

## TRACCE DELLA SOLUZIONE

Mediante pplane visualizziamo le isocline del sistema

Figure 1: pplane9 Setup

File Edit Gallery Desktop Window Help

The differential equations.

$$\dot{x}_1 = -0.1x_1 + (\exp(x_2) - \exp(-x_2)) / (\exp(x_2)/R1p - \exp(-x_2)/R1m) + A2$$

$$\dot{x}_2 = -0.3x_2 + (\exp(x_1) - \exp(-x_1)) / (\exp(x_1)/R2p - \exp(-x_1)/R2m) + A1$$

Parameters or expressions

A1 =	0.525	A2 =	0.25
R1p =	1	R1m =	-1
R2p =	2	R2m =	-1

The display window.

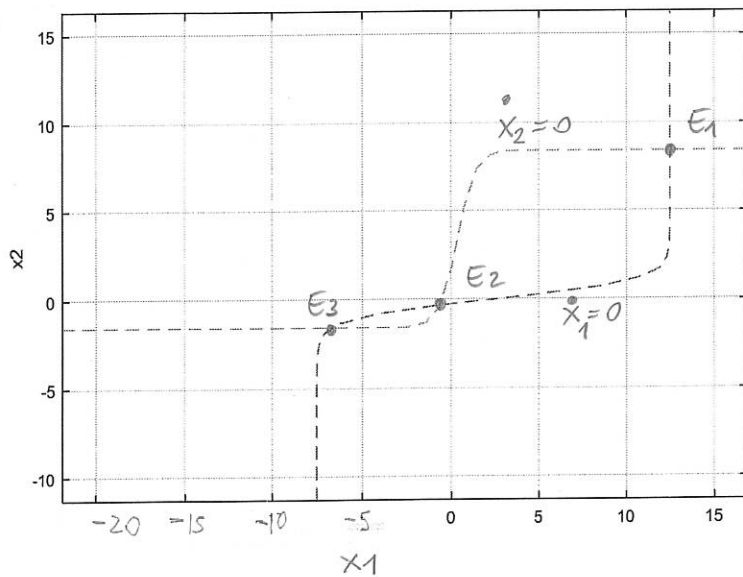
The minimum value of x1 = -20  
 The maximum value of x1 = 15  
 The minimum value of x2 = -10  
 The maximum value of x2 = 15

The direction field.

☐ Arrows  
☐ Lines  
☒ Nullclines  
☐ None

Number of field points per row or column.  
 20

Quit Revert Proceed



Equilibri

$\dot{x}_1 = 0$   
 $\dot{x}_2 = 0$   $\rightarrow$  sono 3:  $E_1, E_2, E_3$

Solutions  $\rightarrow$  Find an equilibrium point riporta per i tre equilibri i seguenti risultati:

There is a nodal sink at (12.5, 8.4167).

The Jacobian is:  
 -0.1 1.9551e-07  
 0 -0.3

The eigenvalues and eigenvectors are:  
 -0.1 (1, 0)  
 -0.3 (-9.7755e-07, 1)

$E_1$  è un  
nodo stabile

There is a nodal sink at (-6.6912, -1.5833).

The Jacobian is:  
 -0.1 0.15522  
 4.6263e-06 -0.3

The eigenvalues and eigenvectors are:  
 -0.099996 (1, 2.3131e-05)  
 -0.3 (-0.61311, 0.79)

$E_3$  è un  
nodo stabile

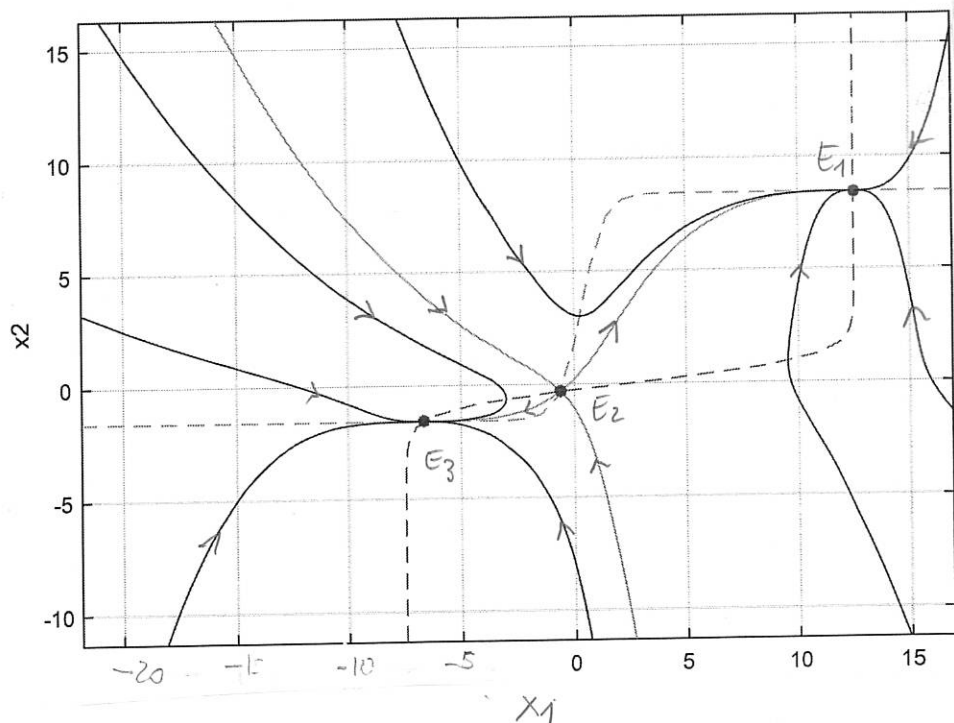
There is a saddle point at (-0.62165, -0.32294).

