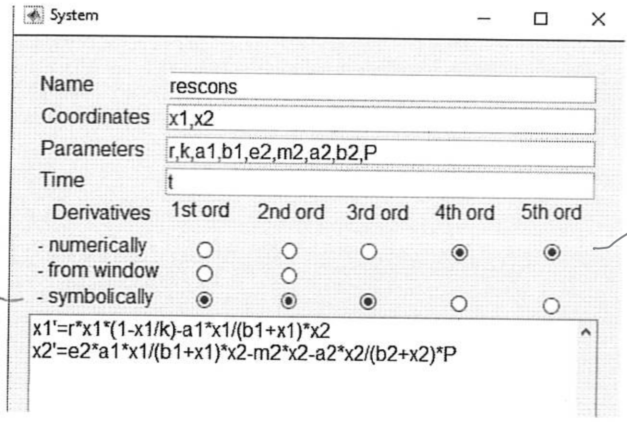
TRACCE DELLA SOLUZIONE

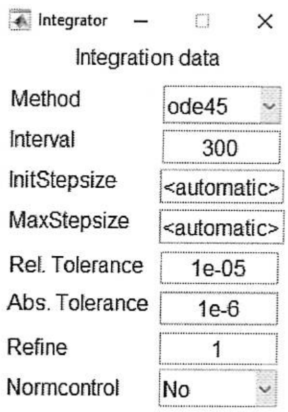
a) Select → System → New

Per produrre la curva di biforcazione transcritica porre tutte le derivate a "numerically"

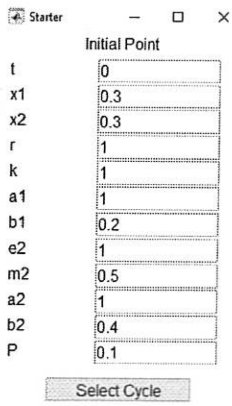
le prime tre derivate poste come "Simbolically" serviranno per esponenti di Liapunov + Omoclina

