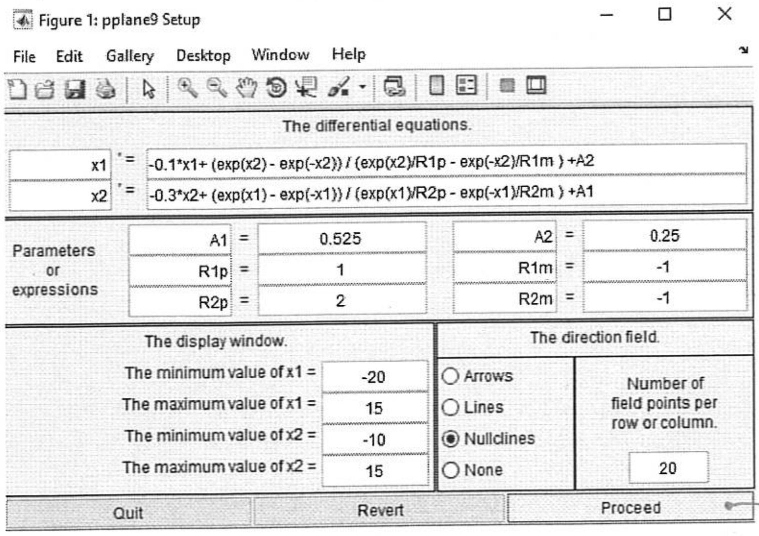
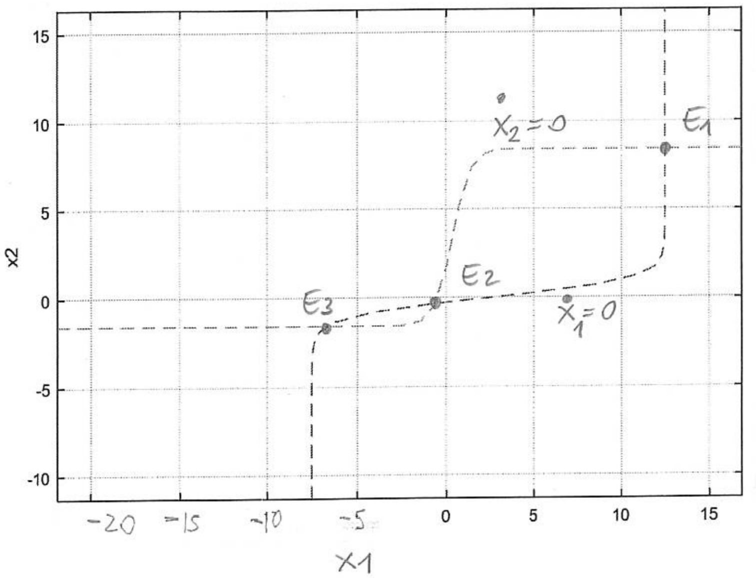
TRACCE DELLA SOLUZIONE

Mediante pplane visualizziamo le isocline del sistema





Equilibri
$\dot{x}_1 = 0$
$\dot{x}_2 = 0$ → sono 3: E_1, E_2, E_3

Solutions → Find an equilibrium point riporta per i tre equilibri i seguenti risultati:

There is a nodal sink at (12.5, 8.4167).

The Jacobian is:
-0.1 1.9551e-07
0 -0.3

The eigenvalues and eigenvectors are:
-0.1 (1, 0)
-0.3 (-9.7755e-07, 1)

There is a nodal sink at (-6.6912, -1.5833).

The Jacobian is:
-0.1 0.15522
4.6263e-06 -0.3

The eigenvalues and eigenvectors are:
-0.099996 (1, 2.3131e-05)
-0.3 (-0.61311, 0.79)

There is a saddle point at (-0.62165, -0.32294).