The Jacobian is:  
 -0.1 0.90255  
 0.66092 -0.3

The eigenvalues and eigenvectors are:  
 0.57879 (0.7992, 0.60106)  
 -0.97879 (-0.71648, 0.69761)

$E_2$  è una sella

Simulando, infatti, si ottiene



A seconda della condizione iniziale la coppia tende verso  $E_1$  (sentimenti positivi) o verso  $E_3$  (sentimenti negativi).

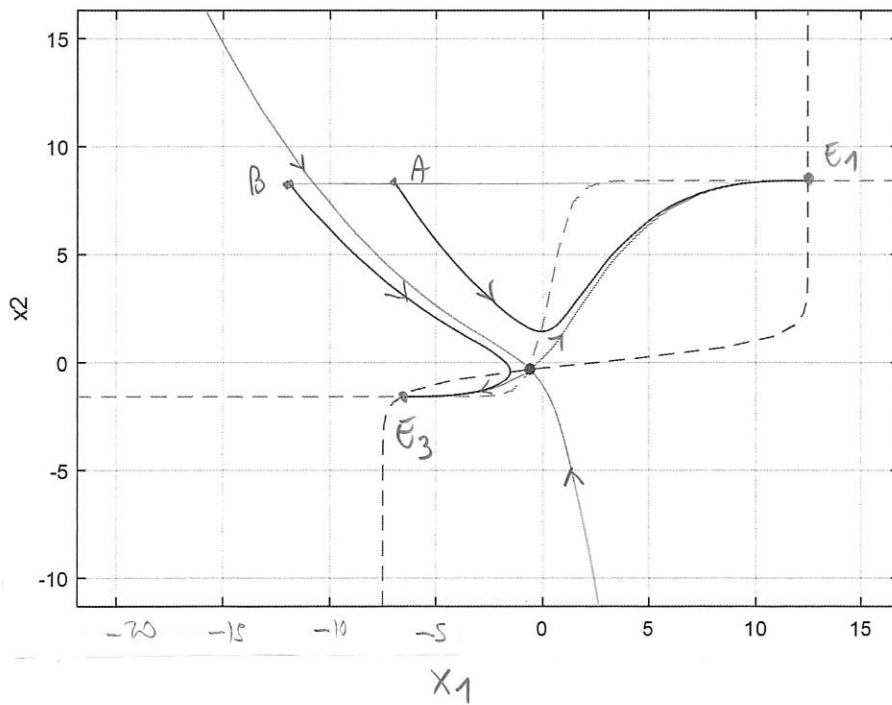
I bacini di attrazione dei 2 equilibri stabili sono definiti dalla varietà stabile della sella  $E_2$  (ottenuta mediante   
 solutions  $\rightarrow$  Plot   
 stable and unstable   
 orbits)



Curiosità: Supponiamo che la coppia sia in  $E_1$  ("felice") e che l'individuo 1 abbia un improvviso calo di interesse per il proprio partner 2.  $\Rightarrow x_1$  diminuisce.

Se il calo non è troppo accentuato (= la condizione iniziale del sistema  $\in B_{E1}$ ) la coppia può ritornare nel suo stato di coppia "felice" (vedi punto A). Se, al contrario, il calo di interesse è stato importante (la nuova condizione iniziale  $\in B_{E3}$ ) la coppia si porta verso una situazione di antipatia reciproca (vedi punto B).

Opportunità di questo tipo sono dette "fragili"



$$A \in B_{E_1}$$

$$B \in B_{E_3}$$

Vediamo come variano le isocline (e quindi gli equilibri) al variare dei termini di fascino  $A_1$  e  $A_2$

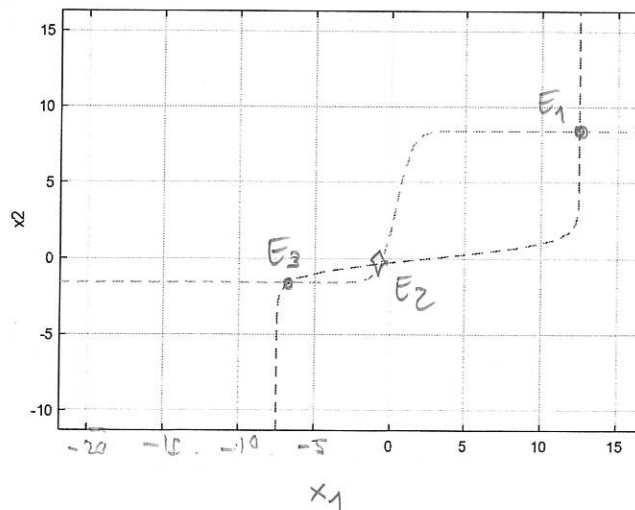
(si cambia il valore del parametro nella finestra di Setup e con proceed si tracciano le nuove isocline)

