema  $\mathbf{x}(t)$  può essere virtualmente ricostruito a partire da un rilevamento dell'uscita  $y$  su un intervallo di tempo  $[t-T, t]$  di durata  $T$  piccola a piacere. Più realisticamente, nel caso dei sistemi lineari campionati lo stato  $\mathbf{x}(t)$  del sistema può essere ricostruito a partire dagli ultimi  $n$  valori dell'uscita  $y(t), y(t-1), \dots, y(t-n+1)$ . Questa proprietà dei sistemi lineari è "generica", dato che essa viene a mancare solo quando la matrice di osservabilità  $\begin{vmatrix} \mathbf{c} & \mathbf{A}^T \mathbf{c} & \dots & (\mathbf{A}^T)^{n-1} \mathbf{c} \end{vmatrix}$  è singolare. Ciò significa che in un generico sistema lineare l'informazione associata al vettore di stato è la stessa di quella associata alla  $n$ -pla di valori successivi dell'uscita. Dando come scontato che questa proprietà rimanga generica anche in contesto non lineare, se ne deduce che la dinamica di un sistema a tempo discreto non lineare debba poter essere completamente capita studiando l'evoluzione nel tempo  $t$  (discreto), del vettore  $n$ -dimensionale

$$\mathbf{y}_0^{n-1}(t) = [y(t) \quad y(t-1) \quad \dots \quad y(t-n+1)]^T \quad t = 0, 1, 2, \dots$$

Per analogia, la dinamica di un sistema a tempo continuo  $n$ -dimensionale sarà individuabile osservando l'evoluzione nel tempo  $t$  (continuo) del vettore  $n$ -dimensionale

$$\mathbf{y}_0^{n-1}(t) = [y(t) \quad y(t-\tau) \quad \dots \quad y(t-(n-1)\tau)]^T$$

con  $\tau$  sufficientemente piccolo. In particolare, se  $\mathbf{x}(t)$  tende a un attrattore  $A_x$  (equilibrio, ciclo, toro o strano attrattore), anche  $\mathbf{y}_0^{n-1}(t)$  tende a un attrattore  $A_y$  e questi due attrattori sono "equivalenti" e hanno la stessa dimensione  $d$  (intera o frattale) e lo stesso esponente di Liapunov  $L$ . Ciò significa che gli indicatori di uno strano attrattore  $A_x$  possono essere calcolati

"costruendo" l'attrattore  $A_y$  a partire dalla serie temporale  $y(t)$ . Questa tecnica, usata per la prima volta da Packard, è nota come *ricostruzione degli attrattori nello spazio delle uscite ritardate*. —

La Fig. 16 mostra, a titolo di esempio, un attrattore  $A_x$  di un sistema del terzo ordine (sistema di Rössler) e l'attrattore  $A_y$  ricostruito con la tecnica delle uscite ritardate. L'uscita ( $y$ ) usata per la ricostruzione è la prima variabile di stato ( $x_1$ ) del sistema.

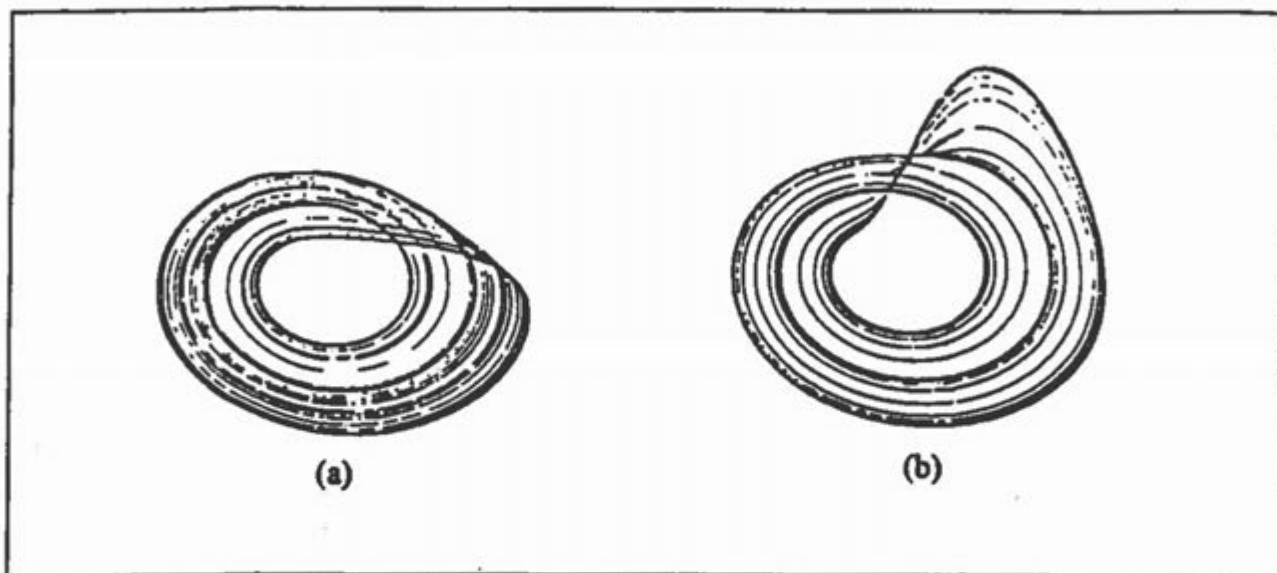


Fig. 16 - Due strani attrattori: (a) attrattore di Rössler; (b) attrattore di Rössler ricostruito con la tecnica delle uscite ritardate

Così come è stata esposta, la tecnica di ricostruzione degli attrattori nello spazio delle uscite ritardate richiede di rappresentare delle linee (traiettorie) in uno spazio di dimensione  $n$ . In realtà, qualora interessi studiare esclusivamente l'attrattore, non è sempre necessario che la dimensione  $m$  dello spazio delle uscite ritardate sia pari ad  $n$ . Infatti, per riconoscere che lo stato  $x(t)$  di un sistema di ordine  $n$  tende ad un equilibrio (attrattore di dimensione 0) è sufficiente rappresentare l'andamento dell'uscita  $y(t)$ , cioè è sufficiente usare uno spazio delle uscite ritardate di dimensione  $m=1$ . Similmente, per riconoscere che  $x(t)$  tende ad un ciclo (attrattore di dimensione 1) o ad un toro (attrattore di dimensione 2) è sufficiente usare spazi di uscite ritardate di dimensioni pari a  $m=2(-d+1)$  o  $m=3(-d+1)$ . Più in generale, tenendo conto anche degli strani attrattori ( $d$  non intero) è sufficiente che  $m$  sia almeno uguale a  $[d+1]^+$ , cioè al più piccolo intero non inferiore a  $(d+1)$ .

La Fig. 17 mostra, tuttavia, come un ciclo attrattore  $A_x$  in un sistema del terzo ordine possa dar luogo, qualora proiettato su un piano, sia ad una linea chiusa  $A'_y$  semplice, sia ad una linea chiusa  $A''_y$  non semplice. Nel secondo caso, la conoscenza della linea chiusa  $A''_y$  permette di dire che l'attrattore  $A_x$  è un ciclo, ma non permette di caratterizzarne la dinamica perché il punto  $Q$  di  $A''_y$  corrisponde a due punti  $P$  di  $A_x$ : in altre parole, non esiste una corrispondenza



biunivoca tra  $A_x$  e  $A''_y$  che garantisce l'equivalenza degli attrattori. Questo semplice esempio permette di concludere che per ricostruire esattamente un ciclo (attrattore di dimensione 1) può essere necessario che la dimensione dello spazio delle uscite ritardate sia pari a  $3(=2d+1)$ .

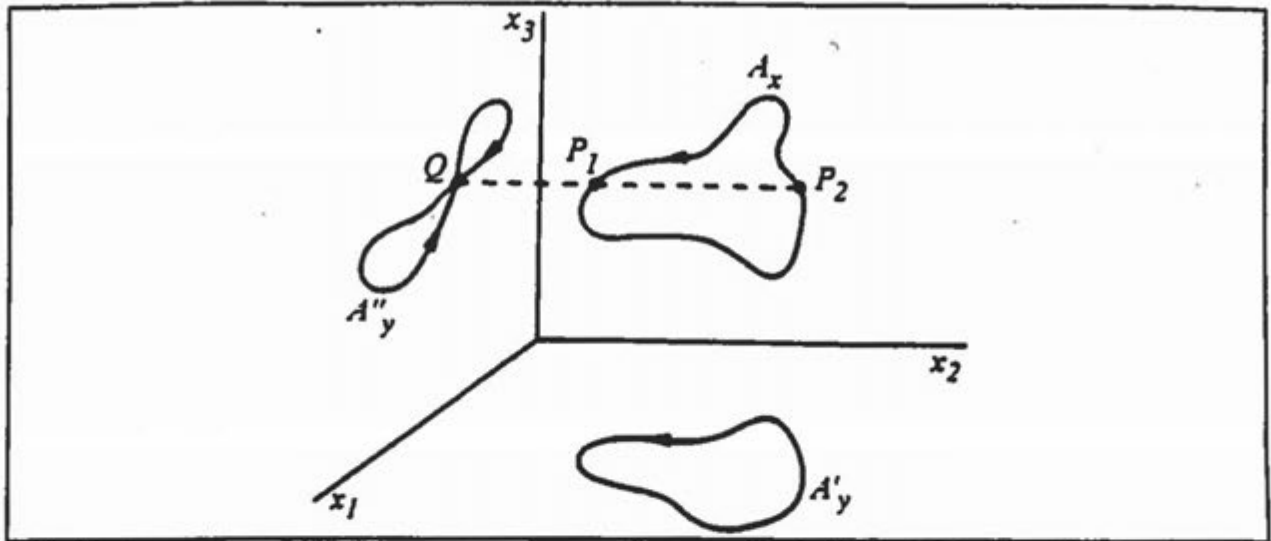


Fig. 17 - Ciclo attrattore  $A_x$  di un sistema del terzo ordine e sue proiezioni  $A'_y$  e  $A''_y$

Con considerazioni del tutto analoghe si può facilmente convincersi che per ricostruire un toro di dimensione  $d=2$  lo spazio delle uscite ritardate debba avere dimensione compresa tra  $3(=d+1)$  e  $5(=2d+1)$  (naturalmente se  $n=3$  dovrà essere  $m=3$  e se  $n=4$  dovrà essere  $m=3$  o  $m=4$ ). Mañé e Takens hanno poi dimostrato che per ricostruire uno strano attrattore ( $d$  non intero) può essere necessario che  $m$  sia pari a  $[2d+1]^+$  cioè al più piccolo intero non inferiore a  $2d+1$ . In conclusione, il minimo valore ammissibile di  $m$  che garantisce una corretta ricostruzione dell'attrattore soddisfa la *condizione di Mañé-Takens*

$$[d+1]^+ \leq m \leq \min\{n; [2d+1]^+\}$$

Questa condizione dice che uno strano attrattore a bassa dimensione frattale ( $1 < d < 1.5$ ) può essere correttamente ricostruito con  $m=3$  o, nel caso peggiore, con  $m=4$ , anche se l'ordine  $n$  del sistema è molto elevato.

La tecnica della ricostruzione degli attrattori è particolarmente interessante, perché permette, almeno in linea di principio, di organizzare le elaborazioni da eseguire su un segnale  $y(t)$  rilevato sperimentalmente per ricavare utili informazioni sull'attrattore del sistema senza neppur conoscere il modello del sistema (la funzione  $f$ ). Infatti, posto  $m=3$  si può ricostruire l'attrattore  $A'_y$  nello spazio tridimensionale delle uscite ritardate e constatare se tale attrattore è un equilibrio o un ciclo. In caso negativo, si può calcolare la dimensione frattale  $d_3$  di  $A'_y$  con uno degli algoritmi oggi disponibili. Indi, si può incrementare  $m$  e ricostruire l'attrattore  $A'_y$

determinandone la dimensione  $d_A$ , e così continuare finché  $d_{m+1}=d_m(=d)$ . Nel caso tale procedura sia applicata ad un segnale rilevato su un processo non affetto da rumore e senza introdurre errori di misura, per quanto detto in precedenza  $d_m$  e  $m$  soddisfano la relazione di Mañé-Takens.