The Jacobian is:
-0.1 0.90255
0.66092 -0.3

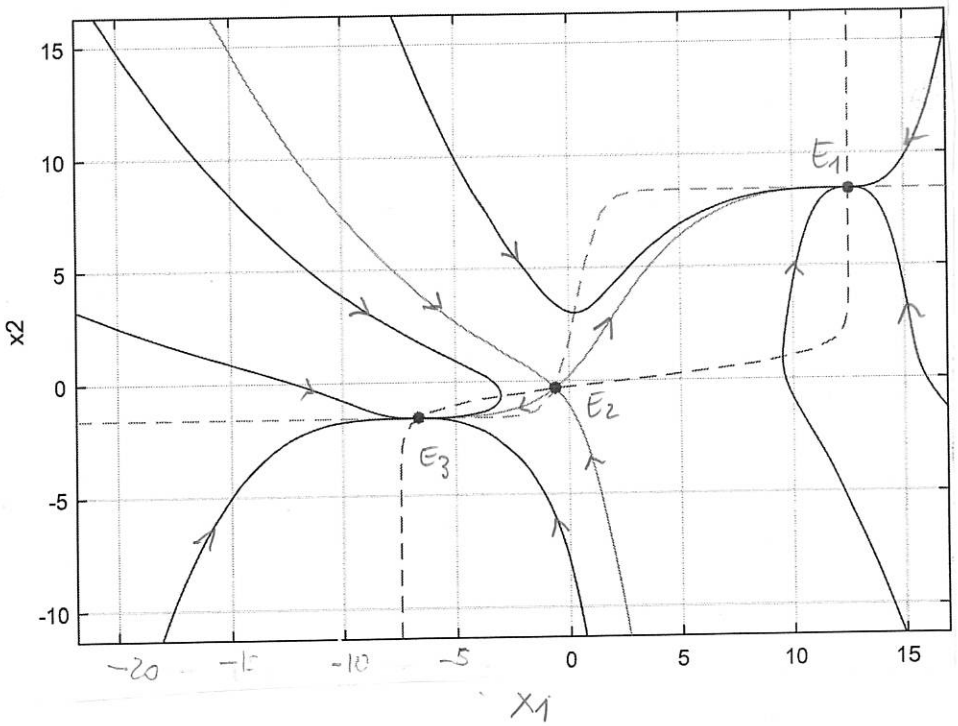
The eigenvalues and eigenvectors are:
0.57879 (0.7992, 0.60106)
-0.97879 (-0.71648, 0.69761)

E_1 è un nodo stabile

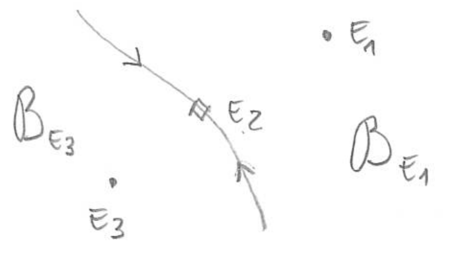
E_3 è un nodo stabile

E_2 è una sella

Simulando, infatti, si ottiene

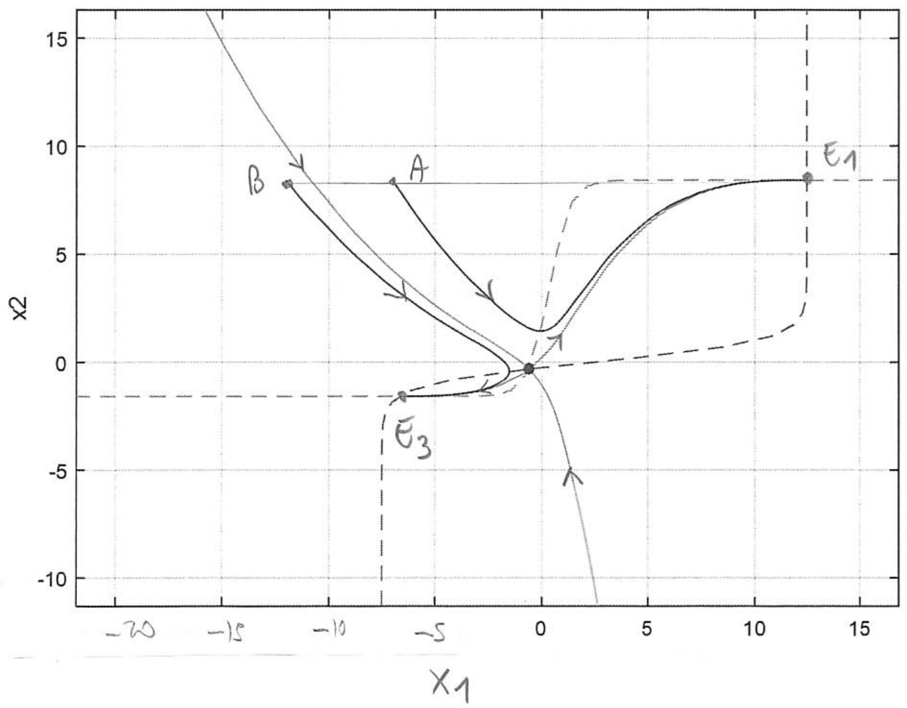


A seconda della condizione iniziale la coppia tende verso E_1 (sentimenti positivi) o verso E_3 (sentimenti negativi).
I bacini di attrazione dei 2 equilibri stabili sono definiti dalla varietà stabile della sella E_2 (ottenuta mediante solutions → Plot stable and unstable orbits)