• Variazione di  $A_2$

• nodo stabile    • sella

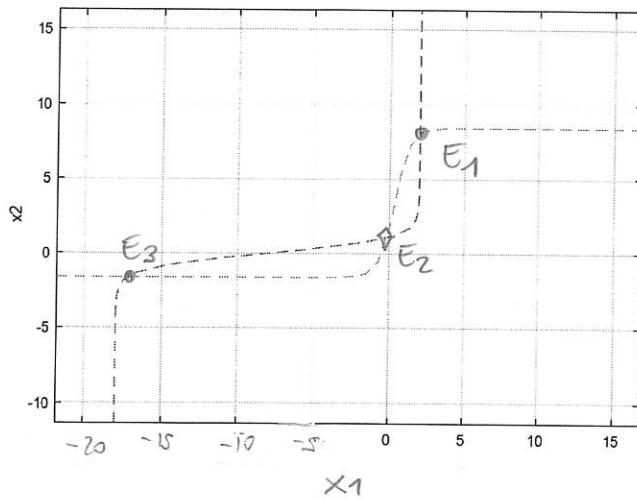
Situazione iniziale

$$A_2 = 0,25$$



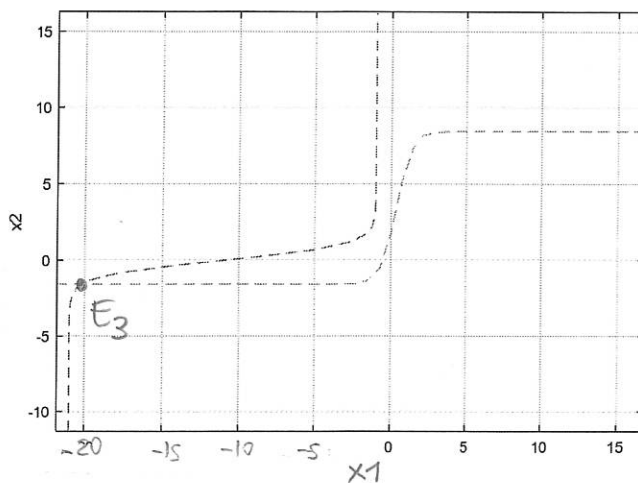
Diminuiamo  $A_2$

$$A_2 = -0,8$$



$E_1$  ed  $E_2$  si avvicinano!

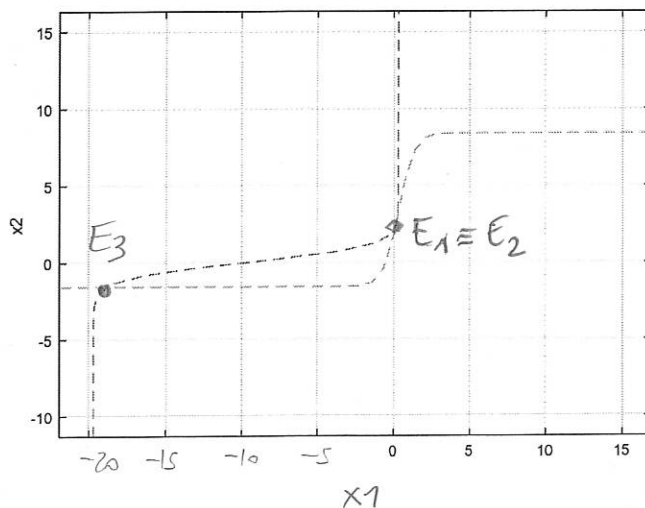
$$A_2 = -1,1$$



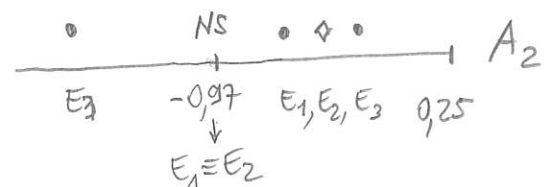
$E_1$  ed  $E_2$  sono scomparsi!

$E_1$  ed  $E_2$  spariscono via biforcazione nodo-sella per  $A_2 \approx -0,97$   
NS

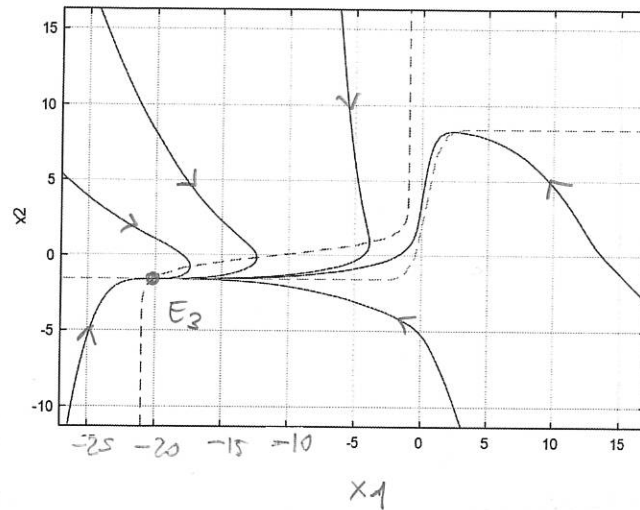
$$A_2 \approx -0,97$$



Per  $A_2$  decrescenti ho quindi trovato:

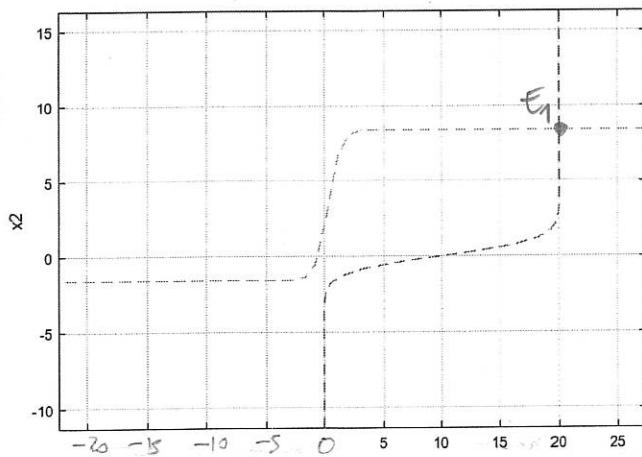


Nota: Per  $A_2 = -1,1$  la coppia tende sempre verso la situazione di antipatia reciproca  $E_3$



Se, invece, aumentiamo  $A_2$ :