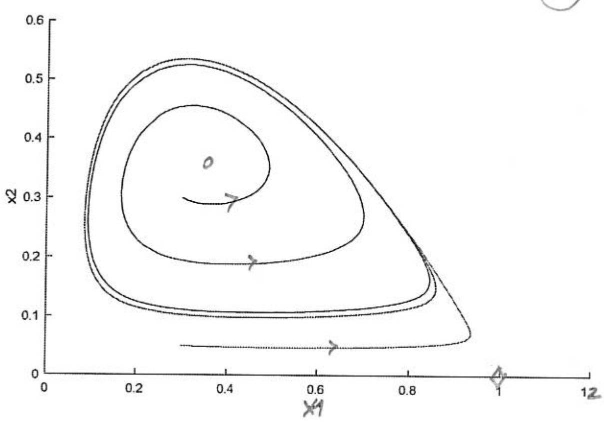


Type → Initial Point → Point



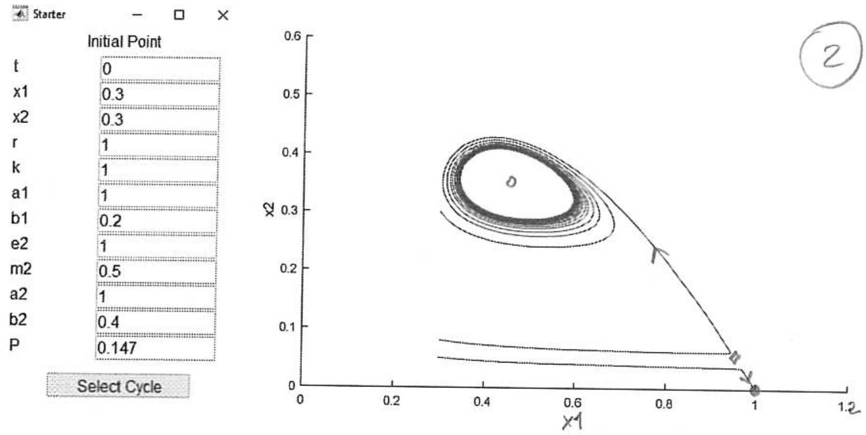
①





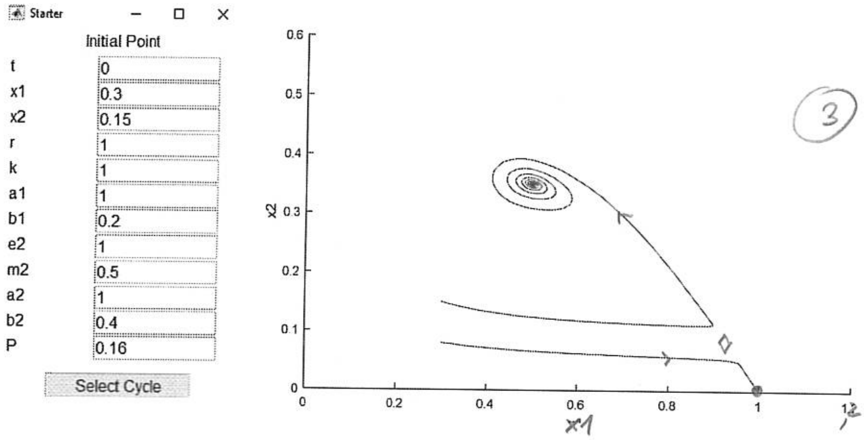
Transcritica TC

transcritica TC



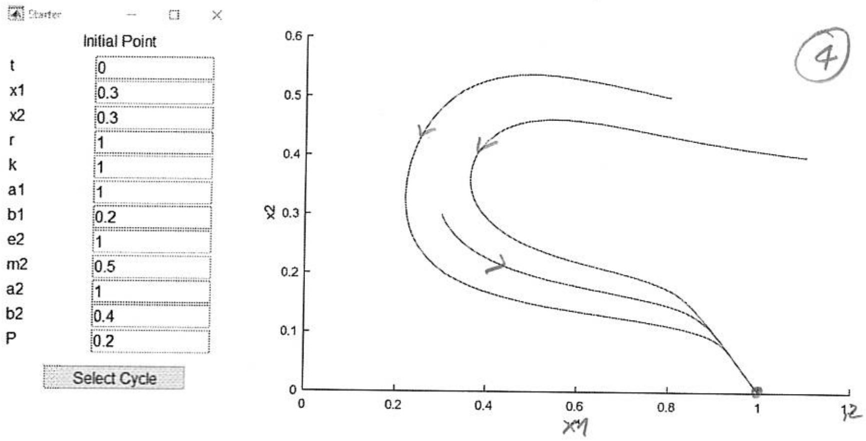
2

Hopf
H

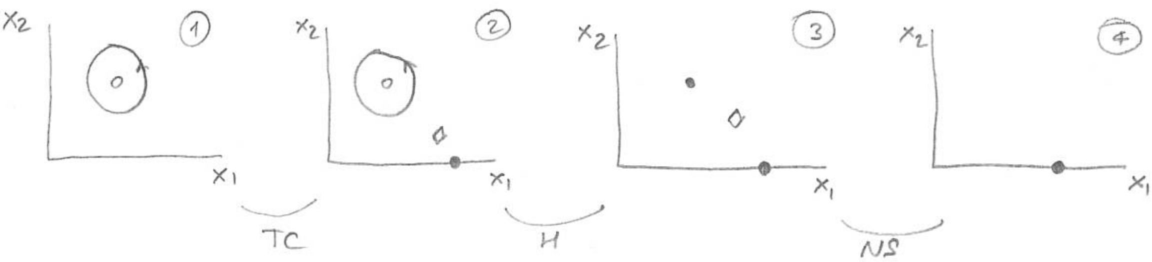


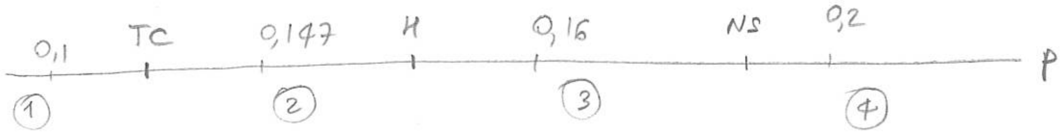
3

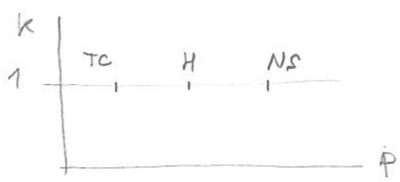
Nodo della NS



4







b)

Parto da $P = 0.1$ e cerco l'equilibrio instabile (Compute → Backward), lo seleziono (Select → Initial Point) e lo continuo rispetto a P (memorizzo in eqP con Select → Curve → Actions → Rename).

Continuation Data	
InitStepsize	0.001
MinStepsize	1e-5
MaxStepsize	0.01
Corrector Data	
MaxNewtonIters	3
MaxCorrIters	10
MaxTestIters	10
VarTolerance	1e-06
FunTolerance	1e-06
TestTolerance	1e-05
Adapt	3
Stop Data	
MaxNumPoints	300
ClosedCurve	50

Durante la continuazione trovo:

→ lo rilegge in Matlab

H: Hopf $P = 0.1513$ (coeff < 0, supercritica)

LP: Nodo-Sella $P = 0.18611$

BP: Transcritica $P = 0.1333$

→ sono già attivati P e Period

Seleziono su eqP il punto di Hopf e continuo i cicli al variare di P (memorizzo in cicliPP), fissando

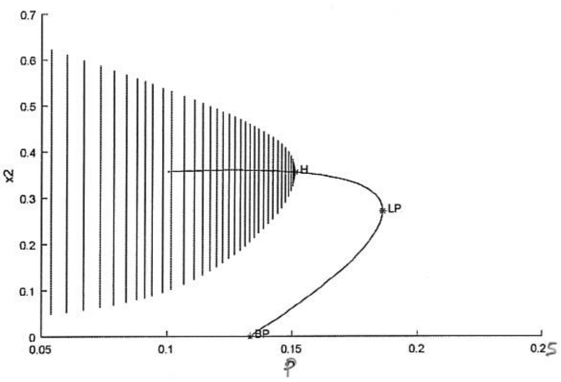
↳ Point Type H
Curve type LC → limit cycle

Continuation Data	
InitStepsize	0.01
MinStepsize	1e-5
MaxStepsize	0.2

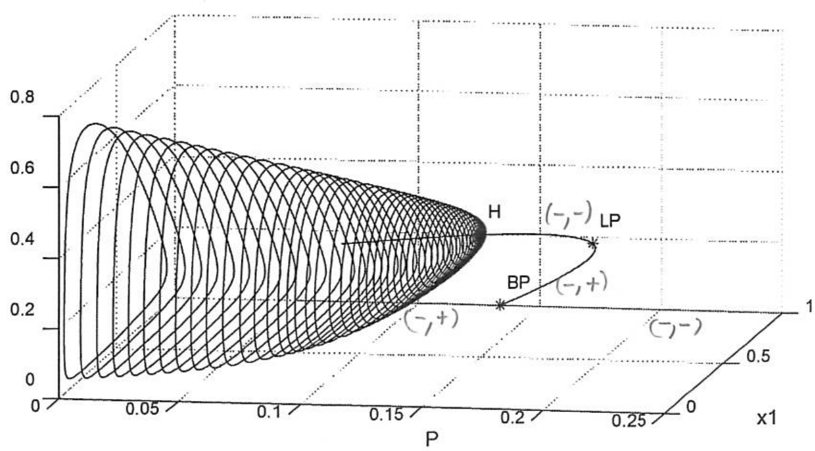
Continuo rispetto a P anche l'equilibrio $(K, 0)$ (memorizzo in eqKP). Si ha solo una transcritica in $P = 0.1333$