Curiosità: Supponiamo che la coppia sia in E_1 ("felice") e che l'individuo 1 abbia un improvviso calo di interesse per il proprio partner 2. ⇒ x_1 diminuisce.
Se il calo non è troppo accentuato (= la condizione iniziale del sistema $\in \mathcal{B}_{E_1}$) la coppia può ritornare nel suo stato di coppia "felice" (vedi punto A). Se, al contrario, il calo di interesse è stato importante (la nuova condizione iniziale $\in \mathcal{B}_{E_3}$) la coppia si porta verso una situazione di antipatia reciproca (vedi punto B)

Coppie di questo tipo sono dette "fragili"



$A \in \mathcal{B}_{E_1}$

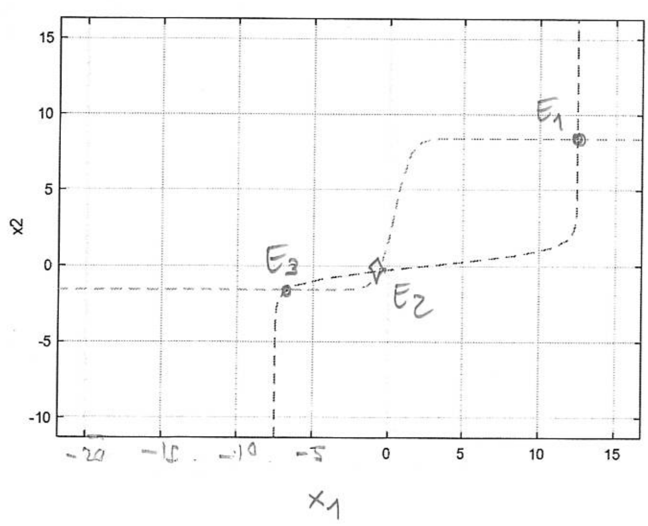
$B \in \mathcal{B}_{E_3}$

Vediamo come variano le isocline (e quindi gli equilibri) al variare dei termini di fascino A_1 e A_2
(si cambia il valore del parametro nella finestra di setup e con proceed si tracciano le nuove isocline)

- Variazione di A_2 • nodo stabile ◇ sella

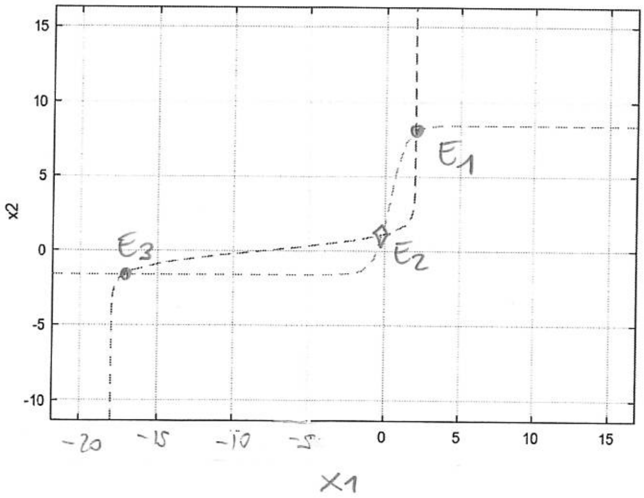
Situazione iniziale

$A_2 = 0,25$



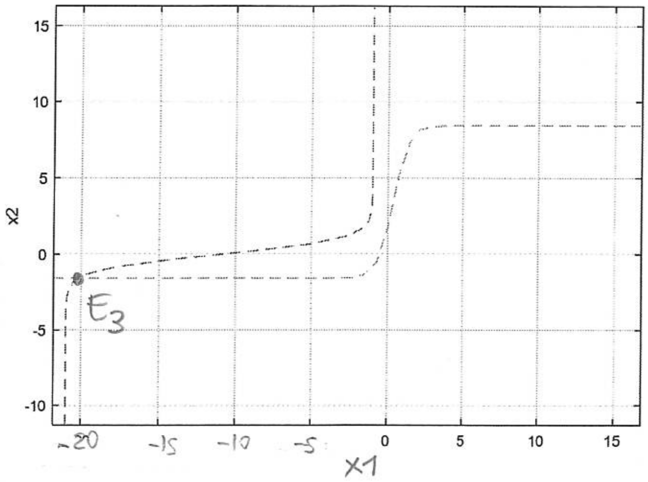
Diminuiamo A_2

$A_2 = -0{,}8$



E_1 ed E_2 si avvicinano!