In pratica, nelle applicazioni si usa spessissimo la dimensione  $m=3$  e si osservano le proiezioni dell'attrattore ricostruito  $A_y^3$ . La Fig. 18 mostra, a puro titolo di esempio, sei di questi attrattori ricostruiti a partire da elettrocardiogrammi (ECG) ed elettroencefalogrammi (EEG). Gli attrattori (a) e (b) sono stati ricavati dallo stesso ECG semplicemente usando un diverso ritardo  $\tau$ . Ovviamente, il primo è molto più dettagliato e corrisponde, infatti, ad un valore di  $\tau$  più piccolo. I tre attrattori (d), (e), (f) sono stati, invece, ricavati con lo stesso  $\tau$  a partire da tre diversi EEG, il primo relativo a un paziente a riposo e ad occhi aperti, il secondo a un paziente assopito, e il terzo ad un paziente epilettico. La geometria dei tre attrattori è palesemente molto diversa.

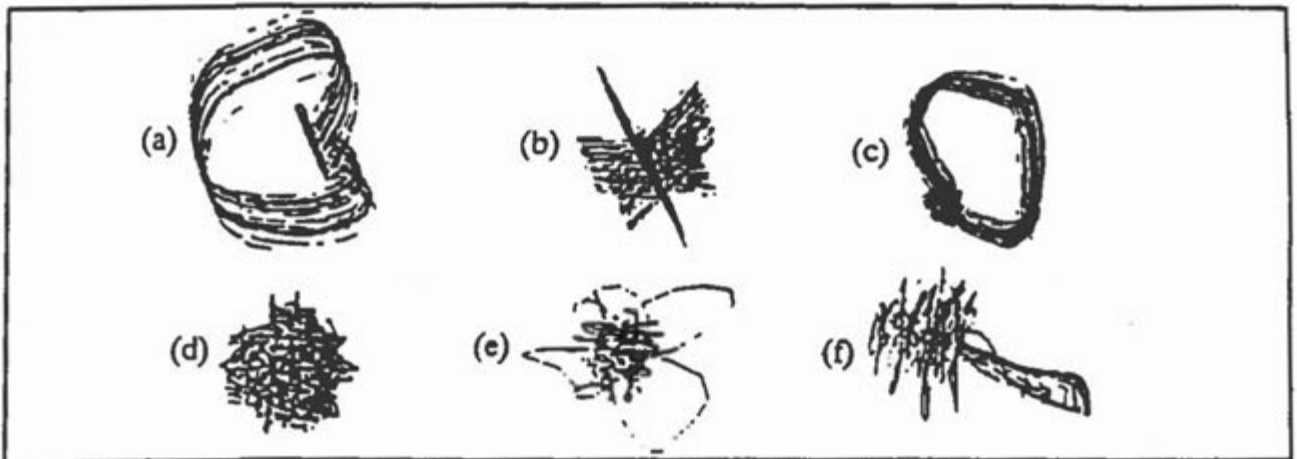


Fig. 18 - Esempi di strani attrattori ricostruiti in uno spazio di uscite ritardate tridimensionale a partire da ECG (prima riga) e EEG (seconda riga)

La possibilità di estrarre da una semplice rilevazione sperimentale informazioni sintetiche riguardanti il comportamento asintotico di un sistema si può spingere anche più in là di quanto visto. Se, infatti, l'attrattore  $A_x$  e, quindi, quello ricostruito  $A_y$ , oltre ad avere bassa dimensione frattale è anche, grosso modo, disposto su una superficie bidimensionale, si può applicare la tecnica illustrata in Fig. 11 fissando opportunamente la sezione di Poincaré  $\mathcal{P}$ . Si ricava così una mappa monodimensionale  $s(k+1)=g(s(k))$  che approssima la mappa di Poincaré e permette di eseguire delle previsioni di lungo periodo, poiché il tempo di primo ritorno, cioè il tempo necessario perché la traiettoria che parte dal punto  $s(k)$  di Fig. 11a riattraversi la sezione di Poincaré nel punto  $g(s(k))$  è, in genere, molto lungo. Naturalmente, tutto ciò diventa di grandissimo interesse qualora la variabile  $s$  abbia un preciso significato fisico.

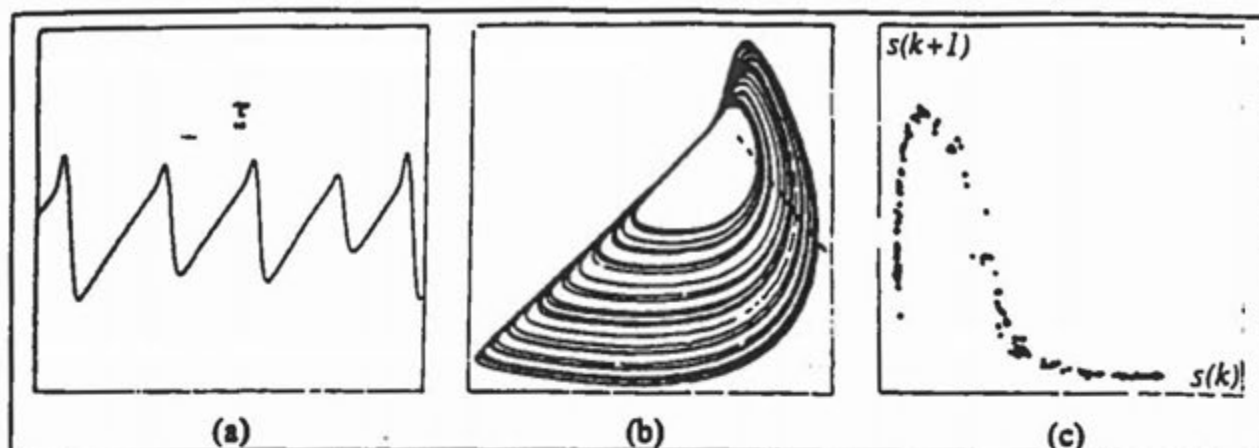


Fig. 19 - Costruzione di una mappa monodimensionale da un segnale rilevato: (a) serie temporale e intervallo  $\tau$ ; (b) proiezione dell'attrattore ricostruito e sezione di Poincaré  $\mathcal{P}$ ; (c) mappa monodimensionale

La Fig. 19 mostra un esempio di quanto detto. Il segnale  $y(t)$  è la concentrazione di un componente di una reazione chimica da cui si ricostruisce, usando il valore  $\tau$  indicato in figura, l'attrattore  $A_y$ . Diagrammando le coppie  $(s(k), s(k+1))$  della sezione di Poincaré  $\mathcal{P}$ , si ottiene un insieme di punti che è ben interpretato da una mappa monodimensionale ad andamento unimodale. Elaborando il segnale  $y(t)$  si è così costruito un vero e proprio modello

$$s(k+1) = g(s(k))$$

che permette di effettuare la previsione del prossimo picco di concentrazione a partire dal valore dell'ultimo picco, perché la sezione di Poincaré è stata fissata in modo da individuare i massimi della variabile  $y(t)$ .

## 7. CONCLUSIONI

A conclusione di questa breve rassegna segnaliamo, una volta di più, che la teoria del caos deterministico è decisamente più ricca e complessa di quanto non possa apparire attraverso la lettura di questo capitolo. Le dimostrazioni di esistenza di strani attrattori sono in genere fatte per equazioni particolari e sono, malgrado ciò, molto complesse e astratte. Le più eleganti sono relative a sistemi dinamici a tempo discreto (come la mappa logistica) e fanno a volte uso di una tecnica nota come *dinamica simbolica*.

La determinazione numerica della regione  $C$  nello spazio dei parametri in cui il sistema ha comportamento caotico è pure decisamente complessa, soprattutto qualora il caos sia di tipo omoclino od eteroclino. In questi casi, infatti, la frontiera della regione  $C$  non è regolare e non può, quindi, essere determinata con algoritmi standard. Nel caso di caos alla Feigenbaum, la frontiera della regione  $C$  può essere, invece, trovata con buona approssimazione usando opportuni algoritmi (per esempio di continuazione) capaci di determinare le biforcazioni flip.

Infine, anche la caratterizzazione degli strani attrattori è un argomento decisamente lontano dall'aver trovato sistemazione. Oltre ai due indicatori qui discussi (esponente di Liapunov e

dimensione frattale) numerose sono state le proposte recentemente avanzate per quantizzare sinteticamente vari aspetti del caos deterministico. Alcuni di questi indicatori riguardano soltanto la geometria dell'attrattore, mentre altri sono focalizzati sulla dinamica e sono, quindi, inquadrabili con la teoria ergodica. Lo sviluppo di algoritmi per il calcolo di questi indicatori è un settore di ricerca in espansione, così come lo studio dell'affidabilità delle stime. Anzi, nei riguardi delle applicazioni, è certamente quest'ultimo il punto più critico, dato che le esperienze finora effettuate mostrano, praticamente senza eccezioni, che la stima degli indicatori di caos è estremamente sensibile all'entità e al tipo di rumore sovrapposto al segnale caratterizzante il sistema dinamico in esame.

Per approfondimenti di varia natura e livello il lettore potrà fare riferimento a Guckenheimer e Holmes [1983], Holden [1986], Mayer-Kress [1986], Koçak [1986], Schuster [1988], Ruelle [1989], Wiggins [1990], Crilly et al. [1991], Peitgen et al. [1992]. Numerosi sono anche i testi dedicati alle applicazioni in settori specifici, come West [1990] per la biomedicina. Molto valida, per varietà di argomenti a livello scientifico è anche la rivista *International Journal of Bifurcation and Chaos*.

## RINGRAZIAMENTI

L'autore ringrazia i colleghi Massimo Miari e Carlo Piccardi per utili discussioni e suggerimenti. Il lavoro è stato svolto nel contesto del contratto di ricerca MURST 40% "Teoria dei sistemi e del controllo".

## RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

- A.J. Crilly, R.A. Earnshav e H. Jones (Eds.), *Fractals and Chaos*, Springer-Verlag, 1991.
- J. Guckenheimer e P. Holmes, *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields*, Springer-Verlag, 1983.
- A.V. Holden (Ed.), *Chaos*, Manchester University Press, Oxford UK, 1986.
- H. Koçak, *Differential and Difference Equations through Computer Experiments with Diskettes Containing PHASER*, Springer-Verlag, 1986.
- G. Mayer-Kress (Ed.), *Dimensions and Entropies in Chaotic Systems*, Springer-Verlag, 1986.
- H.O. Peitgen, H. Jürgens e D. Saupe, *Chaos and Fractals: New Frontiers of Science*, Springer-Verlag, 1992.
- D. Ruelle, *Chaotic Evolution and Strange Attractors*, Cambridge University Press, 1989.
- H.G. Schuster, *Deterministic Chaos: an Introduction*, VCH, Weinheim, 1988.
- B.J. West, *Fractal Physiology and Chaos in Medicine*, World Scientific, 1990.
- S. Wiggins, *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos*, Springer-Verlag, 1990.

# **STAGIONI E CAOS NELLA DINAMICA DELLE POPOLAZIONI**

*a cura di*

**Carlo Piccardi e Sergio Rinaldi**

**Dipartimento di Elettronica e Informazione, Politecnico di Milano**



# STAGIONI E CAOS NELLA DINAMICA DELLE POPOLAZIONI

Carlo Piccardi e Sergio Rinaldi

Dipartimento di Elettronica e Informazione, Politecnico di Milano

## 1. INTRODUZIONE

Come in tutti gli altri settori delle scienze applicate, anche nello studio della dinamica di popolazioni la tendenza, fino a non molti anni fa, è stata quella di interpretare le osservazioni sperimentali in termini di equilibri o cicli. Tutto ciò di apparentemente diverso veniva spiegato ipotizzando l'esistenza di "rumore" di misura o di processo. La scoperta del caos deterministico ha rivoluzionato questa tendenza, insinuando il sospetto che svariati processi biologici fossero in realtà caotici. Due differenti metodi di indagine sono stati seguiti a questo proposito: il primo, che potremmo definire *sperimentale*, consiste nell'analizzare registrazioni di dati e valutare se il sistema dinamico che li ha generati è caotico. Il secondo, che definiamo *teorico*, consiste invece nell'analizzare le proprietà di modelli matematici che descrivano la fenomenologia del processo, e nel classificarne i possibili comportamenti, con particolare riguardo al caos.