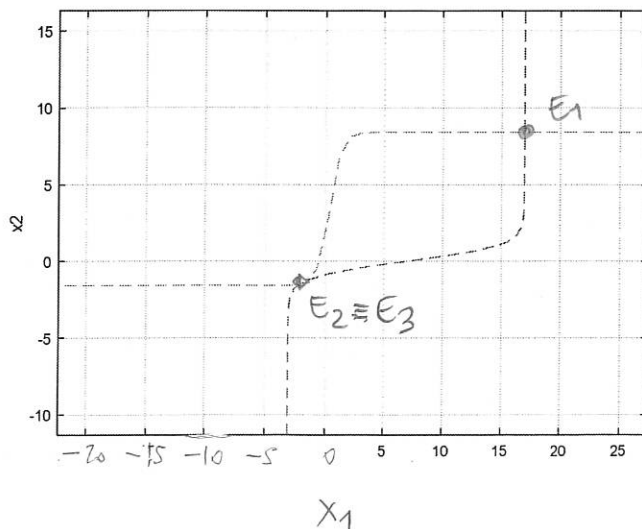
$$A_2 = 1$$

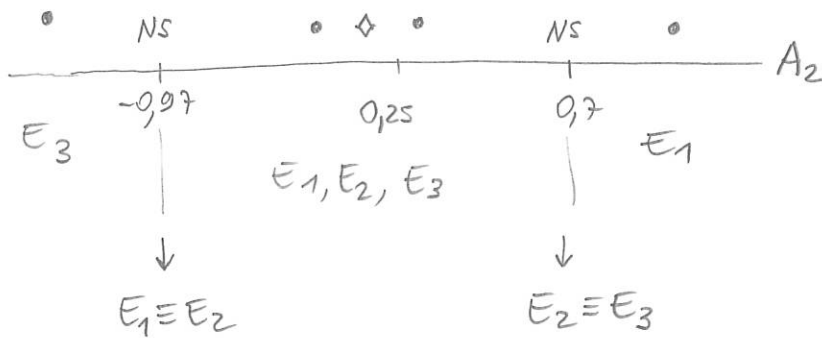


$E_2$  ed  $E_3$  sono scomparsi!

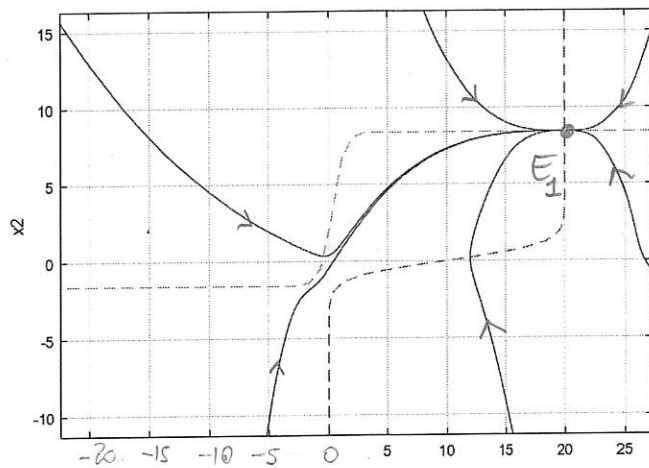
Si ha una biforcazione nodo-sella per  $A_2 \approx 0,7$

$$A_2 \approx 0,7$$





Nota Per  $A_2 = 1$  la coppia tende sempre verso la situazione di amore reciproco  $E_1$

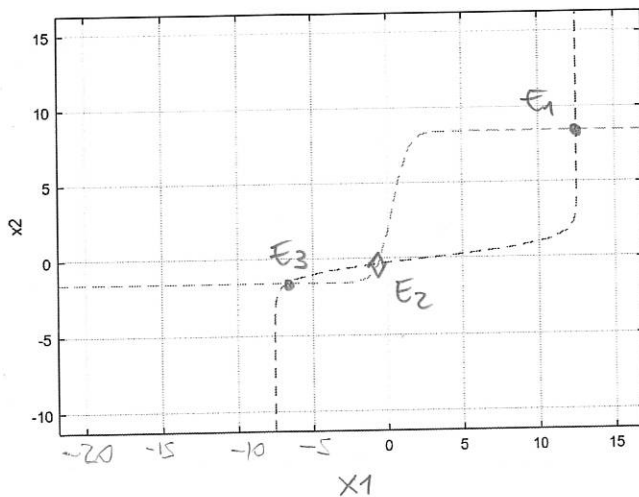


Qualunque cosa di interesse, riporta la coppia in  $E_1$ .  
Tale coppia si definisce "robusta".

Variatione di  $A_1$  ( $A_2 = 0,25$ )