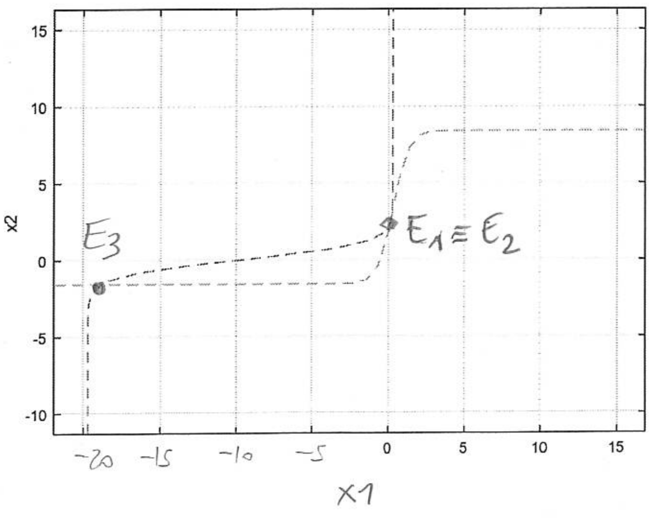
$A_2 = -1{,}1$



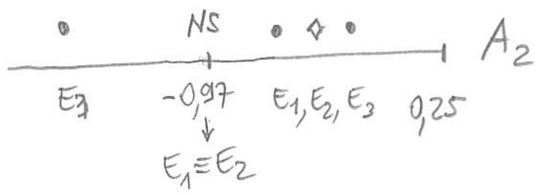
E_1 ed E_2 sono scomparsi!

E_1 ed E_2 spariscono via $\underbrace{\text{biforcazione nodo-sella}}_{NS}$ per $A_2 \simeq -0{,}97$

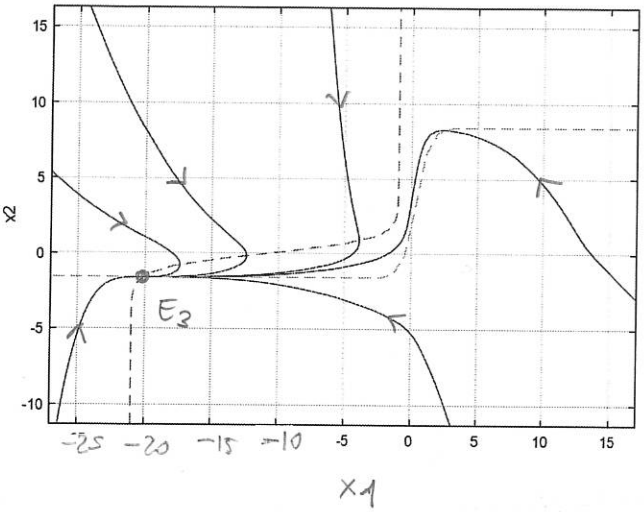
$A_2 \simeq -0{,}97$



Per A_2 decrescenti ho quindi trovato:

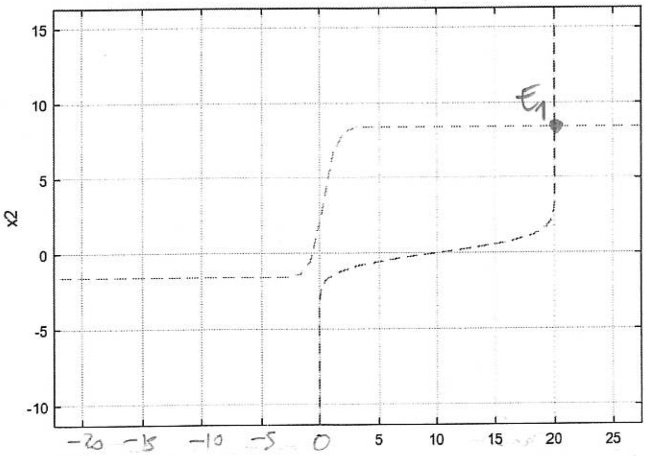


Nota: Per $A_2 = -1,1$ la coppia tende sempre verso la situazione di antipatia reciproca E_3



Se, invece, aumentiamo A_2:

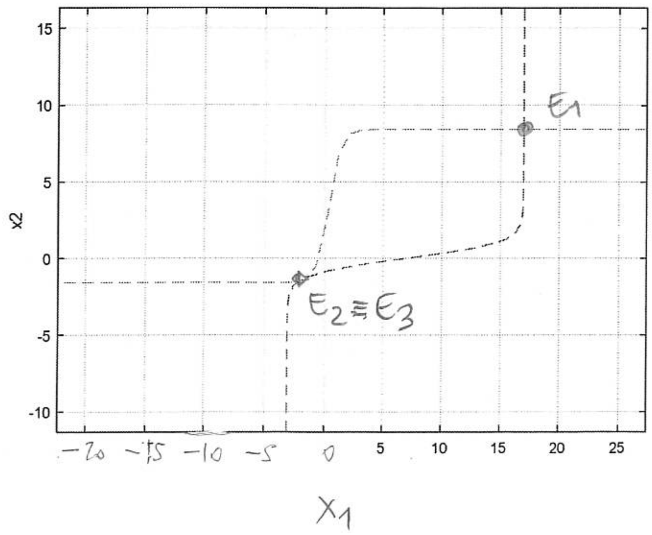
$A_2 = 1$

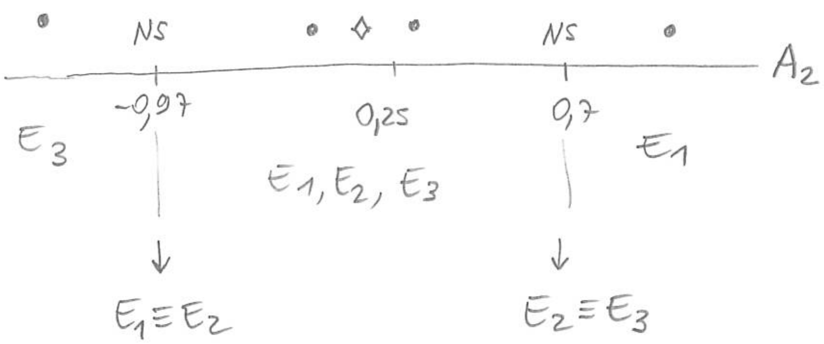


E_2 ed E_3 sono scomparsi!

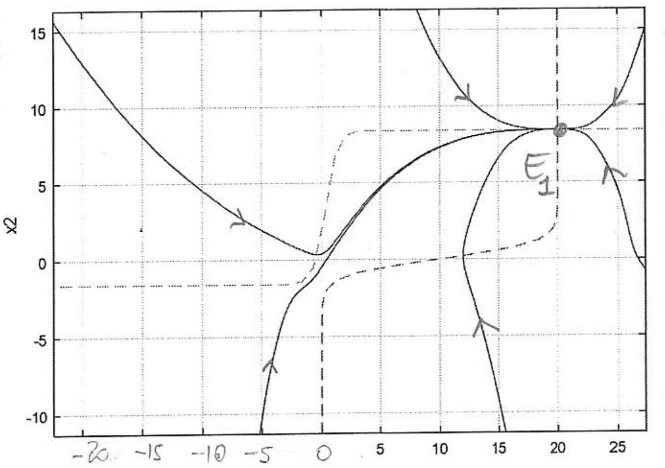
Si ha una <u>biforcazione nodo-sella</u> (NS) per $A_2 \simeq 0,7$

$A_2 \simeq 0,7$





Nota Per $A_2 = 1$ la coppia tende sempre verso la situazione di amore reciproco E_1

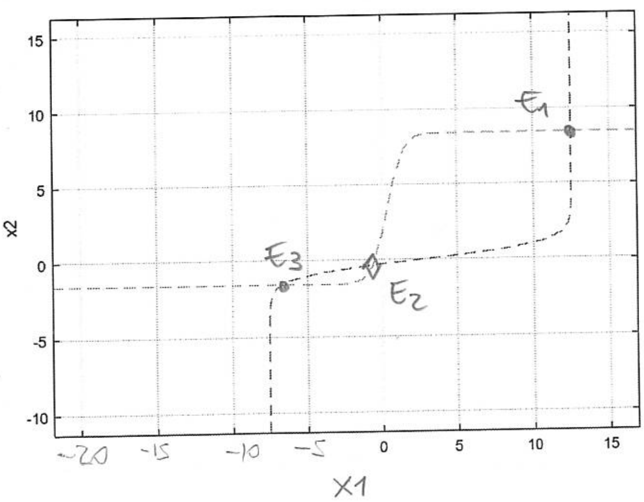


Qualunque calo di interesse, riporta la coppia in E_1.
Tale coppia si definisce "robusta".