Un fatto importante che emerge da molte di queste analisi, sia di tipo sperimentale che teorico, è che le *stagioni* possono essere un fattore importante se non decisivo per la nascita del caos. Per stagioni si intende, in senso lato, la periodicità nel tempo di uno o più parametri del sistema. Molti sono gli esempi in proposito: nel caso dei sistemi preda-predatore la periodicità può essere legata alla disponibilità di cibo per la preda, o al contenuto calorico della preda stessa, o alla intensità dell'attività di predazione, tutte quantità che variano con le stagioni. Nel caso delle epidemie infantili un parametro rilevante è la frequenza dei contatti tra individui sani e individui infettivi: tale frequenza è strettamente legata al calendario scolastico, in quanto la trasmissione della malattia avviene perlopiù a scuola. In altri casi, invece, la variabilità dei parametri può essere legata alla luminosità e avere quindi a che fare con il ciclo giornaliero o con quello lunare, oppure alle attività umane ed essere, quindi, legata al ciclo settimanale.

In questo lavoro verranno illustrati alcuni esempi di dinamica delle popolazioni in cui il ruolo delle stagioni nel determinare un comportamento di tipo caotico è particolarmente palese. Dapprima verranno presentati alcuni esempi in cui tale evidenza è stata mostrata in modo *sperimentale*, quindi altri esempi in cui invece è l'analisi *teorica* a rivelare la presenza di caos deterministico. In un caso particolarmente rilevante, quello delle epidemie infantili, si vedrà come i due approcci conducano a risultati fondamentalmente in accordo tra loro.

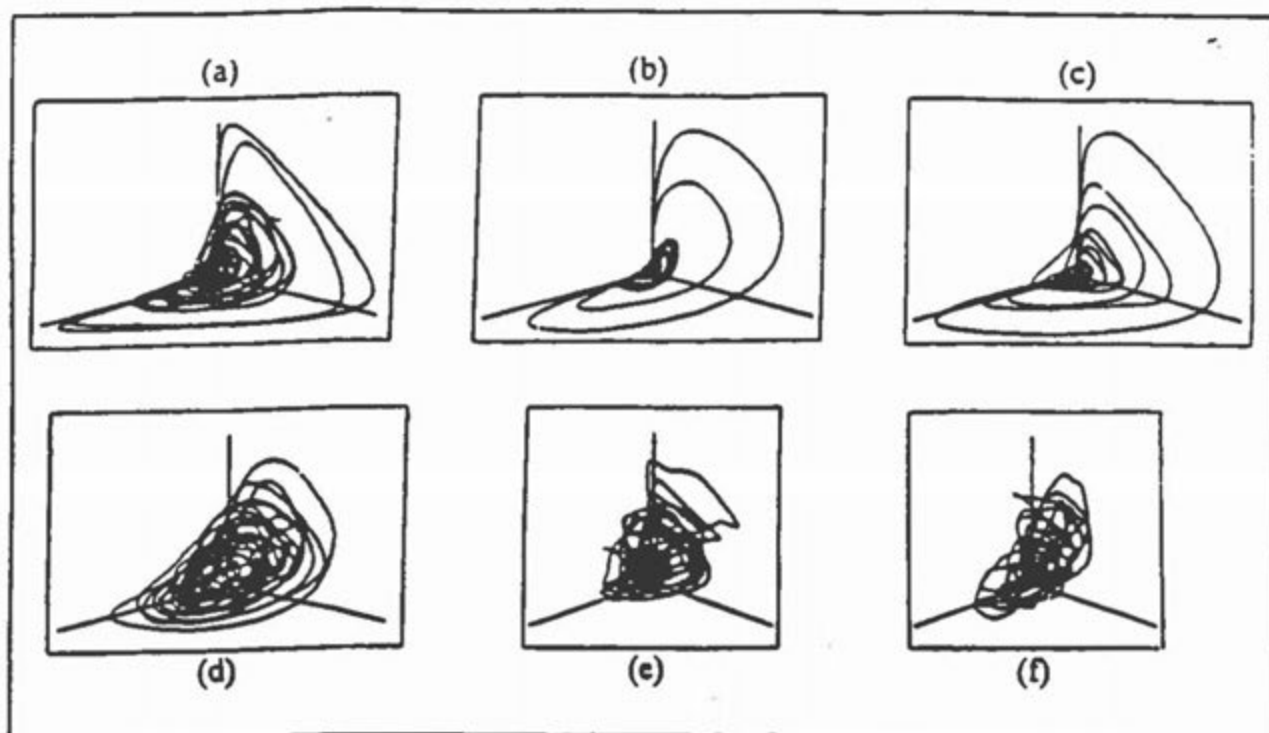


## 2. EVIDENZA SPERIMENTALE

Come accennato nell'introduzione, l'approccio *sperimentale* ha l'obiettivo di inferire l'esistenza di caos deterministico in una popolazione mediante l'analisi di una serie temporale. La tecnica più usata è quella della *ricostruzione degli attrattori* nello spazio delle uscite ritardate, che talvolta permette di riconoscere la presenza di caos mediante una semplice visualizzazione dell'attrattore in uno spazio tridimensionale. Per mezzo di analisi più dettagliate della serie temporale si possono anche ricavare stime dell'esponente di Liapunov e della dimensione frattale dell'attrattore ricostruito. Naturalmente tali stime sono funzione dell'entità e del tipo di rumore agente sul sistema e non caratterizzano, quindi, soltanto la popolazione in esame.

Dalla letteratura, che sull'argomento è ormai relativamente ampia, sembra trasparire che l'applicazione delle tecniche sopra accennate a dati relativi a dinamica di popolazioni solo raramente fornisce risultati di chiara interpretazione. In altre parole, solo in pochi casi è stato possibile concludere con buona affidabilità che la serie temporale analizzata è relativa ad un sistema intrinsecamente caotico. Le ragioni di questa incertezza sono molteplici. Innanzitutto, le serie temporali sono quasi sempre troppo brevi per poter stimare con ragionevole accuratezza gli indicatori di caos. In secondo luogo, i dati sono spesso affetti da errore perché le tecniche di misura sono in molti casi tutt'altro che precise. Inoltre, le popolazioni (sia quelle vegetali che quelle animali) sono fortemente influenzate dalle condizioni meteorologiche, che sono indubbiamente caotiche. Si comprende, quindi, come possa essere difficile (se non impossibile) distinguere, senza il supporto di un adeguato modello del sistema, il caso in cui il caos presente in una serie temporale sia endogeno, cioè dovuto ai meccanismi caratterizzanti la popolazione, o esogeno, cioè dovuto alla variabilità meteorologica (eventualmente deformata e amplificata dai meccanismi della popolazione).

In alcuni casi, tuttavia, l'evidenza di caos è indubbiamente significativa. Tra questi è senz'altro da segnalare il caso delle *epidemie infantili* studiate da numerosi autori (Schaffer e Kot [1985]; Olsen [1988]; Olsen *et al.* [1988]; Schaffer *et al.* [1988]; Olsen e Schaffer [1990]; Rand e Wilson [1991]; Stollenwerk [1992]; Grenfell [1992]) per le quali sono sovente disponibili lunghe serie di registrazioni del numero di individui infettivi, generalmente collezionate dalle autorità sanitarie di grandi centri urbani. In Olsen *et al.* [1988] sono state analizzate in dettaglio serie trentennali o quarantennali di dati di sei diverse malattie infettive relativi alla città di Copenaghen. In *Fig. 1* sono riportati i corrispondenti attrattori ricostruiti in uno spazio tridimensionale. Vista la geometria di questi attrattori, si può concludere per semplice ispezione delle figure che nei primi tre casi è altamente probabile che il comportamento del sistema sia caotico, e che negli altri tre casi siano invece dominanti fattori puramente casuali sovrapposti ad una ovvia tendenza della popolazione a ciclare. Le stime degli indicatori di caos effettuate in Olsen *et al.* [1988] confermano questa impressione.



**Fig. 1** - Attrattori ricostruiti nello spazio delle uscite ritardate da dati relativi alla città di Copenhagen, per sei diverse epidemie: *a*: morbillo, *b*: orecchioni, *c*: rosolia, *d*: varicella, *e*: pertosse, *f*: scarlattina (da Olsen *et al.* [1988])

Oltre a quelli riguardanti le epidemie, particolarmente significativi e convincenti sembrano i recenti risultati ottenuti applicando il metodo *RSM* (*Response Surface Modeling*) (Turchin e Millstein [1993]) a svariate popolazioni di roditori (Turchin e Taylor [1992]). Infine, segnaliamo che altri casi interessanti, riguardanti in particolare popolazioni di insetti, sono riportati nel lavoro di rassegna di Kot *et al.* [1988].

### 3. EVIDENZA TEORICA

Una popolazione influenzata dalle stagioni viene rappresentata mediante un sistema di equazioni differenziali del tipo

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), p(t)) \quad (1)$$

dove  $\mathbf{x}(t)$  è il vettore di stato all'istante  $t$  (di dimensione  $n$ ) e  $p(t)$  è un parametro variante periodicamente nel tempo con *periodo*  $T$ , per cui  $p(t+T) = p(t) \quad \forall t$ . Come già accennato nell'introduzione, in molti casi il periodo  $T$  corrisponde ad un intervallo di tempo di un anno. In altri casi  $T$  ha valore diverso, ma è importante notare che, generalmente, il valore di  $T$  è strettamente legato alla "fisica" del sistema, e deve quindi considerarsi fissato.

La legge secondo cui  $p(t)$  varia periodicamente nel tempo è diversa da caso a caso ma, per motivi di uniformità, supporremo nel seguito che essa sia di tipo sinusoidale, cioè

$$p(t) = p_0 \left( 1 + \varepsilon \sin \frac{2\pi}{T} t \right) \quad (2)$$

con  $0 \leq \varepsilon \leq 1$ . Questa legge, oltre a rispettare il requisito fondamentale di non negatività di  $p(t)$  (che è generalmente un parametro con un ben preciso significato fisico), è allo stesso tempo semplice e, come si è osservato in varie situazioni, sufficientemente rappresentativa per la descrizione di numerosi fenomeni stagionali. In essa  $p_0$  rappresenta il valore medio del parametro e  $p_0 \varepsilon$  l'ampiezza della perturbazione.

### 3.1 Il metodo di analisi

L'analisi del sistema (1)-(2) ha lo scopo di catalogarne i possibili modi di funzionamento al variare dei parametri  $p_0$  ed  $\varepsilon$  che modellizzano l'influenza delle stagioni. In particolare, gli attrattori del sistema (1)-(2) possono essere cicli (di periodo  $T$ , vale a dire dello stesso periodo della "forzante"  $p(t)$ , oppure di periodo multiplo  $mT$  ( $m=2,3,\dots$ ), detti cicli *subarmonici*), tori e strani attrattori. Per valori fissati dei parametri  $p_0$  ed  $\varepsilon$  alcuni di questi attrattori possono coesistere, cosicchè il sistema si porterà a funzionare sull'uno o sull'altro a seconda delle condizioni iniziali. Di particolare interesse è individuare l'eventuale esistenza di strani attrattori e specificare la "strada" (cascata alla Feigenbaum o distruzione di toro) attraverso la quale essi si formano.

Campionando lo stato del sistema (1)-(2) agli istanti  $0, mT, 2mT, \dots$ , cioè ogni  $mT$  unità di tempo ( $m=1,2,\dots$ ), risulta definita una *mappa di Poincaré* che associa allo stato  $\mathbf{x}(kT)$  lo stato  $\mathbf{x}((k+m)T)$ , cioè

$$\mathbf{x}((k+m)T) = \mathbf{g}^{(m)}(\mathbf{x}(kT)) \quad (3)$$

I punti di equilibrio (o *punti fissi*) della mappa  $\mathbf{g}^{(m)}$  corrispondono evidentemente a soluzioni periodiche (cicli) di periodo  $mT$  del sistema (1)-(2). Gli autovalori dello Jacobiano di  $\mathbf{g}^{(m)}$  valutati in corrispondenza di un tale equilibrio vengono detti *moltiplicatori* e indicati con  $\mu_i^{(m)}$  ( $i=1,2,\dots,n$ ).