↳ Type → Initial Point → Equilibrium, fisso x_1 a $k=1$ e x_2 a 0. Poi Compute Forward con $P = 0,1$

Diagrammando eqP, cicliPP ed eqKP, ottengo



da cui




```
>> view(11,20)
>> grid
```

$P \in [0, 0.25]$
$x_1 \in [0, 1]$
$x_2 \in [0, 0.8]$

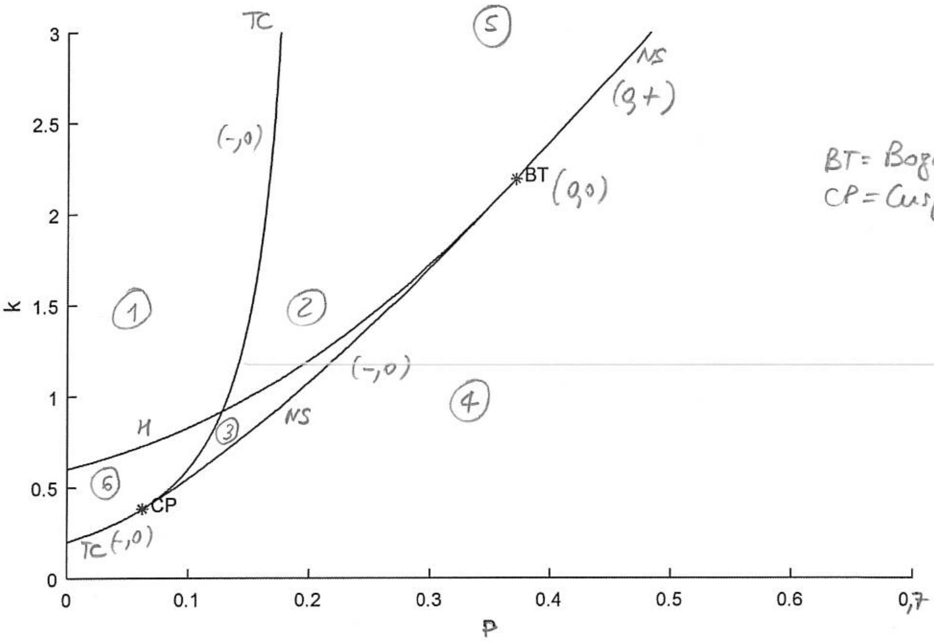
(*) Prima di calcolare la biforcazione transcritica occorre fare l'edit del modello e porre "numerically" per il calcolo di tutte le derivate.

c)

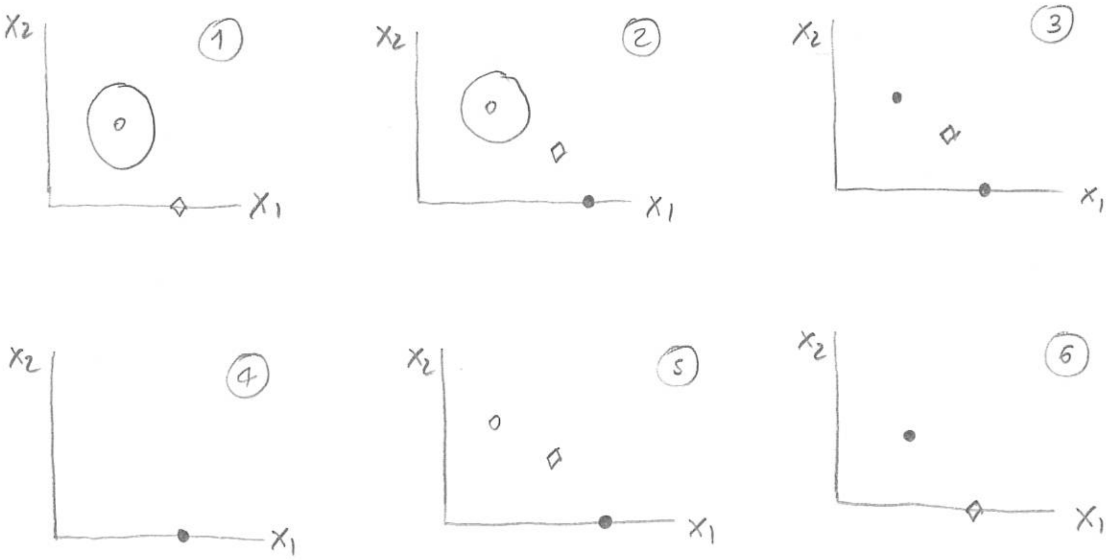
Dalla curva eqP seleziono il punto di Hopf e determino la biforcazione di Hopf (cambia il tipo di curva!!! Type → Curve → Hopf) al variare di *K* e *P* (vanno attivati come parametri attivi) (memorizzo in hopfPK1 - forward - e hopfPK2 - backward). → Fermarsi al punto di Bogdanov-Takens BT

Dalla curva eqP seleziono il punto di nodo-sella LP e traccio la biforcazione nodo-sella al variare di *K* e *P* (vanno attivati come parametri attivi) (memorizzo in nsPK1 e nsPK2, fermarsi al punto CP in cui x2 = 0 e in cui si aggancia la transcritica).

