<u>*Analisi di biforcazione con MatCont*</u>

Modello risorse-consumatori

Si consideri il seguente modello risorse (x_1) – consumatori (x_2) in presenza di sfruttamento (P)

$$\dot{x}_1 = r x_1 \left(1 - \frac{x_1}{K}\right) - a_1 \frac{x_1}{b_1 + x_1} x_2$$
$$\dot{x}_2 = e_2 a_1 \frac{x_1}{b_1 + x_1} x_2 - m_2 x_2 - a_2 \frac{x_2}{b_2 + x_2} P$$

I valori di riferimento dei parametri, eccetto P, sono:

$r = 1$; $K = 1$; $a_1 = 1$; $b_1 = 0.2$; $e_2 = 1$; $m_2 = 0.5$; $a_2 = 1$; $b_2 = 0.4$.

a) Si simuli il sistema per P = [0.1; 0.147; 0.16; 0.2].

b) Si tracci il diagramma di biforcazione nello spazio (P, x_1, x_2).

c) Si tracci il diagramma di biforcazione nello spazio (P, K) con $P \in [0, 0.7]$ e $K \in [0, 3]$.

d) Si supponga ora che, per motivi stagionali, lo sfruttamento P possa variare periodicamente nel tempo secondo l'espressione

$$P(t) = \bar{P}(1 + \varepsilon sen\omega t) \qquad \omega = 0.2$$

Si dica se, per opportuni valori di $\bar{P}$ ed ε, il sistema possa avere andamento quasi periodico e caotico[1]. In caso affermativo, si mostrino le sezioni di Poincaré e si calcolino gli esponenti di Liapunov[2].

---

[1] MatCont analizza solo sistemi autonomi. E' pertanto necessario sostituire la funzione $sen\omega t$ con una nuova variabile x_3 del sistema. Ciò si ottiene aggiungendo al sistema dato due nuove variabili di stato x_3 e x_4 descritte da

$$\dot{x}_3 = x_3 + \omega x_4 - (x_3^2 + x_4^2) x_3$$
$$\dot{x}_4 = x_4 - \omega x_3 - (x_3^2 + x_4^2) x_4$$

la cui soluzione a regime rende x_3 proprio pari il comportamento desiderato.

[2] Per calcolare gli esponenti di Liapunov si faccia riferimento ai file allegati all'esercitazione.