Una soluzione periodica del sistema (1)-(2) può subire biforcazioni al variare dei parametri  $(\varepsilon, p_0)$ : ciò avviene quando uno (o più) dei suoi moltiplicatori attraversa la "frontiera di stabilità", vale a dire quando  $|\mu_i^{(m)}| = 1$  per qualche  $i$ . I valori di  $(\varepsilon, p_0)$  in corrispondenza dei quali si ha una biforcazione individuano una curva nel piano  $(\varepsilon, p_0)$ , detta appunto *curva di biforcazione*. Nel seguito adotteremo per le curve di biforcazione la seguente notazione:

$h^{(m)}$  - *Naimark-Sacker* (detta anche *Hopf*): per valori di  $(\varepsilon, p_0)$  su questa curva lo Jacobiano di  $g^{(m)}$  ha una coppia di moltiplicatori complessi del tipo  $\mu^{(m)} = e^{\pm i\omega}$ ,  $\omega > 0$ . Quando il punto  $(\varepsilon, p_0)$  attraversa questa curva, un ciclo stabile di periodo  $mT$  del sistema (1)-(2) biforca in un toro stabile e in un ciclo instabile  $mT$ .

$t^{(m)}$  - *tangente*: per valori di  $(\varepsilon, p_0)$  su questa curva lo Jacobiano di  $g^{(m)}$  ha un moltiplicatore  $\mu^{(m)} = 1$ . Quando  $(\varepsilon, p_0)$  attraversa questa curva, due cicli di periodo  $mT$  collidono e scompaiono.

$f^{(m)}$  - *flip*: per valori di  $(\varepsilon, p_0)$  su questa curva lo Jacobiano di  $g^{(m)}$  ha un moltiplicatore  $\mu^{(m)} = -1$ . Quando  $(\varepsilon, p_0)$  attraversa questa curva, un ciclo non sella (sella) di periodo  $mT$  biforca in un ciclo sella (non sella) dello stesso periodo ed in un ciclo non sella (sella) di periodo  $2mT$ .

E' importante notare che la ricerca delle curve di biforcazione sopra definite deve necessariamente essere effettuata per via numerica. Infatti, note le equazioni (1)-(2) del sistema, la mappa  $g^{(m)}$  non è disponibile in forma analitica (ciò richiederebbe la soluzione analitica della (1)-(2), impossibile se non in casi "accademici"). Nota la mappa  $g^{(m)}$ , anche le curve di biforcazione sopra definite si possono determinare numericamente. Un metodo particolarmente efficiente (utilizzato negli esempi che verranno illustrati nel seguito) è il *metodo di continuazione*, in base al quale ogni curva di biforcazione viene ottenuta come proiezione sul piano  $(\varepsilon, p_0)$  di una varietà monodimensionale definita nello spazio  $n+2$ -dimensionale  $(x, \varepsilon, p_0)$ . Questa varietà è individuata dalle  $n$  equazioni che impongono l'equilibrio nella (3), e da un'ulteriore equazione che impone un opportuno valore ai moltiplicatori (è facile mostrare che quest'ultima equazione si può scrivere compattamente utilizzando il polinomio caratteristico dello Jacobiano di  $g^{(m)}$  (Khibnik *et al.* [1993])).

Le curve di biforcazione vengono determinate al fine di ottenere il *diagramma delle biforcazioni* del sistema (1)-(2), vale a dire una partizione del piano  $(\varepsilon, p_0)$  in regioni in cui il sistema è strutturalmente stabile. Come già accennato, ciò permette di classificare i modi di funzionamento del sistema e di individuare le regioni del piano  $(\varepsilon, p_0)$  in cui possono esistere strani attrattori. La sequenza di operazioni da eseguire per determinare il diagramma delle biforcazioni non è la stessa per ogni sistema, anche se è possibile suggerire una strategia sufficientemente generale. E' di solito conveniente partire dall'analisi del sistema *autonomo*, vale a dire il sistema (1)-(2) con  $\varepsilon = 0$ :

$$\dot{x}(t) = f(x(t), p_0) \quad (4)$$

Un caso importante e piuttosto frequente nelle applicazioni è quello in cui il sistema (4) ha una biforcazione di Hopf supercritica in corrispondenza di un certo valore  $p_0 = p_0^*$  del parametro.



In altre parole, il sistema (4) possiede un equilibrio stabile, ad esempio per  $p_0 < p_0^*$ , ed un ciclo stabile per  $p_0 > p_0^*$ . La teoria garantisce allora che il sistema *perturbato* ( $\varepsilon > 0$ ) ha nel piano  $(\varepsilon, p_0)$  una curva di biforcazione Naimark-Sacker  $h^{(1)}$  radicata sull'asse  $p_0$  nel punto  $(0, p_0^*)$  (vedi Fig. 2). Attraversando questa curva per valori costanti di  $\varepsilon$  e crescenti di  $p_0$ , il ciclo stabile di periodo  $T$  biforca in un ciclo instabile (pure di periodo  $T$ ) ed in un toro stabile. La curva  $h^{(1)}$  può essere determinata con un algoritmo di continuazione a partire dal punto  $(0, p_0^*)$  che è facilmente calcolabile.

Il ciclo che nasce nel sistema autonomo in corrispondenza della biforcazione di Hopf ha ampiezza inizialmente nulla e periodo  $\tau^* = 2\pi/\omega$ , essendo  $\pm i\omega$  gli autovalori dello Jacobiano di  $f$  (vedi (4)) per  $p_0 = p_0^*$ . Al crescere di  $p_0$  il periodo  $\tau$  del ciclo varia con continuità ed assume valori in rapporto razionale con  $T$  per un'infinità numerabile di valori di  $p_0$ . Tra questi sono di particolare importanza (se esistono) quelli per cui il periodo  $\tau$  del ciclo è un *multiplo intero* e piccolo del periodo  $T$  della forzante, vale a dire quei valori di  $p_0$  per cui  $\tau = mT$ , con  $m=1, 2, 3, \dots$ . La teoria garantisce che, nel sistema *perturbato* ( $\varepsilon > 0$ ), vi sono nel piano  $(\varepsilon, p_0)$  due curve di biforcazione tangente  $t_{1,2}^{(m)}$  che partono dall'asse  $\varepsilon = 0$  in corrispondenza del valore  $p_0^{*(m)}$  per cui  $\tau = mT$  (vedi Fig. 2). Per valori dei parametri  $(\varepsilon, p_0)$  interni alla regione delimitata da queste due curve esistono pertanto due cicli di periodo  $mT$ . Questo fenomeno viene detto *aggancio di frequenza* perchè i due cicli hanno frequenza agganciata a quella della forzante in una regione relativamente vasta dello spazio dei parametri.

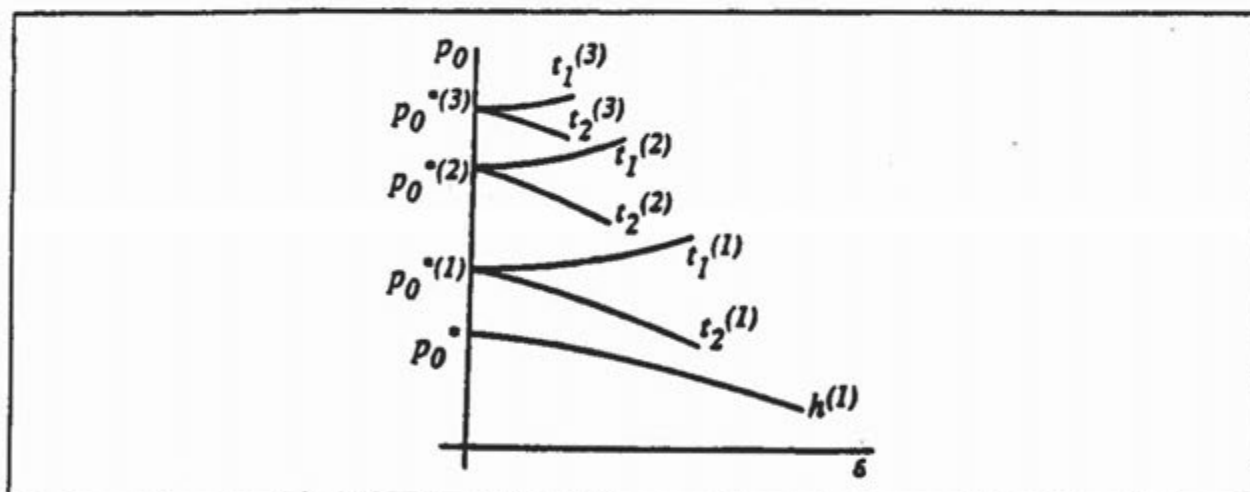


Fig. 2 - Un esempio di *aggancio in frequenza*: all'interno della regione delimitata dalle curve  $t_{1,2}^{(m)}$  esistono due cicli di periodo  $mT$

E' importante notare che, nella regione individuata da due curve del tipo  $t_{1,2}^{(m)}$ , i due cicli di periodo  $mT$  generalmente coesistono con il toro che nasce in corrispondenza della Naimark-Sacker  $h^{(1)}$ . E' pertanto possibile che, per opportuni valori dei parametri, il toro ed uno dei due cicli entrino in collisione dando origine a caos di tipo omoclino. La curva lungo cui ha luogo

questa biforcazione *globale* non è tuttavia regolare e non può pertanto essere determinata con un algoritmo di continuazione.

Nel caso in cui nel sistema autonomo non vi siano biforcazioni di Hopf per valori fisicamente significativi del parametro  $p_0$  è necessario procedere diversamente. Una strategia conveniente può essere la seguente. Fissato un valore di  $p_0$  e determinato un corrispondente equilibrio stabile per il sistema autonomo ( $\varepsilon=0$ ), si "attiva" una piccola perturbazione  $\varepsilon$  che darà luogo ad un ciclo stabile di periodo  $T$  e di piccola ampiezza. A questo ciclo stabile corrisponde un equilibrio stabile della mappa  $g^{(1)}$ . Si *continua* quindi tale equilibrio per valori crescenti di  $\varepsilon > 0$ , vale a dire si segue al variare di  $\varepsilon$  l'evoluzione dell'equilibrio di  $g^{(1)}$  e, allo stesso tempo, l'evoluzione dei suoi moltiplicatori. Se, per un certo valore di  $\varepsilon$ , i moltiplicatori soddisfano una delle condizioni di biforcazione sopra riportate, si è ottenuto un punto di una curva di biforcazione. Tale curva può allora essere prodotta per continuazione partendo dal punto trovato. Ovviamente, tutta l'operazione può essere ripetuta per diversi valori di  $p_0$ .

Procedendo come sopra descritto può accadere di imbattersi in una biforcazione flip. Ciò permette di ottenere la curva  $f^{(1)}$ , al di là della quale un ciclo stabile di periodo  $T$  si trasforma in un ciclo stabile di periodo  $2T$ . A quest'ultimo corrisponde un equilibrio stabile per la mappa  $g^{(2)}$ , continuando il quale per valori ancora crescenti di  $\varepsilon$  si può pervenire ad una nuova biforcazione flip, in corrispondenza della quale il ciclo raddoppia di nuovo di periodo. Questo comportamento non è che l'inizio di una cascata di Feigenbaum: le infinite curve  $f^{(1)}, f^{(2)}, f^{(4)}, \dots$  (vedi Fig. 3) si accumulano su una curva  $f^{(\infty)}$  che segna, nel piano  $(\varepsilon, p_0)$ , la frontiera della regione di esistenza di uno strano attrattore. Da un punto di vista numerico, solo le prime due o tre curve di flip possono normalmente essere calcolate; esse forniscono tuttavia una precisa indicazione sulla regione del piano  $(\varepsilon, p_0)$  in cui esistono strani attrattori.