(*) Dalla curva eqP seleziono il punto di transcritica BP e traccio la biforcazione transcritica al variare di *K* e *P* selezionando come curva *Branch Point (codim 1)* (*K* e *P* vanno attivati come parametri attivi) (memorizzo in tcPK1 e tcPK2).

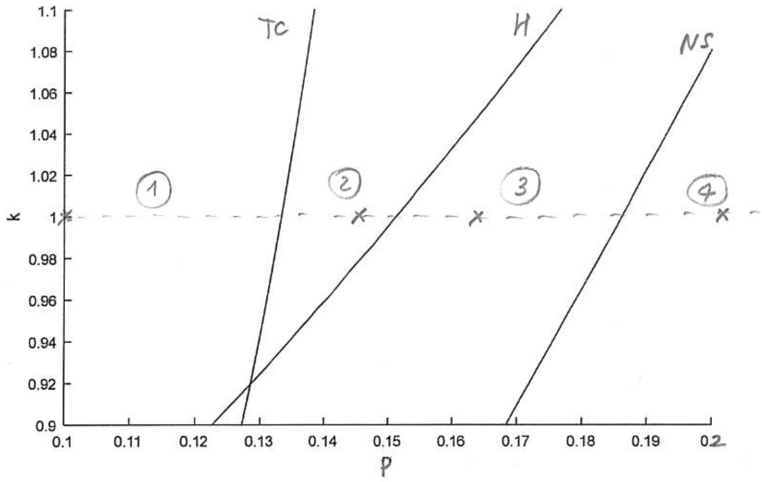


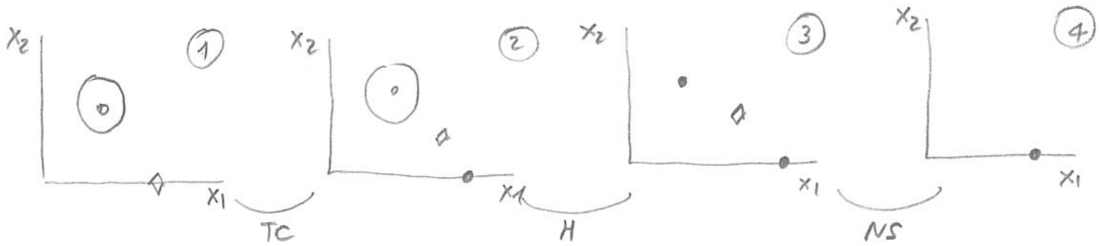
BT = Bogdanov-Takens
CP = Cuspide



Manca una curva di biforcazione omoclina che "chiude" il quadro di biforcazione (in particolare, il passaggio tra le regioni 2 e 5.

Nota: Al punto **a)** abbiamo visto

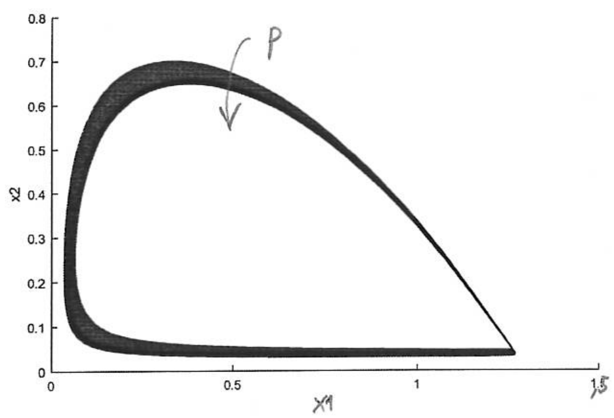


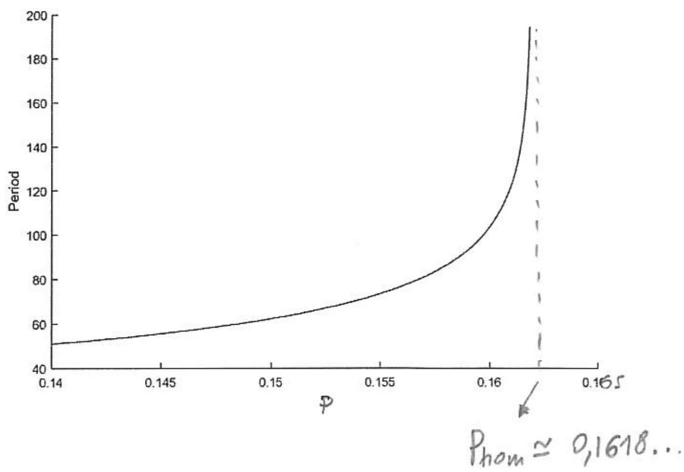


Cerchiamo ora l'omoclina. (Ripristinare le prime tre derivate a "simbolically")

Prima però vediamo se c'è! Mi metto sul ciclo per K = 1.3 e P = 0.14 (c.i. = [0.5 0.5] in [0, 1.5]x[0, 0.8]) prendendo l'ultimo punto dopo un transitorio come condizione iniziale sul ciclo e producendo il ciclo che memorizzo nella curva ciclo.

Nello Starter Menu clicco su Select Cycle. Attivo P e Period. MaxStepSize=0.5. Continuo così i cicli al variare di P (memorizzo in cicliP) ottenendo

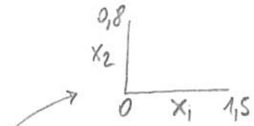




L'omoclina si ha per P circa pari a 0.1618 (K = 1.3).