Variazione di A_1 ($A_2 = 0,25$)

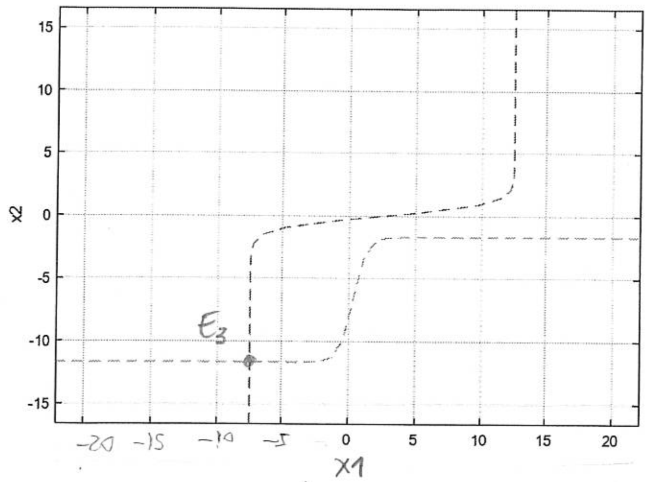
situazione iniziale

$A_1 = 0,525$



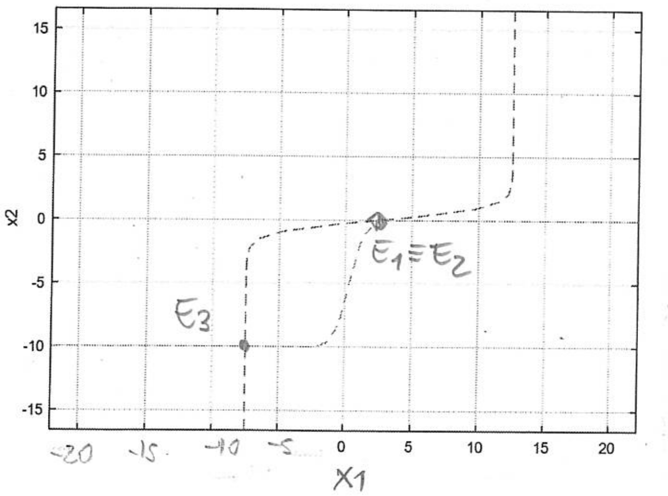
Diminuiamo A_1

$A_1 = -2{,}5$



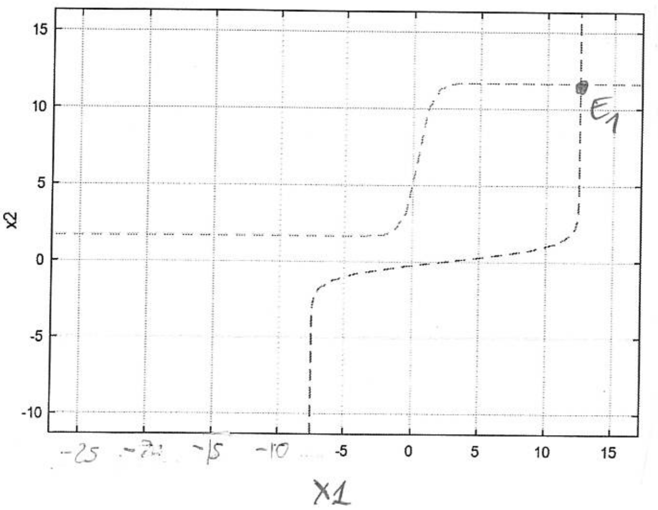
E_1 ed E_2 scompaiono via biforcazione nodo-sella per $A_1 \simeq -2$