Quando si *continua* una curva di biforcazione può accadere che in un punto particolare un ulteriore moltiplicatore attraversi la frontiera di stabilità, o che altre speciali condizioni (dette di *degenerazione*) risultino verificate. Questi punti corrispondono a biforcazioni di *codimensione 2*. Senza voler entrare nei dettagli (peraltro molto complessi, si veda ad esempio Guckenheimer e Holmes [1983] e Wiggins [1990]), è opportuno mettere in evidenza che i punti di codimensione 2 sono, in molti casi, punti di contatto fra curve di biforcazione. Pertanto, la conoscenza delle caratteristiche di uno di questi punti di codimensione 2 permette di utilizzarlo come punto di partenza per la continuazione di un'altra curva di biforcazione. In questo modo, il diagramma delle biforcazioni viene determinato calcolando via via curve tra loro connesse.

E' opportuno segnalare che la complessa strategia di analisi sopra descritta può essere seguita solo avendo a disposizione del software sufficientemente potente. Negli esempi descritti ai paragrafi 3.2 e 3.3 l'analisi delle biforcazioni è stata effettuata mediante il package interattivo LOCBIF (Khibnik *et al.* [1993]), in cui sono implementate tutte le funzioni sopra descritte (calcolo di una mappa via integrazione numerica e continuazione dei suoi equilibri, continuazione di una curva di biforcazione, calcolo dei moltiplicatori, segnalazione dei punti di biforcazione di codimensione 2).



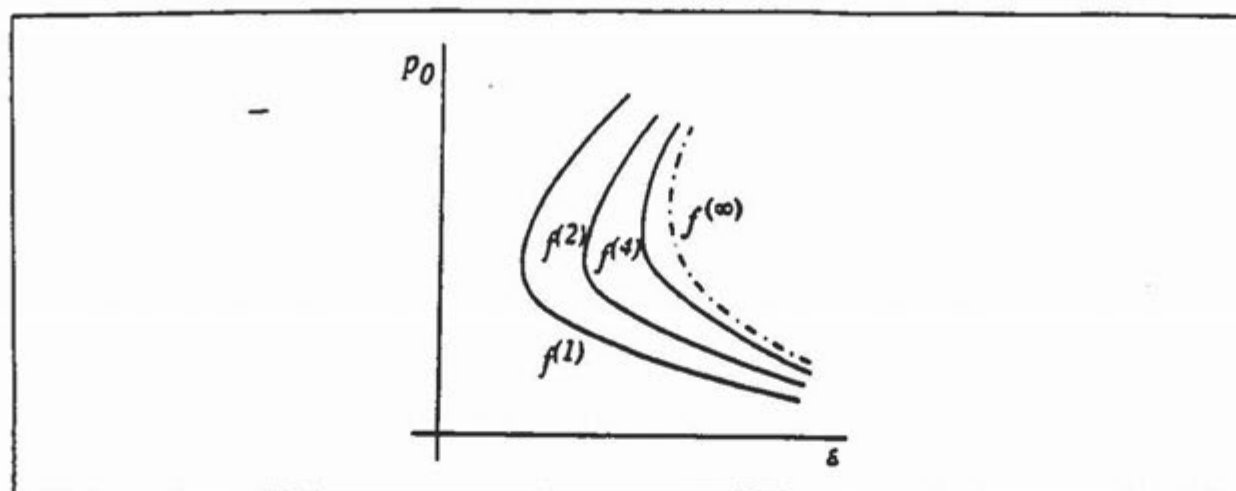


Fig. 3 - Un esempio di cascata di biforcazioni flip (*cascata di Feigenbaum*): la curva  $f^{(\infty)}$  è la frontiera della regione di esistenza di uno strano attrattore

### 3.2 Il modello SEIR delle epidemie infantili

Uno dei modelli più utilizzati per descrivere la diffusione di un'epidemia infantile (o, più in generale, di un'epidemia non mortale al termine della quale si consegue immunità permanente) è il cosiddetto modello *SEIR* (Dietz [1976]; Schwartz e Smith [1983]; Schwartz [1985]; Olsen *et al.* [1988]). In esso, si suppone che la popolazione sia partizionabile in quattro classi: individui *sani* (S), "latenti" (che hanno cioè contratto l'infezione ma ancora non la trasmettono, indicati nella letteratura anglosassone con il termine *exposed*) (E), *infettivi* (I) e guariti (*recovered*) (R) ed il passaggio dalla classe S alla E avviene in seguito a contatti tra individui sani e infettivi. Indicando con  $S(t)$ ,  $E(t)$ ,  $I(t)$  ed  $R(t)$  la frazione di individui presenti nelle rispettive classi all'istante  $t$  rispetto al totale della popolazione (cosicché  $S(t)$ ,  $E(t)$ ,  $I(t)$  ed  $R(t)$  sono in ogni istante compresi tra 0 e 1), il modello risulta descritto da:

$$\begin{aligned}\dot{S}(t) &= \mu - \mu S(t) - \beta(t)S(t)I(t) \\ \dot{E}(t) &= \beta(t)S(t)I(t) - (\mu + \alpha)E(t) \\ \dot{I}(t) &= \alpha E(t) - (\mu + \gamma)I(t)\end{aligned}\tag{5}$$

con  $R(t) = 1 - (S(t) + E(t) + I(t))$ . Nelle (5) si è ipotizzato che nuovi individui sani vengano introdotti nel sistema con un tasso di natalità costante  $\mu$ , e che tutte le classi siano caratterizzate dallo stesso tasso di mortalità, per ipotesi anch'esso pari a  $\mu$ , in modo che la popolazione totale risulti costante. Il passaggio dalla classe S alla E avviene ad un tasso proporzionale alla frequenza  $S(t)I(t)$  degli incontri, mentre i passaggi dalla classe E alla I e dalla I alla R avvengono a tassi proporzionali rispettivamente ad  $E(t)$  e ad  $I(t)$ . Naturalmente, il tempo medio di vita  $\mu^{-1}$  (50-70 anni) di ciascun individuo risulta di gran lunga superiore sia al

tempo medio di latenza  $\alpha^{-1}$  (5-20 giorni, a seconda del tipo di infezione) che al tempo medio di infettività  $\gamma^{-1}$  (3-15 giorni).

Nel caso *autonomo* ( $\beta(t) = \beta_0$ ), il sistema (5) ha un comportamento molto semplice: i due equilibri

$$E_1: (\bar{S}, \bar{E}, \bar{I}) = (1, 0, 0) \quad E_2: (\bar{S}, \bar{E}, \bar{I}) = \left( \frac{(\mu + \alpha)(\mu + \gamma)}{\alpha\beta_0}, \frac{\mu + \gamma}{\alpha} \bar{I}, \frac{\mu}{\beta_0} \left( \frac{1}{\bar{S}} - 1 \right) \right)$$

collidono per  $\beta_0 = (\mu + \alpha)(\mu + \gamma)/\alpha$  in uno scambio di stabilità. Per  $\beta_0 > (\mu + \alpha)(\mu + \gamma)/\alpha \equiv \gamma$  (condizione sempre verificata nella realtà) l'equilibrio banale  $E_1$  è una sella, mentre  $E_2$  risulta essere un fuoco stabile ed il suo bacino di attrazione comprende l'intero ottante positivo (con esclusione dell'asse  $E=I=0$ ). Poiché non vi sono altre biforcazioni, il modello prevede che, partendo da una generica condizione iniziale, il sistema si porti asintoticamente (con oscillazioni smorzate) verso una situazione di equilibrio in cui, in ogni istante, una frazione costante della popolazione è nello stato latente ed un'altra frazione è infettiva.

Il comportamento predetto dal modello autonomo è tuttavia spesso in contrasto con le osservazioni, che evidenziano invece marcate oscillazioni (con differenti periodicità) nel numero di infettivi o addirittura comportamenti di tipo caotico. La più semplice congettura che permette di dar conto di tali comportamenti è quella di supporre che il tasso di contatto  $\beta(t)$  sia variante nel tempo con periodicità annuale. Prendendo l'anno come unità di tempo, ciò significa assumere

$$\beta(t) = \beta_0 (1 + \varepsilon \sin 2\pi t) \quad (6)$$

Questa ipotesi, che è confortata da varie analisi di serie di dati storici, trova un'evidente giustificazione nel fatto che le epidemie infantili si trasmettono molto più efficacemente quando i bambini frequentano l'asilo o la scuola, per cui  $\beta(t)$  risulta legato al calendario scolastico.

In Fig. 4 è riportato il diagramma delle biforcazioni del sistema (5)-(6), ottenuto ponendo  $\mu = 0.02$ ,  $\alpha = 36$  e  $\gamma = 100$  (valori tipici per il morbillo) (vedi Kuznetsov e Piccardi [1993] per una descrizione dettagliata). In esso sono numerate alcune regioni di particolare interesse. Nella regione 0 il sistema possiede un ciclo di periodo  $T=1$  ottenuto dalla perturbazione dell'equilibrio  $E_2$ . Nella regione 1 vi è invece un unico attrattore ma di periodo 2, il quale proviene o da biforcazione flip su  $f^{(1)}$  o da biforcazione tangente su  $t_i^{(2)}$ . Questo ciclo subisce un ulteriore raddoppio di periodo se viene attraversata la curva  $f^{(2)}$ . Nella regione 2 coesistono due cicli, uno di periodo 2 originato dalla tangente  $t_i^{(2)}$  ed uno di periodo 1 (derivante dalla perturbazione di  $E_2$ ). A quest'ultimo ciclo, nella regione 3, si sostituisce un ciclo di periodo 2 che nasce per raddoppio di periodo su  $f^{(1)}$ , cosicché coesistono due diversi cicli di periodo 2. Vicino a  $f^{(2)}$  è stata inoltre rilevata una curva  $f^{(4)}$ , la quale lascia

risumere l'esistenza di una cascata di flip che si accumulano su una curva  $f^{(m)}$  come mostrato in Fig. 3. All'interno di questa curva il sistema (5)-(6) possiede pertanto uno strano attrattore, di cui è mostrato un esempio ( $\varepsilon = 0.255$ ,  $\beta_0 = 600\pi$ ) in Fig. 5.

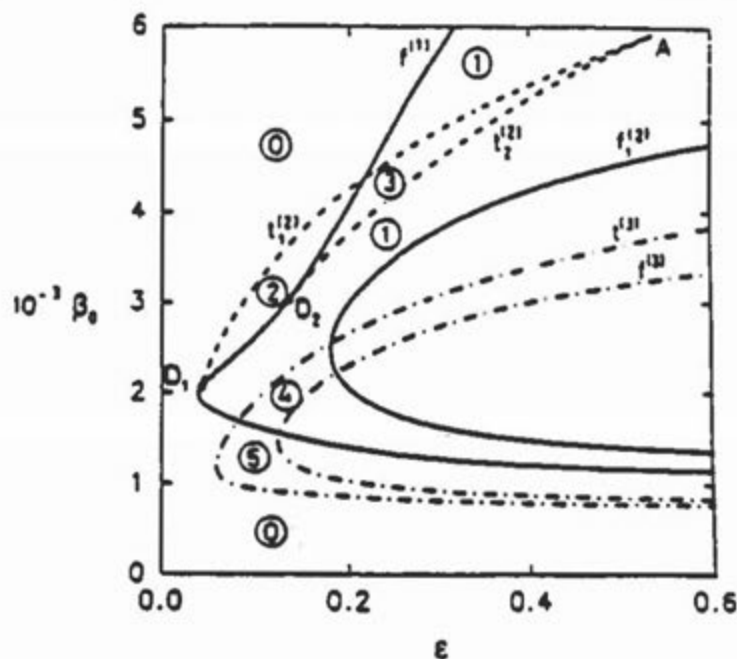


Fig. 4 - Diagramma delle biforcazioni del modello SEIR (5)-(6) (da Kuznetsov e Piccardi [1993])