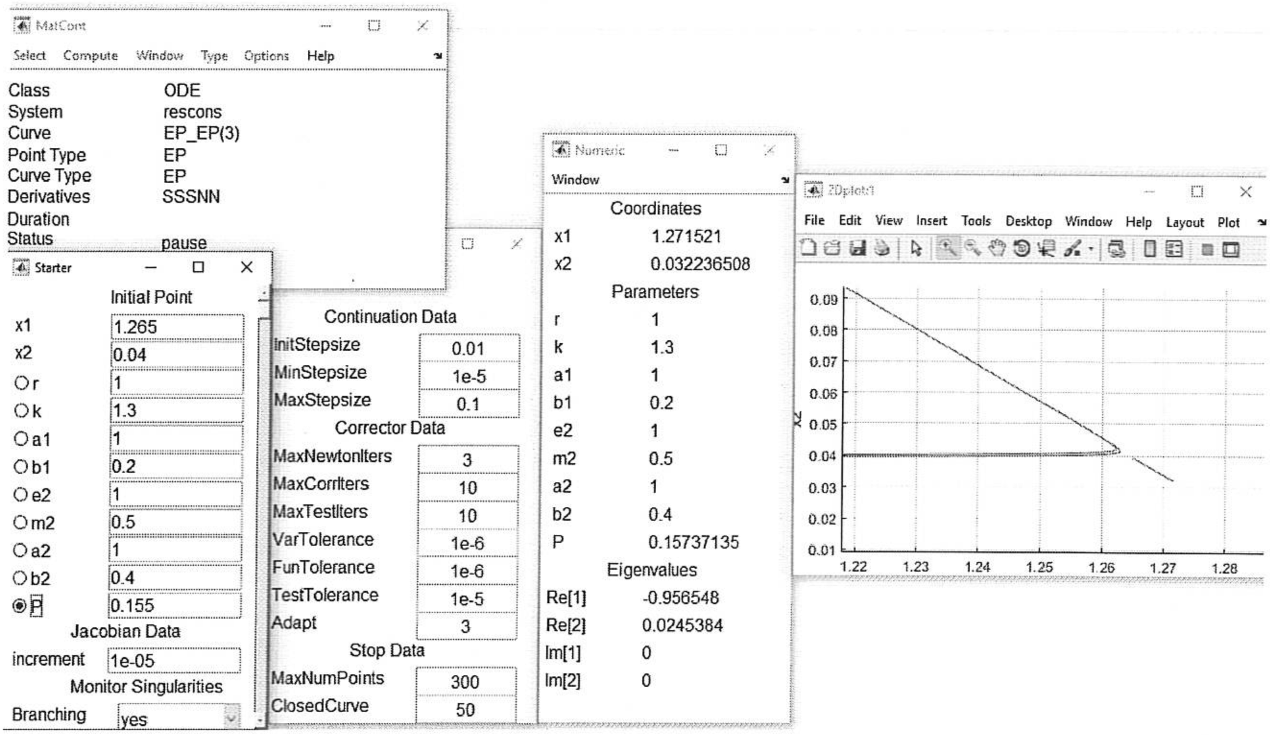
Cerchiamo dunque l'omoclina (fare riferimento al documento Continuare biforcazioni omocline con Matcont sul sito del corso http://home.deib.polimi.it/rinaldi/tds/matcont/homcont.pdf).

NOTA: Se questa procedura per il calcolo della biforcazione omoclina non funzionasse, è sempre possibile trovarne una sua approssimazione continuando un ciclo di periodo elevato



Determino l'equilibrio di tipo sella vicino alla biforcazione omoclina e che sarà in esso coinvolto.

Simulo per $K = 1.3$ $P = 0.155$ ($P_{hom} = 0.1618$ circa) e condizioni iniziali [0.5 0.5]. La sella è vicina al punto [1.265, 0.04]. Imposto tale punto come punto di equilibrio (Type → Initial Point → Equilibrium) e forzo MatCont a trovare l'equilibrio sella più vicino al variare di P (metti la Pausa con Options → Pause in At Each Point!) (memorizzo in sellaP).

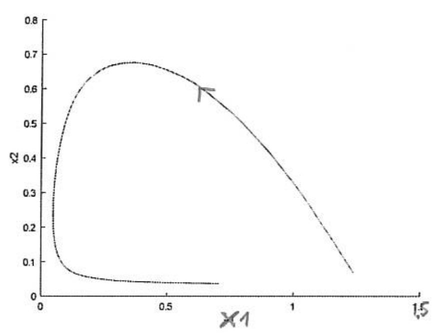


Seleziono il punto iniziale di sellaP.

Type Curve → Connection Saddle

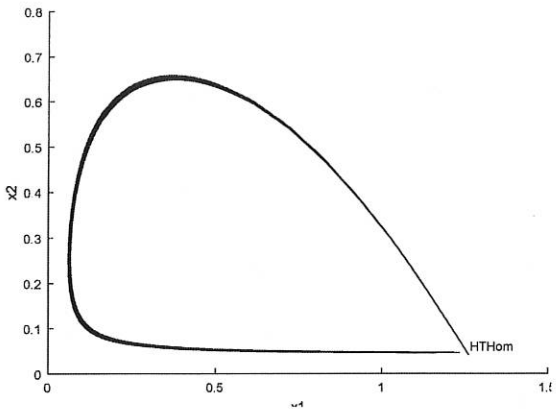
Fisso Uparam1 = 1, eps0 = 0.01, Interval (Integration data Menu) = 80

Con Compute produco la varietà instabile della sella.



Scegliendo Select Connection nello Starter Menu viene scelto il punto più vicino all'autovettore stabile della matrice Jacobiana valutata nella sella.