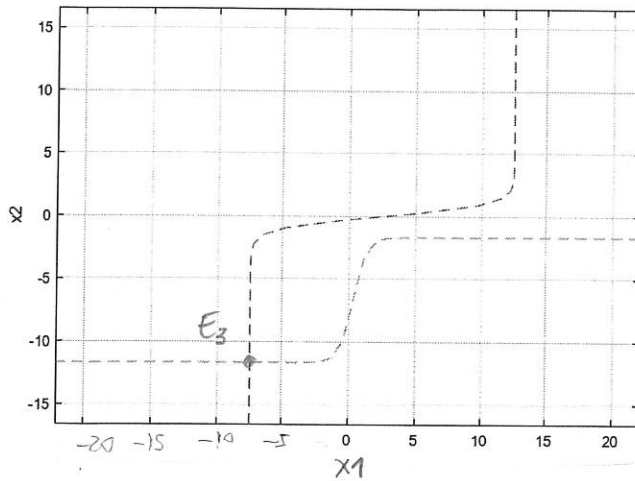
Situazione iniziale

$A_1 = 0,525$



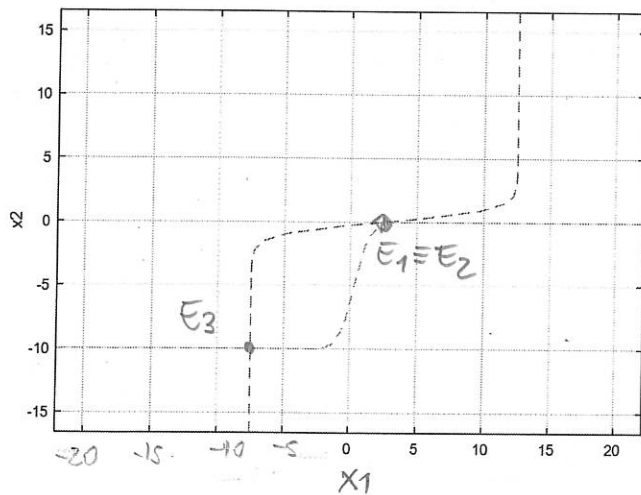
Diminuiamo  $A_1$

$$A_1 = -2,5$$



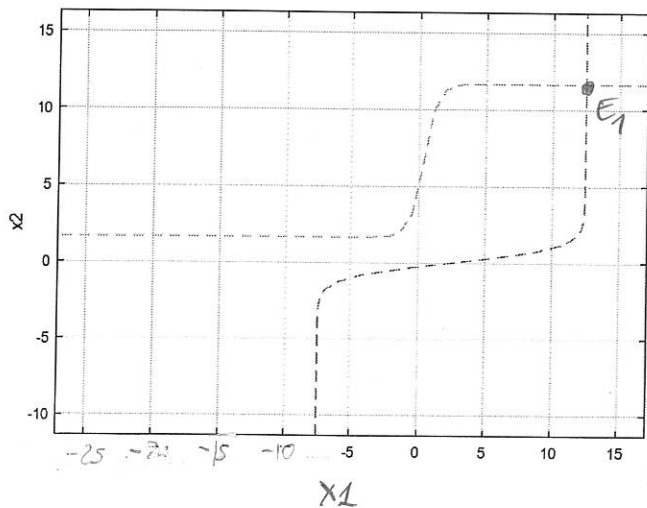
$E_1$  ed  $E_2$  scompaiono via biforcazione nodo-sella per  $A_1 \approx -2$

$$A_1 = -2$$



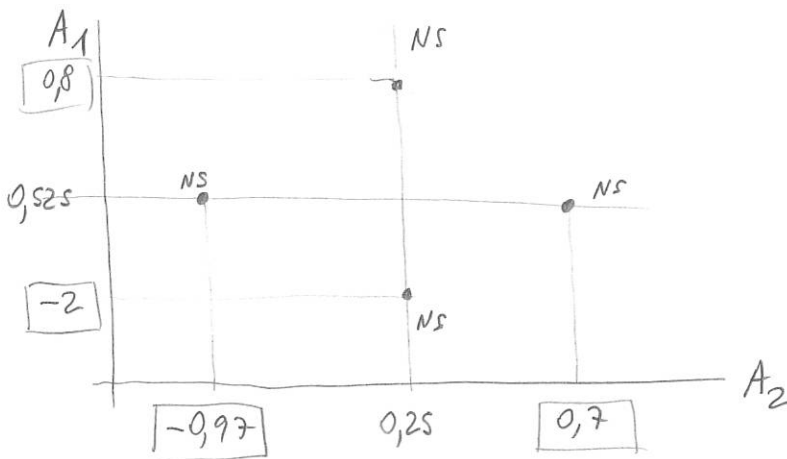
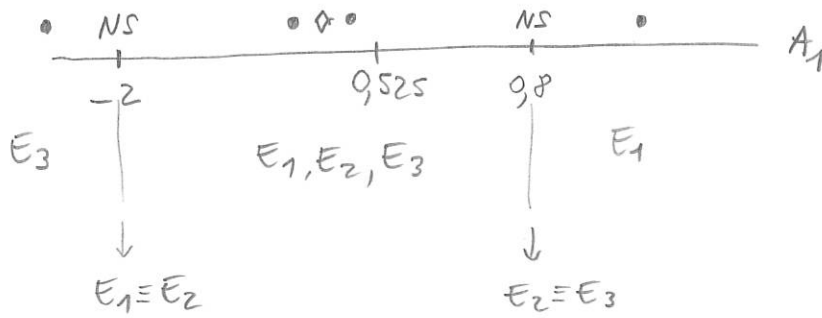
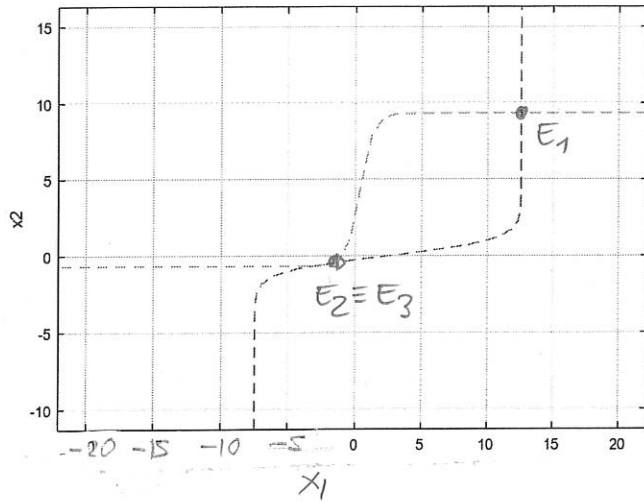
Aumentiamo  $A_1$

$$A_1 = 1,5$$



$E_2$  ed  $E_3$  scompaiono via biforcazione nodo-sella per  $A_1 \approx 0,8$

$$A_1 = 0,8$$



Sono 4 punti di  
biforcazione nodo-sella

Determiniamo con Matcont le linee di biforcazione  
nodo-sella (partenti per tali punti)



Select → System → New

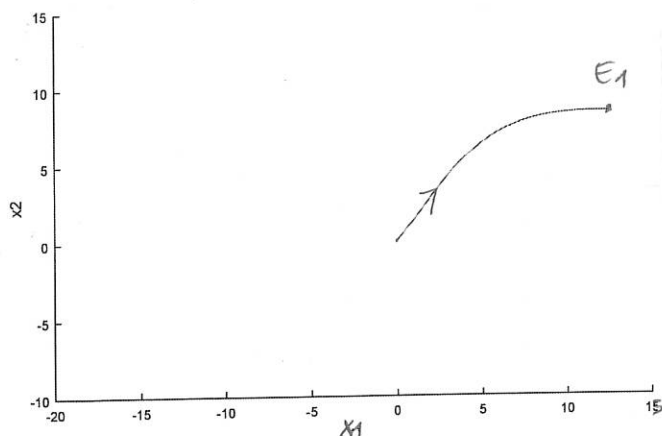
Type → Initial Point → Point

Facciamo ora una simulazione per portare il sistema verso l'equilibrio

Window → Graphic → 2Dplot  
Layout → Variables on axes  
" → Plotting region

Apriamo una finestra grafica  
visualizziamo  $x_1$  e  $x_2$   
 $x_1 \in (-20, 15)$   
 $x_2 \in (-10, 15)$