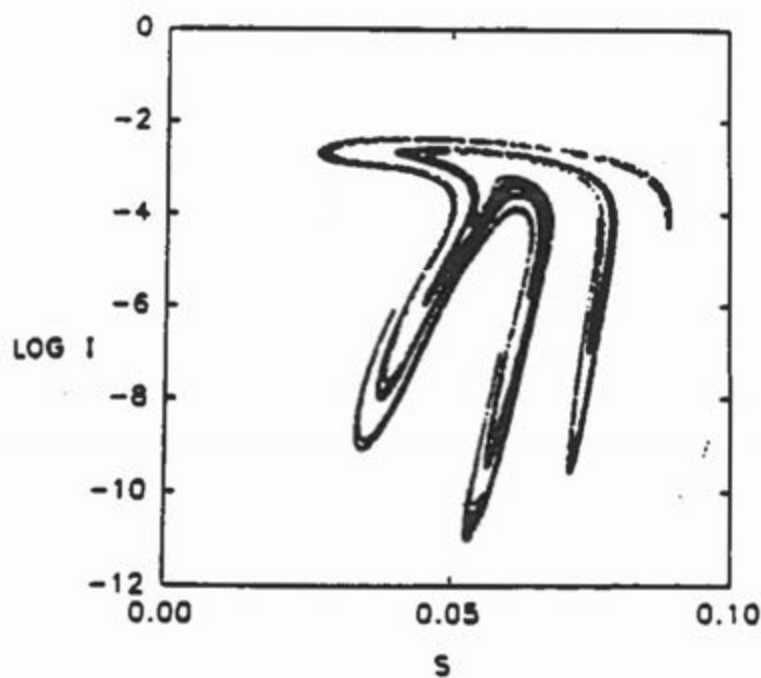


Fig. 5 - Uno strano attrattore del modello SEIR (5)-(6): proiezione sul piano  $(S, I)$  della sezione di Poincaré (da Kuznetsov e Piccardi [1993])

Il diagramma delle biforcazioni si complica ulteriormente una volta rilevato che, in aggiunta alla cascata di raddoppi di periodo sopra descritta, ve ne è un'altra basata su un ciclo di periodo 3. Questo ciclo nasce per biforcazione tangente su  $t^{(3)}$ , e subisce il primo raddoppio di periodo su  $f^{(3)}$  (vedi ancora la Fig. 4). Nella regione 4 coesistono pertanto un ciclo di periodo 2 ed uno di periodo 3, mentre nella regione 5 coesistono un ciclo di periodo 1 ed uno di periodo 3.

I risultati di questa analisi permettono di concludere che il modello SEIR con tasso di contatto  $\beta(t)$  variante con periodicità annuale è in grado di "spiegare" varie registrazioni di dati di epidemie infantili, caratterizzate da differenti periodicità (1, 2, 3 e 4 anni (Emerson [1937]; London e Yorke [1973]; Anderson e May [1982])). Ma il modello spiega anche andamenti di tipo caotico che, come illustrato nel paragrafo 2, sono pure evidenti in alcune serie storiche. L'aderenza tra realtà e modello è in alcuni di questi casi addirittura sorprendente. Per rendersi conto di ciò è sufficiente confrontare (vedi Fig. 6) gli attrattori ricostruiti da Olsen et al. [1988] a partire da dati storici (già presentati nella Fig. 1 e riportati di nuovo in Fig. 6 per comodità) con quelli ottenuti dal modello SEIR.

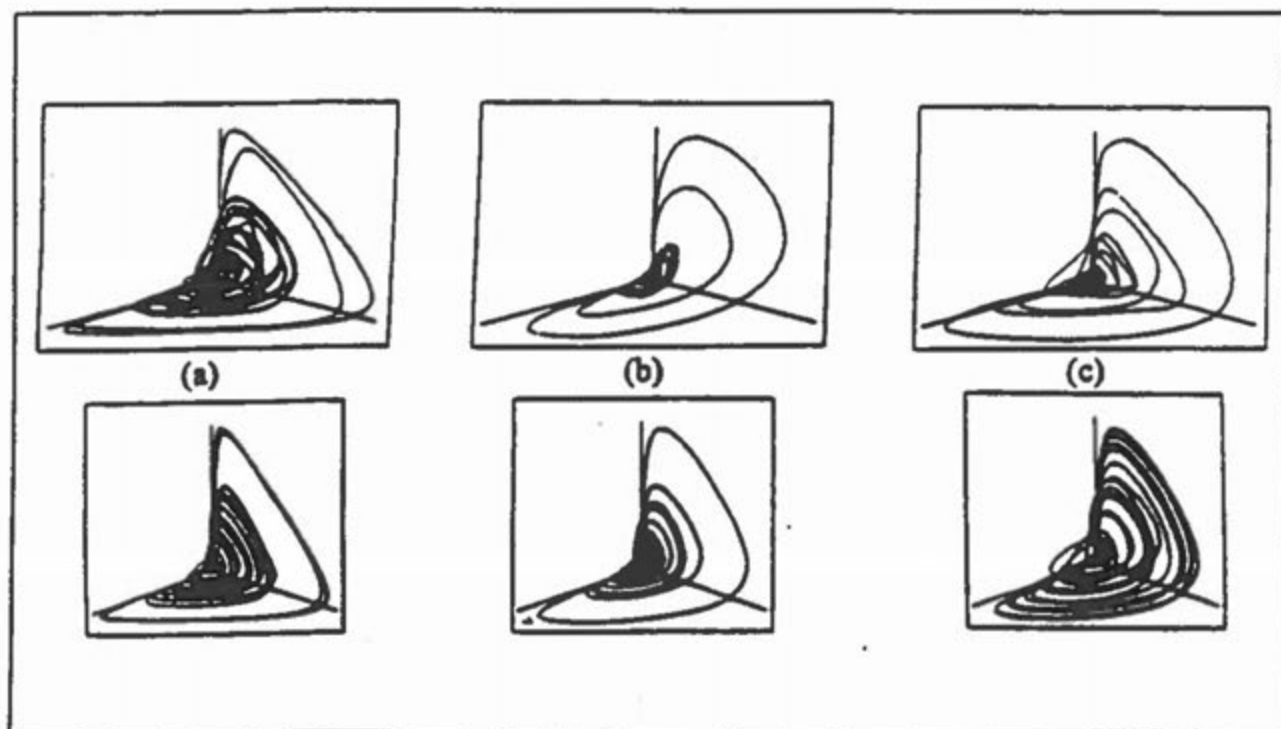


Fig. 6 - In alto: attrattori ricostruiti nello spazio delle uscite ritardate: *a*: morbillo, *b*: orecchioni, *c*: rosolia. In basso: i corrispondenti attrattori ottenuti per simulazione dal modello SEIR (5)-(6) (da Olsen et al. [1988])

### 3.3 Il modello preda-predatore di Rosenzweig

Vari lavori hanno recentemente mostrato che modelli preda-predatore varianti periodicamente possono avere comportamenti estremamente complessi (Inoue e Kamifukumoto [1984]; Schaffer [1988]; Toro e Aracil [1988]; Allen [1989]; Solé e Valls [1992]; Kuznetsov et al.

[1992]; Rinaldi *et al.* [1993]; Rinaldi e Muratori [1993]; Sabin e Summers [1993]). In questo paragrafo si analizzerà in dettaglio il classico modello di Rosenzweig, utilizzato negli ultimi 20 anni per interpretare il comportamento di molte comunità. Indicando con  $x_1$  e  $x_2$ , rispettivamente, la biomassa di prede e predatori, il modello è il seguente:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_1 \left[ r \left( 1 - \frac{x_1}{K} \right) - \frac{ax_2}{b+x_1} \right] \\ \dot{x}_2 &= x_2 \left[ e \frac{ax_1}{b+x_1} - m \right]\end{aligned}\quad (7)$$

Dato che i fattori ambientali variano stagionalmente, è ragionevole assumere che i parametri contenuti nella (7) siano varianti con periodicità annuale. Tuttavia, per evitare un'analisi eccessivamente complessa, è opportuno considerare solo meccanismi di stagionalità *elementari*, vale a dire variazioni periodiche di un solo parametro o, al più, variazioni sincrone di due parametri. I meccanismi elementari analizzati sono i seguenti:

(i) *quantità di cibo disponibile per le prede* ( $r, K$ ). Il tasso di crescita intrinseco  $r$  delle prede cresce con la quantità di cibo disponibile, cosicché  $r = r_0(1 + \varepsilon \sin 2\pi t)$ . D'altro canto, poiché la competizione intraspecifica ( $r/K$ ) delle prede non è influenzata dalla quantità di cibo disponibile si ha anche  $K = K_0(1 + \varepsilon \sin 2\pi t)$ .

(ii) *competizione intraspecifica delle prede* ( $K$ ). In alcune stagioni vi può essere un surplus di mortalità delle prede in condizioni di alta densità dovuto, ad esempio, ad epidemie. Ciò significa che la capacità portante varia periodicamente, vale a dire  $K = K_0(1 + \varepsilon \sin 2\pi t)$ .

(iii) *contenuto calorico delle prede* ( $e$ ). Se il contenuto calorico delle prede varia stagionalmente, come ad esempio nelle comunità piante-erbivori, l'energia disponibile per il predatore varia a sua volta in modo consistente. Questo influenza l'efficienza del predatore stesso, per cui  $e = e_0(1 + \varepsilon \sin 2\pi t)$ .

(iv) *sfruttamento del predatore* ( $m$ ). Il predatore può essere predato da un super-predatore avente consistenza numerica variante stagionalmente. In questo caso il tasso di mortalità del predatore varia periodicamente, cioè  $m = m_0(1 + \varepsilon \sin 2\pi t)$ .

(v) *mimetismo della preda e/o del predatore* ( $b$ ). Quando la capacità della preda e/o del predatore di mimetizzarsi rispetto all'ambiente circostante varia stagionalmente, varia di conseguenza anche il tempo impiegato mediamente da un predatore per trovare una preda. E' possibile mostrare che ciò implica la variazione stagionale di  $b$ , cioè  $b = b_0(1 + \varepsilon \sin 2\pi t)$ .



(vi) *tempo di riposo del predatore (a)*. Alcune popolazioni di predatori sono caratterizzate dal fatto che il loro *tempo di riposo*, cioè il tempo non impiegato nella ricerca di cibo, varia stagionalmente. In questo caso è possibile mostrare che ciò implica  $a = a_0(1 + \varepsilon \sin 2\pi t)$ .

Nel caso *autonomo* ( $\varepsilon = 0$ ) l'analisi del sistema (7) mostra che lo spazio dei parametri è partizionato in tre regioni, in ciascuna delle quali il sistema possiede un unico attrattore che è globalmente stabile nel primo quadrante. Questo attrattore è o un equilibrio banale (corrispondente ad assenza di predatori), o un equilibrio caratterizzato da coesistenza delle due popolazioni, o un ciclo generato da una biforcazione di Hopf supercritica.

Nella Fig. 7 sono mostrati i sei diagrammi delle biforcazioni per i sistemi periodici corrispondenti ai sei meccanismi elementari sopra descritti (vedi Rinaldi *et al.* [1993] per maggiori dettagli). I parametri di volta in volta costanti sono stati posti uguali a

$$e = K = 1 \quad r = m = 2\pi \quad a = 4\pi \quad b = 0.3$$

in corrispondenza dei quali il sistema autonomo possiede un ciclo stabile di periodo  $\tau \cong 1.85$ . I sei diagrammi risultano contenere le stesse curve, vale a dire  $f^{(1)}$ ,  $f^{(2)}$ ,  $h^{(1)}$ ,  $h^{(2)}$ ,  $t_1^{(2)}$  e  $t_2^{(2)}$  (nei casi (i), (ii) (iii) e (vi) la curva  $h^{(2)}$  non compare nel quadro della figura). Le curve  $f^{(1)}$ ,  $f^{(2)}$ ,  $t_1^{(2)}$  e  $t_2^{(2)}$  sono inoltre non complete, in quanto sono stati eliminati i tratti corrispondenti a biforcazioni che non coinvolgono attrattori. Sono state inoltre calcolate le curve  $f^{(4)}$  ed  $f^{(8)}$ , non presentate in figura in quanto praticamente coincidenti con  $f^{(2)}$ . Esse indicano chiaramente l'esistenza di una cascata di Feigenbaum del tipo descritto in Fig. 3.