Si attivano ora P, Sparam1 ed eps1 nello Starter Menu per trovare il valore di P tale per cui la varietà instabile della sella raggiunge l'autovettore stabile della sella (Compute Backward). Ciò accade quando il parametro Sparam1 si annulla (viene visualizzato il messaggio SParam equal to zero).

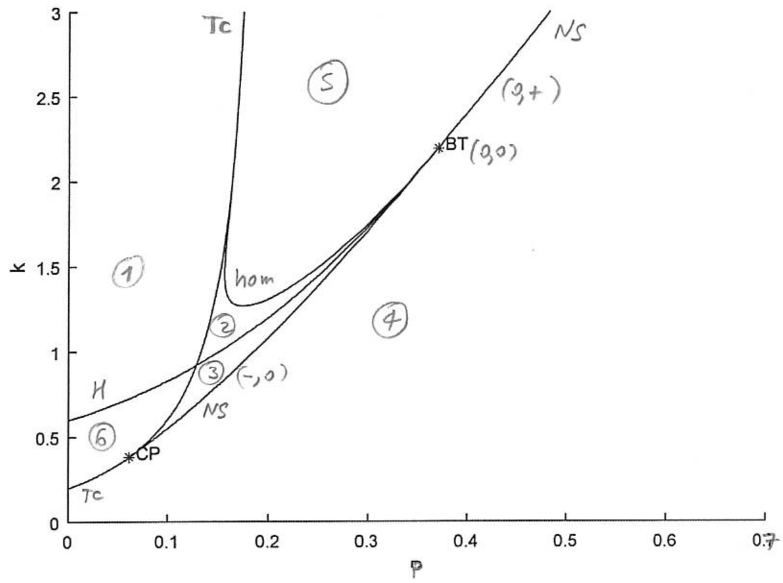


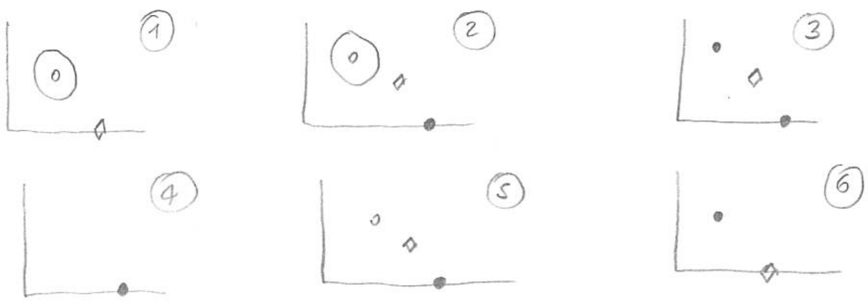
Memorizzo la curva in connsaddleP e su questa seleziono come punto iniziale HTHom: Sparam equal to zero.

Nello Starter Menu attivo P, T ed eps1. Compute. Quando eps1 raggiunge il suo valore di tolleranza 0.01, ho raggiunto la biforcazione omoclina (viene visualizzato il messaggio *eps1 is small enough*).

Seleziono su quest'ultima curva il punto HTHom: eps1 is small enough, scelgo la curva Homoclinic to Saddle e attivo P, K e T. Produco così la curva di biforcazione omoclina (memorizzo in omoclinaPK1 e omoclinaPK2), fissando MaxStepSize a 1 e MaxNumPoints a 500.