Compute → Forward Eseguiamo la simulazione  
Il sistema tende verso  $E_1$



Con Select → Curve → Actions → Rename rinominiamo la curva in TR1

Con Select → Initial Point selezioniamo l'ultimo punto della curva TR1: è l'equilibrio  $E_1$

Vogliamo ora "continuare" l'equilibrio  $E_1$  rispetto al parametro  $A_2$

Type → Initial Point → Equilibrium

Nella finestra Matcont, Curve Type viene aggiornato a EP (equilibrium point); questa è proprio la curva che vogliamo calcolare (pertanto non occorre selezionarla con Type → Curve → Equilibrium ⇒ è già scelta in "automatic" dopo la scelta di Equilibrium come Initial Point)

Nella finestra Continuation Data finché Max Num Points a 300. Nella finestra Starter selezionare  $A_2$  come parametro di continuazione dell'equilibrio

Continuation Data

InitStepsize	0.01
MinStepsize	1e-5
MaxStepsize	0.1

Corrector Data

MaxNewtonIters	3
MaxCorriters	10
MaxTestIters	10
VarTolerance	1e-6
FunTolerance	1e-6
TestTolerance	1e-5
Adapt	3

Stop Data

MaxNumPoints	300
ClosedCurve	50

Initial Point

x1	12.499386
x2	8.4166599
A1	0.525
<input checked="" type="radio"/> A2	0.25
alfa1	0.1
alfa2	0.3
R1p	1
R1m	-1
R2p	2
R2m	-1

Jacobian Data

increment	1e-05
-----------	-------

Monitor Singularities

Branching	yes
Hopf	yes
Limit point	yes
Calculate eigenvalues	yes

Nelle finestre grafiche cambiamo gli assi (Layout → Variables on Axes) in A2 e x1 fissando opportunamente gli estremi (Layout → Plotting Region)

Variables on axes

Absciss	A2	Parameters
Ordinate	x1	Coordinates

OK Cancel

2D Plotting region:1

Abscissa	-1.5	...	1.2
Ordinate	-25	...	20

Durante la "continuazione" dell'equilibrio  $E_1$  vogliamo monitorare il valore degli autovalori della matrice Jacobiana in  $E_1$  (per capire la stabilità di  $E_1$ )

(in MatCont)

Window → Numeric apre una finestra numerica

(in Numeric)

Window → layout → eigenvalues

Numeric

Window

Coordinates

x1
x2

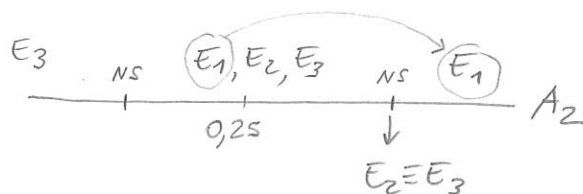
Parameters

A1
A2
alfa1
alfa2
R1p
R1m
R2p
R2m

Eigenvalues

Re[1]
Re[2]
Im[1]
Im[2]

Compute  $\rightarrow$  Forward  $\rightarrow$  continua l'equilibrio all'aumentare di  $A_2$   
 $E_1$  non subisce biforcazioni



Compute  $\rightarrow$  Backward  $\rightarrow$  continua l'equilibrio al diminuire di  $A_2$

$E_1$  subisce la biforcazione nodo-sella per  
 $A_2 = -0.9708...$  (con pplane avevamo previsto  $-0.97$ )

Select	Compute	Window	Type	Options	Help
Class	ODE				
System	amore				
Curve	EP_EP(4)				
Point Type	EP				
Curve Type	EP				
Derivatives	NNNNN				
Duration					
Status	Limit point				

$\rightarrow$  è una nodo-sella

Coordinates	
x1	0.18823177
x2	2.6315085
Parameters	
A1	0.525
A2	-0.9708709
alfa1	0.1
alfa2	0.3
R1p	1
R1m	-1
R2p	2
R2m	-1
Eigenvalues	
Re[1]	-0.4
Re[2]	-1.52239e-08
Im[1]	0
Im[2]	0

$\leftarrow$  valore di  
biforcazione  
 $E_1 \equiv E_2$

$\leftarrow \lambda = 0$

Con Resume si può andare avanti nella "continuazione"  
dell'equilibrio che ora non è più  $E_1$ , ma è l'equilibrio  
che ha fatto la biforcazione con  $E_1$ , cioè la sella  
 $E_2$ . Notiamo infatti che nella finestra Numeric un  
autovalore è negativo e l'altro è positivo.  $A_2$  aumenta,  
 $E_2$  subisce una biforcazione nodo-sella per  
 $A_2 = 0.722...$  (avevamo previsto  $0.7$ )

(Status = Limit Point nella finestra MatCont)