Pur di capovolgere il quarto ed il quinto diagramma rispetto all'asse delle ordinate, è immediato riconoscere che i sei diagrammi di Fig. 7 sono topologicamente equivalenti: ciò significa che i sei meccanismi di stagionalità danno luogo agli stessi fenomeni. E' pertanto conveniente riferirsi al diagramma *universale* di Fig. 8 (in cui  $f^{(4)}$  ed  $h^{(4)}$  sono state aggiunte per chiarezza interpretativa), nel quale  $p_0$  è da intendersi direttamente (nei casi (i), (ii) (iii) e (vi)) o inversamente (nei casi (iv) e (v)) legato al valore medio del parametro variante periodicamente.

Il primo interessante fatto che emerge dal diagramma di Fig. 8 è l'esistenza di regioni del piano  $(\varepsilon, p_0)$  in cui coesistono più attrattori. Ad esempio, fissando il valore di  $\varepsilon$  ed aumentando  $p_0$ , un ciclo stabile di periodo 2 può coesistere dapprima con un ciclo stabile di periodo 1 (regione 3), quindi con un toro stabile (regione 4, immediatamente sopra la curva  $h^{(1)}$ ) e infine con uno strano attrattore generato dalla distruzione del toro (area tratteggiata nella regione 4).



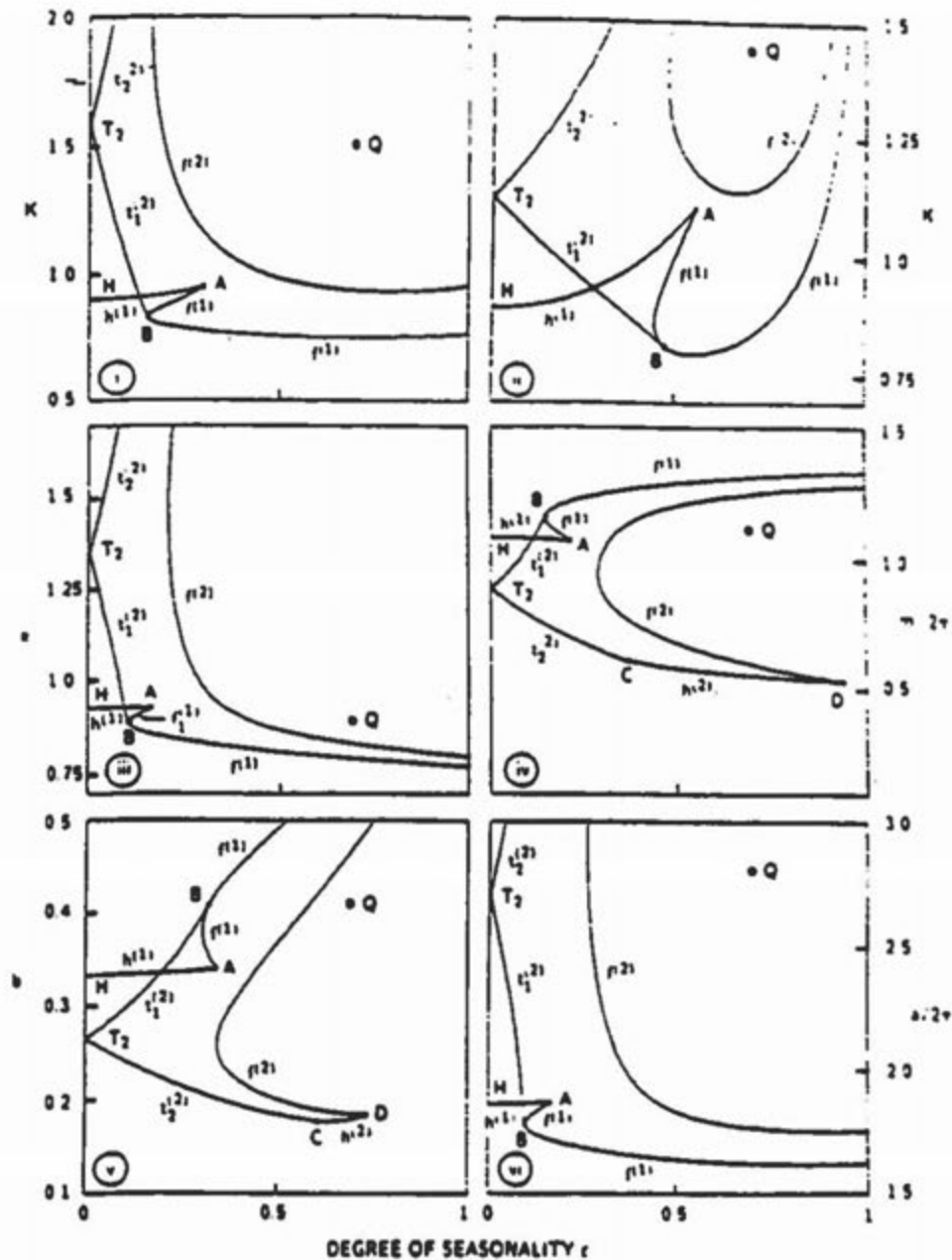


Fig. 7 - Diagrammi di biforcazione per il sistema (7) sottoposto ai sei meccanismi elementari di stagionalità (i),..., (vi) descritti nel testo (da Rinaldi *et al.* [1993])

E' interessante notare che alcune delle biforcazioni di Fig. 8 sono di tipo *catastrofico*, vale a dire piccole variazioni dei parametri possono produrre un cambiamento radicale del comportamento del sistema. Ad esempio, supponiamo che il sistema funzioni nella regione 1, immediatamente al di sotto della curva  $h^{(1)}$ . Qui l'unico attrattore è un ciclo di periodo 1. Mantenendo costante  $p_0$  ed aumentando  $\varepsilon$ , questo ciclo collide sulla curva  $f^{(1)}$  (flip *subcritica*, tratto AB) con un ciclo sella di periodo 2 (generato per biforcazione tangente su  $t_1^{(2)}$ ) e diventa un ciclo sella di periodo 1. Il sistema si sposta pertanto bruscamente verso un altro attrattore, che nella fattispecie è un ciclo stabile di periodo 2 generatosi su  $t_1^{(2)}$ . Se ora  $\varepsilon$

viene diminuito, il sistema resta comunque intrappolato da quest'ultimo ciclo di periodo 2 anche se  $f^{(1)}$  è riattraversata in senso contrario. Diminuendo ulteriormente  $\varepsilon$  fino ad attraversare  $t_1^{(2)}$ , invece, il ciclo di periodo 2 scompare per biforcazione tangente ed il sistema, con una nuova brusca transizione, ritorna sul ciclo stabile iniziale di periodo 1. In sostanza, se  $\varepsilon$  viene alternativamente aumentato e diminuito può verificarsi un fenomeno di *isteresi* in cui il sistema transita alternativamente tra due attrattori di diverso periodo.

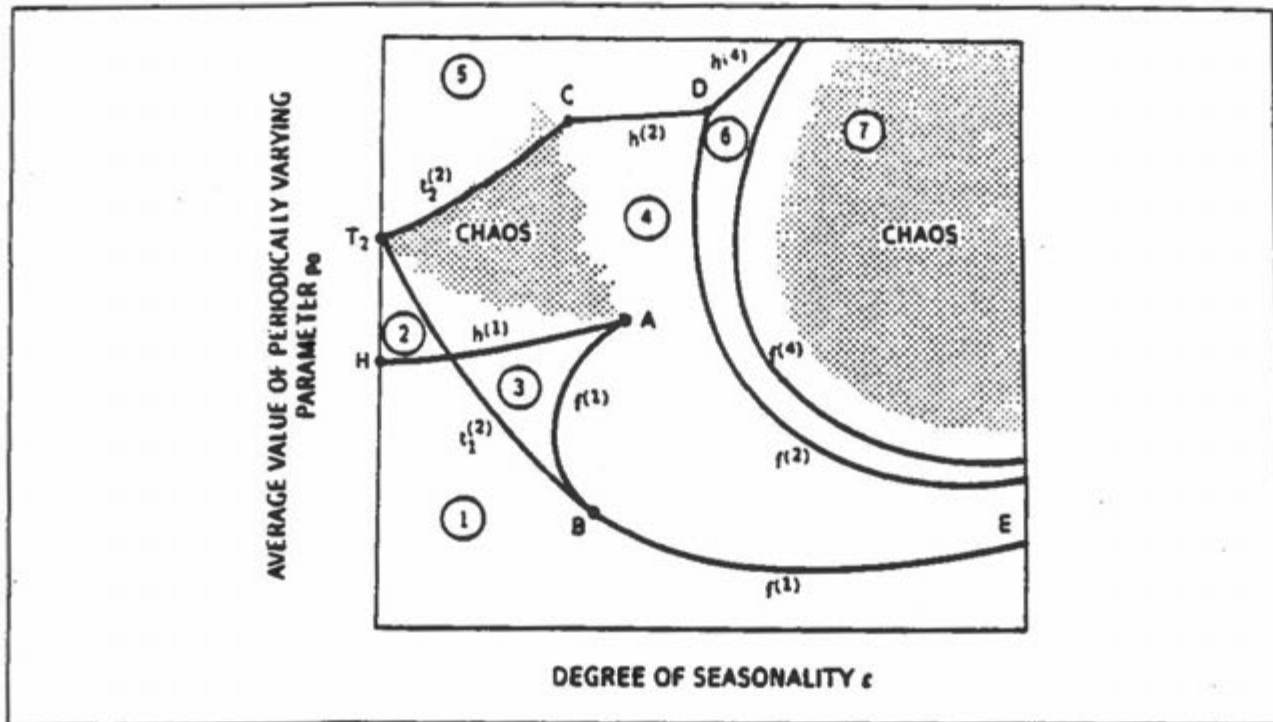
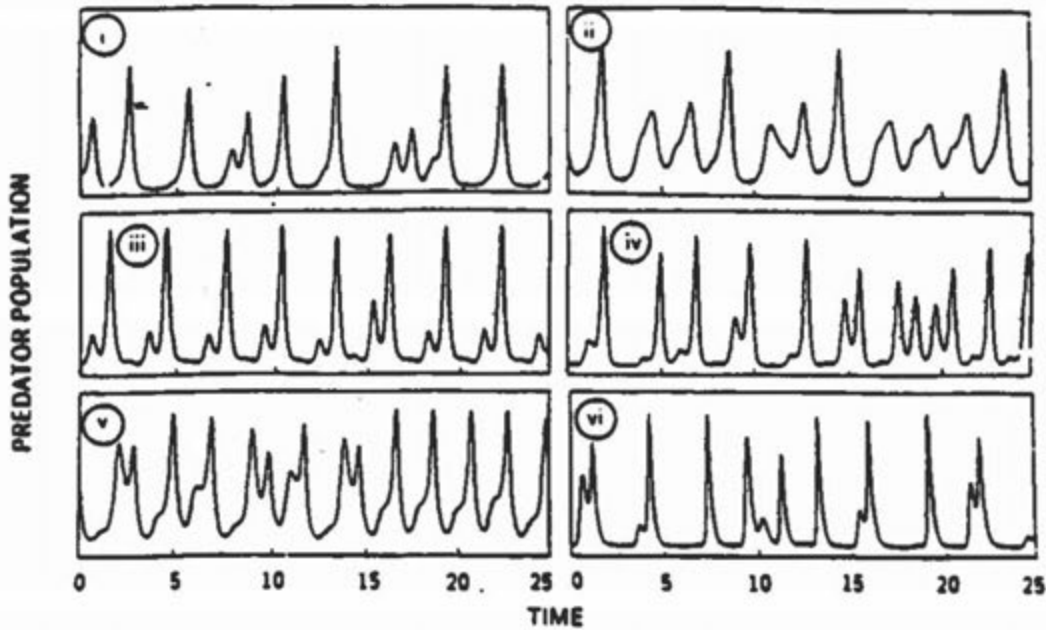


Fig. 8 - Diagramma di biforcazione *universale* per il sistema (7) forzato periodicamente (da Rinaldi *et al.* [1993])