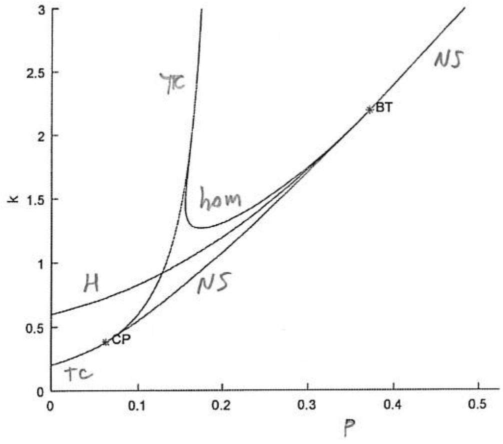
Il diagramma finale è pertanto

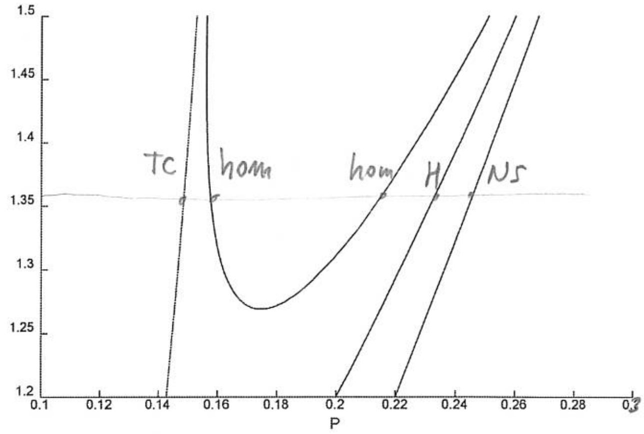


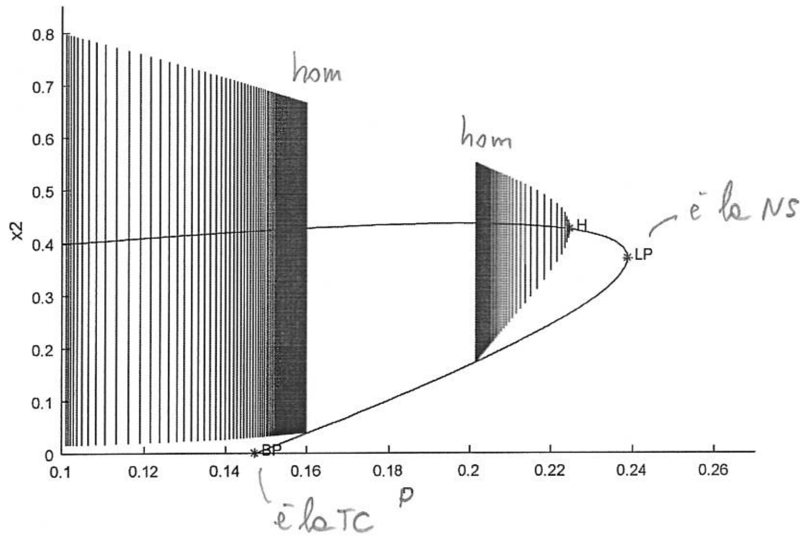


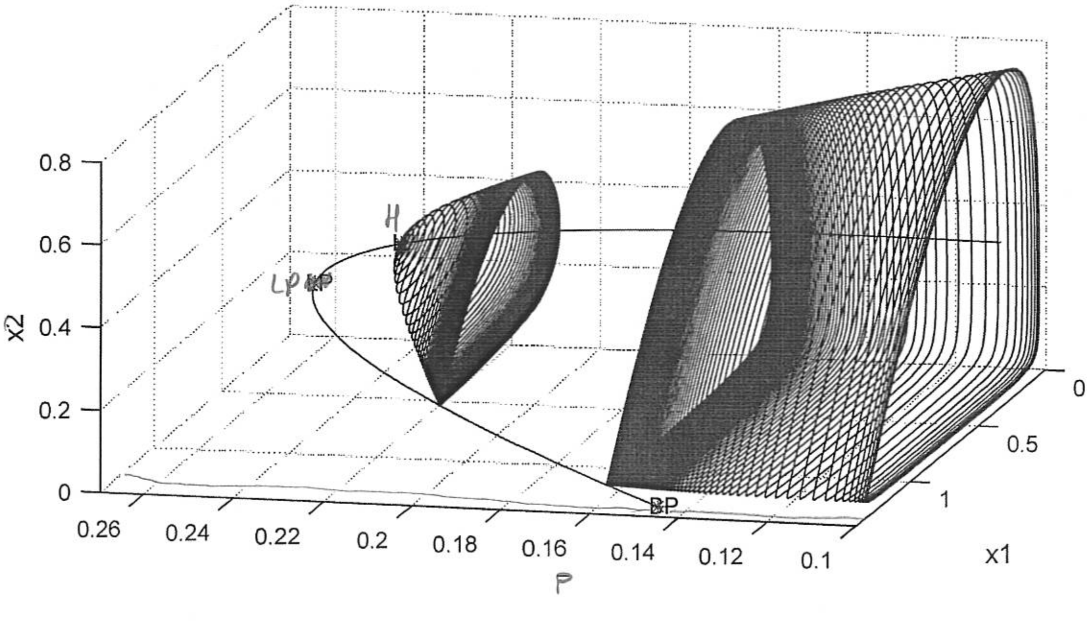
NOTA: Per $k=1,315$ l'inviluppo di cicli si rompe a causa dell'omoclina. L'equilibrio sella tocca un ciclo e, via biforcazione omoclina, lo fa sparire.

ZOOM

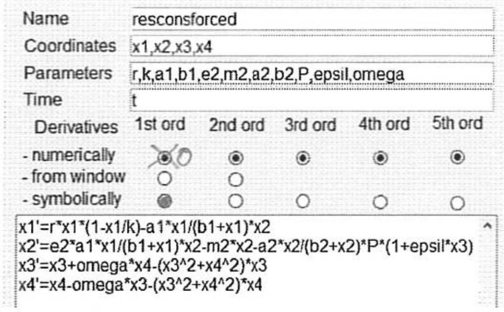




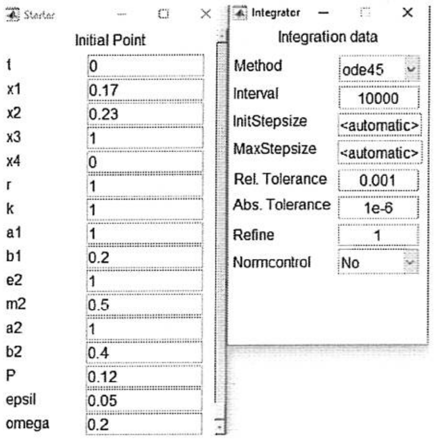


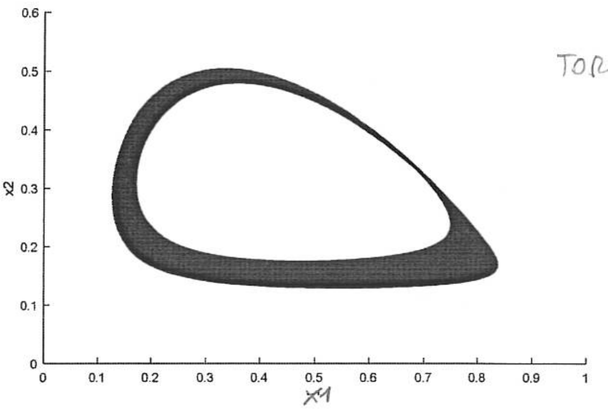


d) (Fare riferimento al laboratorio 2 per l'uso del materiale necessario alla determinazione della sezione di Poincaré e al calcolo degli esponenti di Liapunov)