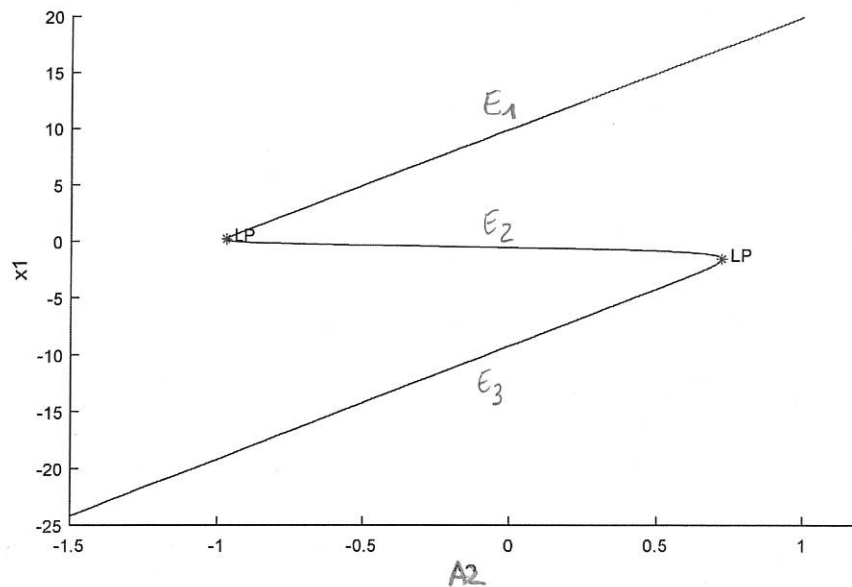
Coordinates  
 x1 -1.5477479  
 x2 -1.3620767

Parameters  
 A1 0.525  
 A2 0.72209906  
 alfa1 0.1  
 alfa2 0.3  
 R1p 1  
 R1m -1  
 R2p 2  
 R2m -1

Eigenvalues  
 Re[1] -0.399999  
 Re[2] -9.0464e-07  
 Im[1] 0  
 Im[2] 0

un valore di biforcazione  
 $E_2 \equiv E_3$

$\lambda = 0$

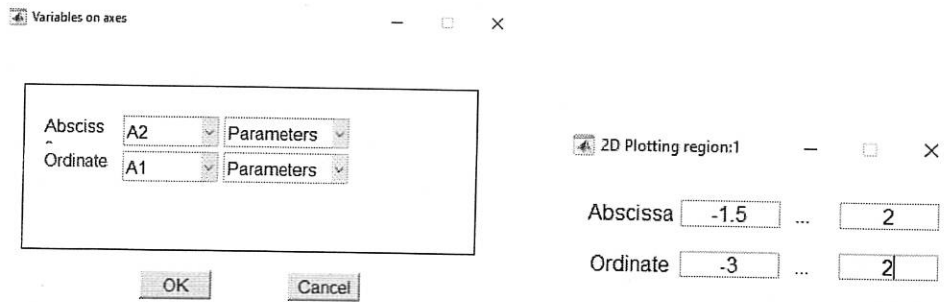


Select → Curves → Actions → Rename

Rinomminiamo la curva in EQA2

I due punti di biforcazione nodo-sella (LP) sono stati  
 ottenuti per un preciso valore di  $A_1$ . Vogliamo ora vedere  
 come tali punti variano al variare di  $A_1 \Rightarrow$  vogliamo  
 tracciare la curva di biforcazione nodo-sella  
 nel piano  $(A_2, A_1)$

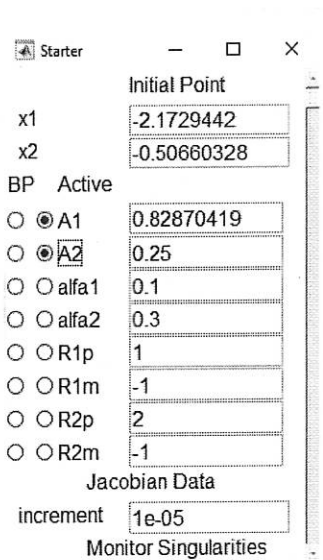
Nella finestra grafica cambiamo assi ed estremi:



Select → Initial Point      Selezioniamo il primo punto LP: limit point  
sulla curva EQA2

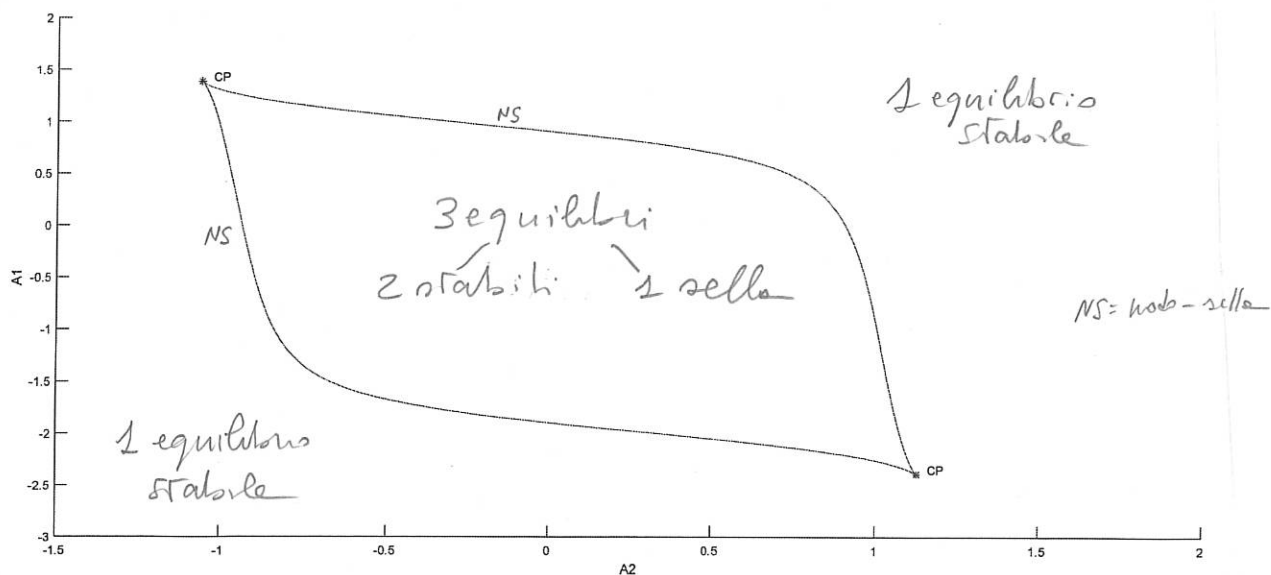
Nella finestra MatCont Curve Type viene specificato a LP (è grazie  
la curva che vogliamo determinare)