Dalla Fig. 8 emerge inoltre che nel sistema (7) forzato periodicamente sono presenti due diversi meccanismi di nascita del caos (vedi le regioni punteggiate in figura). Il primo di questi, che ha luogo per bassi valori di  $\varepsilon$ , è causato da distruzione di toro (caos omoclino) e può verificarsi solo per valori di  $p_0$  tali per cui il sistema autonomo ha un comportamento ciclico. Il secondo meccanismo, che richiede invece  $\varepsilon$  più elevato, fa seguito ad una cascata di biforcazioni flip e, in alcuni casi, può avere luogo anche per valori di  $p_0$  per cui il sistema autonomo non ha comportamento ciclico (si vedano ad esempio i casi (iii), (iv) e (v) in Fig. 7). In definitiva, dall'analisi del sistema (7) emerge che in una comunità preda-predatore vi può essere comportamento caotico a patto che le sorgenti di periodicità esogena ed endogena siano, nel loro insieme, sufficientemente forti. La Fig. 9 riporta, a titolo di esempio, una serie temporale caotica per ognuno dei sei meccanismi elementari esaminati.



ig. 9 - Serie temporali caotiche ottenute per simulazione del sistema (7) sottoposto ai sei meccanismi elementari di stagionalità (i).....(vi) descritti nel testo (da Rinaldi *et al.* [1993]). Ogni serie è ottenuta per valori dei parametri corrispondenti al punto Q di Fig. 7

#### 4 Altri modelli

n terzo modello di popolazioni di cui è stata studiata la dinamica nell'ipotesi che qualche parametro vari periodicamente, è quello della catena alimentare *nutriente-preda-predatore*. Nel caso ci si riferisca ad un ecosistema acquatico e si supponga che il nutriente sia perfettamente miscelato all'interno del corpo idrico, si ottiene un modello noto come *modello del chemostato*, il nome del più comune apparato usato in laboratorio per effettuare esperimenti sulla crescita di micro-organismi quali batteri e protozoi. Il modello più noto, proposto da Canale [1970], è seguente

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= q(x_{10} - x_1(t)) - \frac{\alpha x_1(t)}{b + x_1(t)} x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= e_2 \frac{\alpha x_1(t)}{b + x_1(t)} x_2(t) - q x_2(t) - \frac{c x_2(t)}{d + x_2(t)} x_3(t) \\ \dot{x}_3(t) &= e_3 \frac{c x_2(t)}{d + x_2(t)} x_3(t) - (q + m) x_3(t)\end{aligned}$$

cui  $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$  e  $x_3(t)$  sono, rispettivamente, le concentrazioni di nutriente, preda e predatore,  $q$  è la portata di alimentazione, supposta uguale a quella di uscita, e  $x_{10}$  è la concentrazione di nutriente nell'alimentazione. Le proprietà del modello del chemostato, nel caso in cui i parametri siano costanti, sono state discusse da Butler *et al.* [1983], Cunningham

e Nisbet [1983], Waltman [1983] e Kuang [1989]. In particolare, è stato dimostrato che al variare dei parametri un equilibrio asintoticamente stabile subisce una biforcazione di Hopf supercritica e si trasforma in un ciclo stabile. In due recenti lavori, rispettivamente di Kot *et al.* [1992] e Pavlou e Kevrekidis [1992], è stato invece analizzato il comportamento del modello nel caso in cui la concentrazione o la portata di alimentazione varino periodicamente. In entrambi i casi sono state individuate numerose biforcazioni, sia locali che globali, e strani attrattori ottenuti alla Feigenbaum o per distruzione di toro. Questi studi rafforzano le conclusioni già tratte con l'analisi del modello preda-predatore, perchè mostrano che la presenza di fattori stagionali può facilmente dar luogo ad un comportamento caotico delle popolazioni.

Naturalmente, sono stati analizzati anche modelli più dettagliati, contenenti un maggior numero di variabili e di parametri. Tra questi possiamo citare modelli di alcune popolazioni di insetti (in particolare di parassiti), modelli di stock ittici soggetti a sfruttamento, nonché uno studio di Doveri *et al.* [1993] sulla dinamica di un ecosistema acquatico costituito da nutriente, fitoplancton, zooplancton e pesci, in cui si mostra come la variabilità stagionale di luce e temperatura possa essere la causa delle grandi differenze e irregolarità che si riscontrano di anno in anno nei dati di sopravvivenza delle specie planctofaghe.

#### 4. CONCLUSIONI

In questo lavoro sono stati presentati alcuni esempi in cui il ruolo delle stagioni è determinante nel generare una dinamica di tipo caotico di alcune popolazioni. Ciò emerge sia dall'approccio *sperimentale*, in cui si analizzano numericamente serie di dati, sia dall'approccio *teorico*, in cui si analizzano le biforcazioni di modelli matematici che descrivono la fenomenologia del processo.

Gli esempi presentati non sono esaustivi delle popolazioni e delle tecniche di analisi discusse in letteratura. Il lettore interessato ad approfondire l'argomento può far riferimento ai lavori di rassegna di Kot *et al.* [1988] e Hastings *et al.* [1993].

#### RINGRAZIAMENTI

Questo lavoro è stato svolto nell'ambito della collaborazione tra la Fondazione E.N.I. Enrico Mattei ed il Centro Interdipartimentale di Ricerca in Informatica Territoriale e Ambientale del Politecnico di Milano (Progetto L.I.V.I.A.).

## RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

- J.C. Allen, Are natural enemy populations chaotic?, in *Estimation and Analysis of Insect Populations, Lecture Notes in Statistics*, L. McDonald, B. Manly, J. Lockwood e J. Logan (ed.), 55, 190-205, Springer-Verlag, 1989.
- R.M. Anderson e R.M. May, Directly transmitted infectious diseases: control by vaccination, *Science*, 215, 1053-1054, 1982.
- G.J. Butler, S.B. Hsu e P. Waltman, Coexistence of competing predators in a chemostat, *J. Math. Biol.*, 17, 133-151, 1983.
- R.P. Canale, An analysis of models describing predator-prey interaction, *Biotech. Bioeng.*, 12, 353-378, 1970.
- A. Cunningham e R.M. Nisbet, Transients and oscillations in continuous culture, in *Mathematics in Microbiology*, M. Bazin (ed.), 77-103, Academic Press, 1983.
- K. Dietz, The incidence of infectious diseases under the influence of seasonal fluctuations, *Lecture Notes in Biomath.*, 11, 1-5, Springer, 1976.
- F. Doveri, M. Scheffer, S. Rinaldi, S. Muratori e Yu.A. Kuznetsov, Seasonality and chaos in a plankton-fish model, *Theor. Pop. Biol.*, 1993.
- H. Emerson, Measles and whooping cough, *Am. J. Public Health*, 27, 1-153, 1937.
- B.T. Grenfell, Chances and chaos in measles dynamics, *J. Royal Statist. Soc. B*, 54, 383-398, 1992.
- J. Guckenheimer e P. Holmes, *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields*, Springer-Verlag, 1983.
- A. Hastings, C.L. Hom, S. Ellner, P. Turchin e H.C.J. Godfray, Chaos in ecology: is mother nature a strange attractor?, *Annu. Rev. Ecol. Syst.*, 1993.
- M. Inoue e H. Kamifukumoto, Scenarios leading to chaos in forced Lotka-Volterra model, *Progr. Theor. Phys.*, 71, 930-937, 1984.
- A.I. Khibnik, Yu.A. Kuznetsov, V.V. Levitin e E.V. Nikolaev, Continuation techniques and interactive software for bifurcation analysis of ODEs and iterated maps, *Physica D*, 62, 360-370, 1993.
- M. Kot, W.M. Schaffer, G.L. Truty, D.J. Graser e L.F. Olsen, Changing criteria for imposing order, *Ecol. Modelling*, 43, 75-110, 1988.
- M. Kot, G.S. Sayler e T.W. Schultz, Complex dynamics in a model microbial system, *Bull. Math. Biol.*, 54, 619-648, 1992.
- Y. Kuang, Limit cycles in a chemostat-related model, *SIAM J. Appl. Math.*, 49, 1759-1767, 1989.
- Yu.A. Kuznetsov, S. Muratori e S. Rinaldi, Bifurcations and chaos in a periodic predator-prey model, *Int. J. Bif. Chaos*, 2, 117-128, 1992.
- Yu.A. Kuznetsov e C. Piccardi, Bifurcation analysis of periodic SEIR and SEIR epidemic models, *J. Math. Biol.*, 1993.



- W. London e J. Yorke, Recurrent outbreaks of measles, chickenpox, and mumps. I. Seasonal variation in contact rates, *Amer. J. Epidem.*, **98**, 453-468, 1973.
- L.F. Olsen, Poliomyelitis epidemics in Denmark over the period 1928-1958 were chaotic, *Math. Comput. Modeling*, **11**, 5-14, 1988.
- L.F. Olsen e W.M. Schaffer, Chaos versus noisy periodicity: alternative hypothesis for childhood epidemics, *Science*, **249**, 499-504, 1990.
- L.F. Olsen, G.L. Truty e W.M. Schaffer, Oscillations and chaos in epidemics: a nonlinear dynamic study of six childhood diseases in Copenhagen, Denmark, *Theor. Pop. Biol.*, **33**, 344-370, 1988.
- S. Pavlou e I.G. Kevrekidis, Microbial predation in a periodically operated chemostat: a global study of the interaction between natural and externally imposed frequencies, *Math. Biosci.*, **108**, 1-55, 1992.
- D.A. Rand e H.B. Wilson, Chaotic stochasticity: a ubiquitous source of unpredictability in epidemics, *Proc. Royal Soc. B*, **246**, 179-184, 1991.
- S. Rinaldi e S. Muratori, Conditioned chaos in seasonally perturbed predator-prey models, *Ecol. Modelling*, 1993.
- S. Rinaldi, S. Muratori e Yu.A. Kuznetsov, Multiple attractors, catastrophes and chaos in seasonally perturbed predator-prey communities, *Bull. Math. Biol.*, **55**, 15-35, 1993.
- G.C.W. Sabin e D. Summers, Chaos in a periodically forced predator-prey ecosystem model, *Math. Biosciences*, **113**, 91-113, 1993.
- W.M. Schaffer, Perceiving order in the chaos of nature, in *Evolution of Life Histories of Mammals*, M.S. Boyce (ed.), 313-350, Yale University Press, 1988.
- W.M. Schaffer e M. Kot, Nearly one dimensional dynamics in an epidemic, *J. Theor. Biol.*, **112**, 403-427, 1985.
- W.M. Schaffer, L.F. Olsen, G.L. Truty, S.L. Fulmer e D.J. Graser, Periodic and chaotic dynamics in childhood epidemics, in *From Chemical to Biological Organization*, M. Markus, S. Muller e G. Nicolis (ed.), 331-347, Springer, 1988.
- I.B. Schwartz, Multiple stable recurrent outbreaks and predictability in seasonally forced nonlinear epidemic models, *J. Math. Biol.*, **21**, 347-361, 1985.
- I.B. Schwartz e H.L. Smith, Infinite subharmonic bifurcation in an SEIR epidemic model, *J. Math. Biol.*, **18**, 233-253, 1983.
- R.V. Solé e J. Valls, Nonlinear phenomena and chaos in a Monte Carlo simulated microbial ecosystem, *Bull. Math Biol.*, **54**, 939-955, 1992.
- N. Stollenwerk, Radial basis functions reconstruction from a time series of the measles cases in New York City, Rheinisch-Westfalischen Technischen Hochschule, Aachen (Germania), 1992.
- M. Toro e J. Aracil, Qualitative analysis of system dynamics ecological models, *Syst. Dyn. Rev.*, **4**, 56-80, 1988.



- P. Turchin e A. Taylor, Complex dynamics in ecological time series, *Ecology*, 73, 289-305, 1992.
- P. Turchin e J.A. Millstein, EcoDyn/RSM: Response Surface Modeling of nonlinear ecological dynamics, *Applied Biomathematics*, Setauket, 1993.
- P. Waltman, *Competition Models in Population Biology*, SIAM, 1983.
- S. Wiggins, *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos*, Springer-Verlag, 1990.