$A_1 = -2$



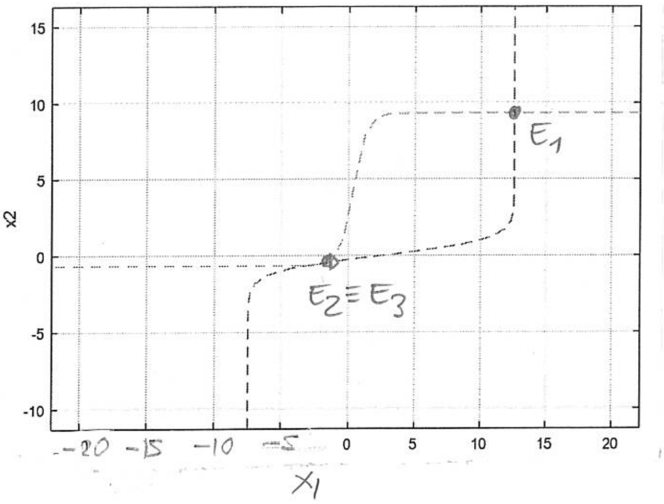
Aumentiamo A_1

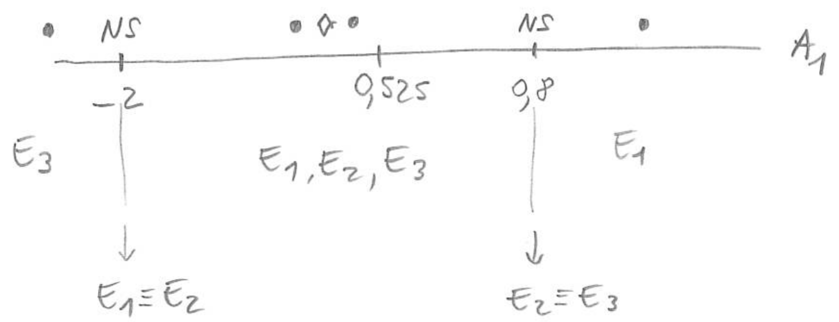
$A_1 = 1{,}5$

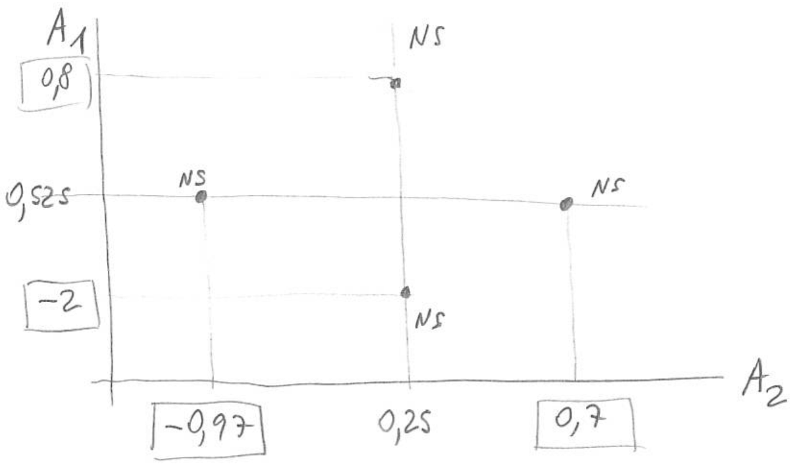


E_2 ed E_3 scompaiono via biforcazione nodo-sella per $A_1 \simeq 0{,}8$

$A_1 = 0{,}8$



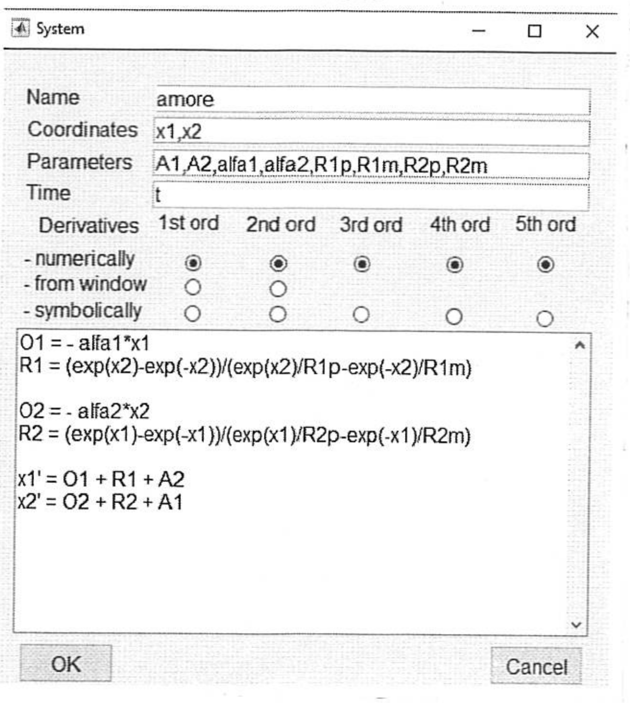




Sono 4 punti di biforcazione nodo-sella

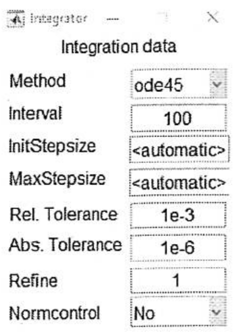
Determiniamo con Matcont le linee di biforcazione nodo-sella (passanti per tali punti)