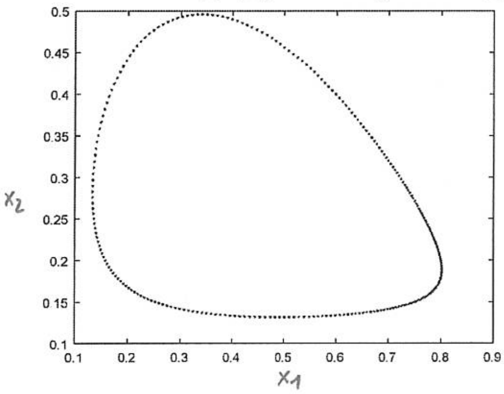
Comportamento quasi periodico → TOROBELLO





TORO

Sezione di Poincaré (…\forzato\toro\sezione_di_poincare\poincare_rescons_forced.m)

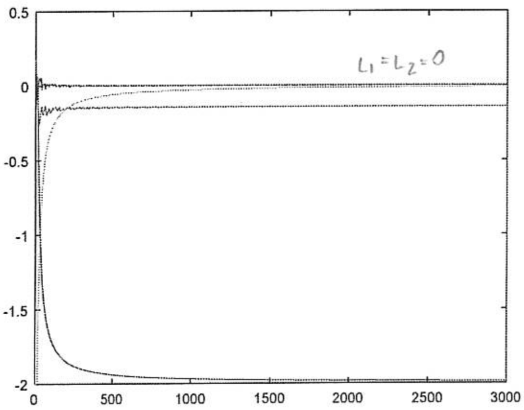


TORO SU SEZIONE STROBOSCOPICA

$T = \frac{2\pi}{\omega}$

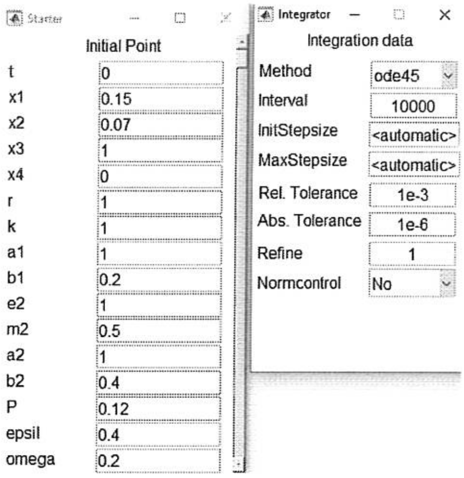
$x_3 = \operatorname{sen} \omega t = 0$

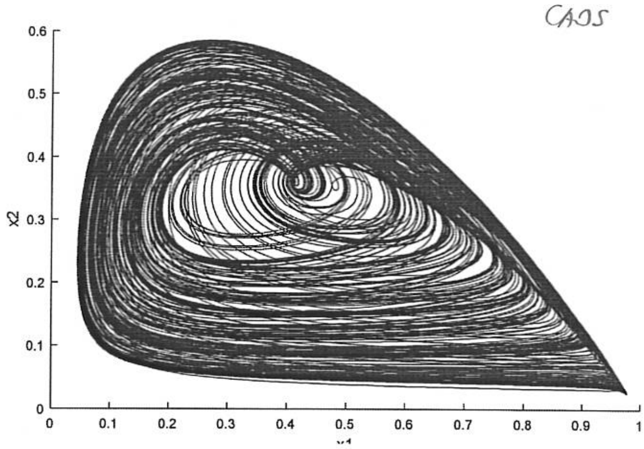
Esponenti di Liapunov (…\forzato\toro\esponenti_di_liapunov\Liapunov_primo_esponente.m)



L = [0.0002 → 0
-0.1427
-0.0099 → 0
-1.9901]

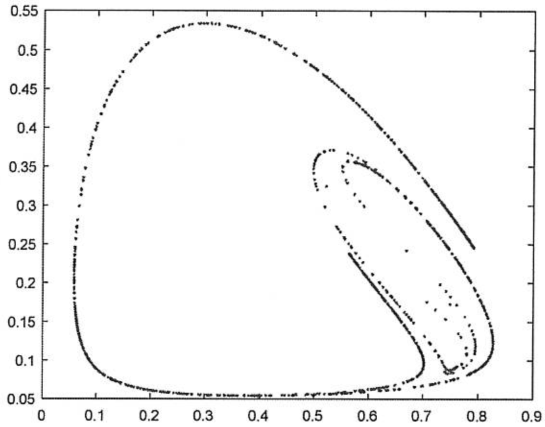
Comportamento caotico → CAOS





CAOS

Sezione di Poincaré (...\forzato\caos\sezione_di_poincare\poincare_rescons_forced.m)

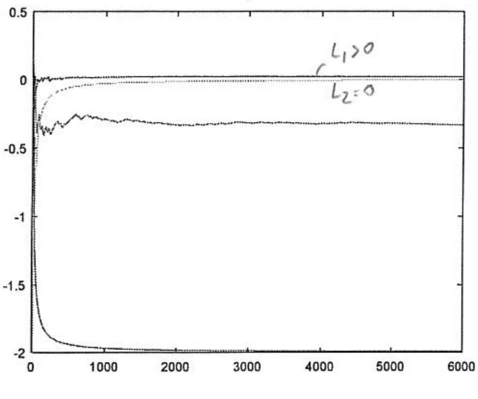


CAOS SU SEZIONE STROBOSCOPICA

$T = 2\pi/\omega$

$x_3 = \sin \omega t = 0$

Esponenti di Liapunov (...\forzato\caos\esponenti_di_liapunov\Liapunov_primo_esponente.m)



L = [0.0209 → +
-0.3336
-0.0050 → 0
-1.9950]