Nella finestra Starter attribuiamo i due parametri di  
biforcazione: A1 e A2



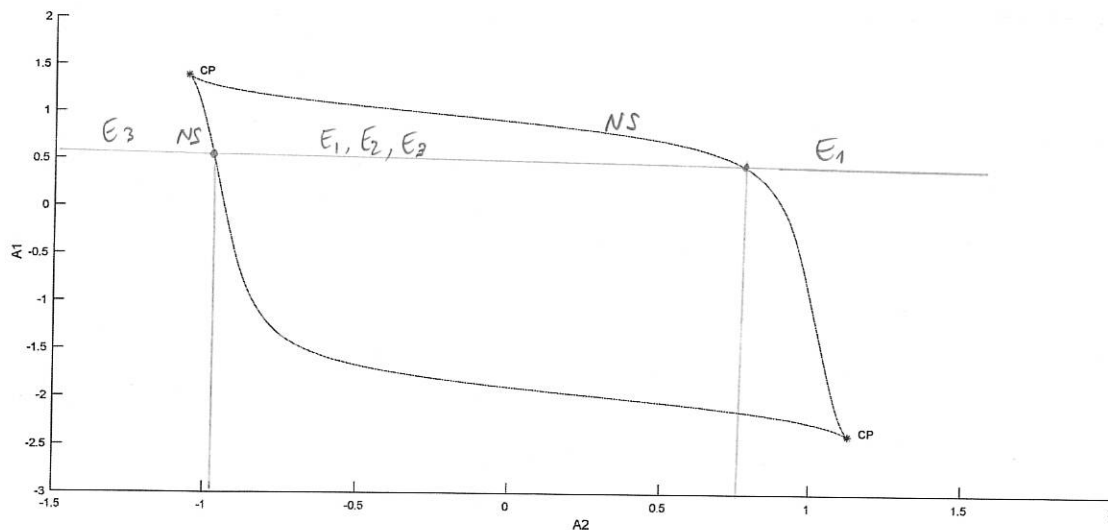
Durante il calcolo si ottengono due punti di cuspidale CP  
in cui si incontrano le biforcazioni nodo-sella.

Select → Curve → Actions → Rename → NSA1A2

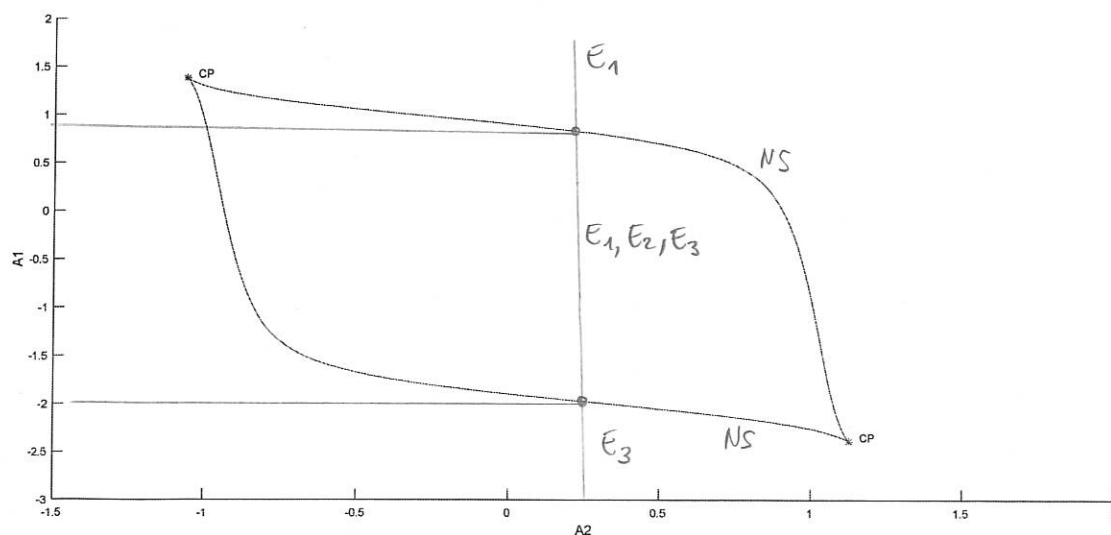


### Note

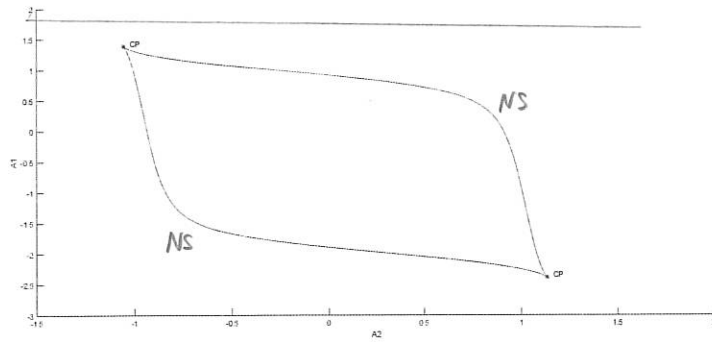
- Con pplane  $A_1 = 0,525 \Rightarrow NS$  in  $-0,97$  e  $0,7$



- Con pplane  $A_2 = 0,25 \Rightarrow NS$  in  $-2$  e  $0,8$



- Senza attraversare curve di biforcazione, il passaggio da  $E_3$  ad  $E_1$  avviene in modo graduale



$$A_1 = 1,8$$