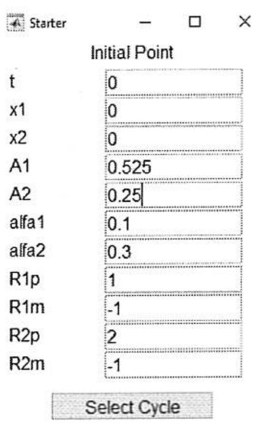
Select → System → New



Type → Initial Point → Point

Facciamo ora una simulazione per portare il sistema verso l'equilibrio





Window → Graphic → 2D plot — Apriamo una finestra grafica

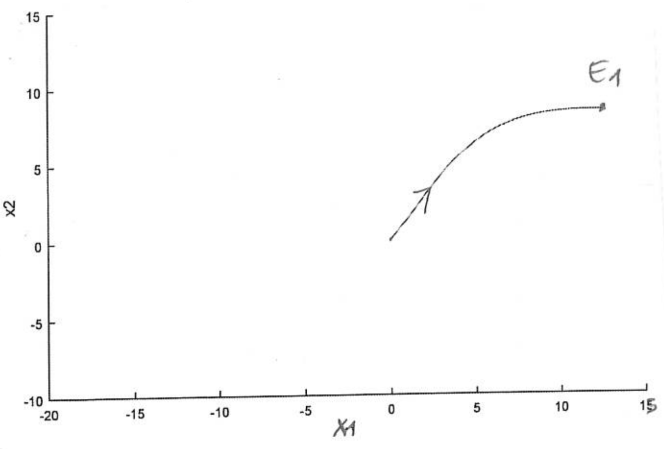
Layout → Variables on axes — Visualizziamo x_1 e x_2

" → Plotting region — $x_1 \in (-20, 15)$

$x_2 \in (-10, 15)$

Compute → Forward — Eseguiamo la simulazione

Il sistema tende verso E_1



Con Select → Curve → Actions → Rename rinominiamo la curva in TR1

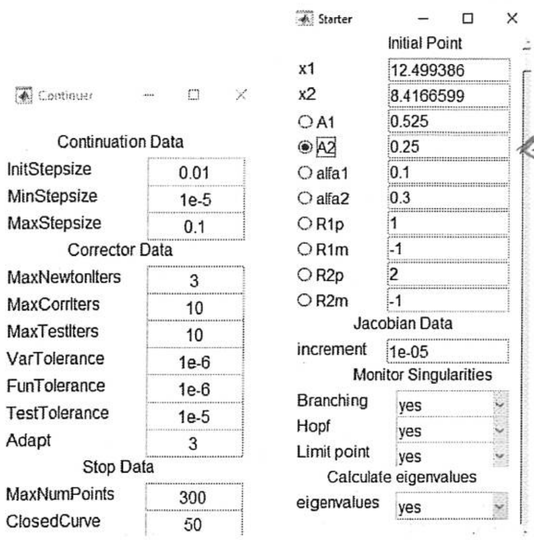
Con Select → Initial Point selezioniamo l'ultimo punto della curva TR1: è l'equilibrio E_1

Vogliamo ora "continuare" l'equilibrio E_1 rispetto al parametro A_2

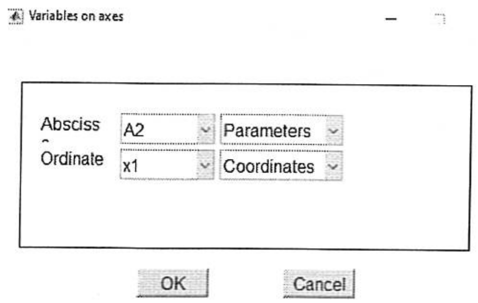
Type → Initial Point → Equilibrium

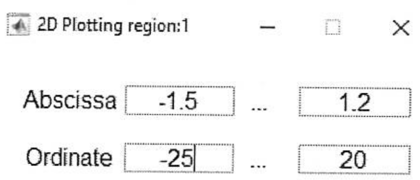
Nella finestra Matcont, Curve Type viene aggiornato a EP (equilibrium point); questa è proprio la curva che vogliamo calcolare (pertanto non occorre selezionarla con Type → Curve → Equilibrium ⇒ è già scelta in "automatico dopo la scelta di Equilibrium come Initial Point)

Nella finestra Continuation Data fissare MaxNumPoints a 300. Nella finestra Starter selezionare A_2 come parametro di continuazione dell'equilibrio



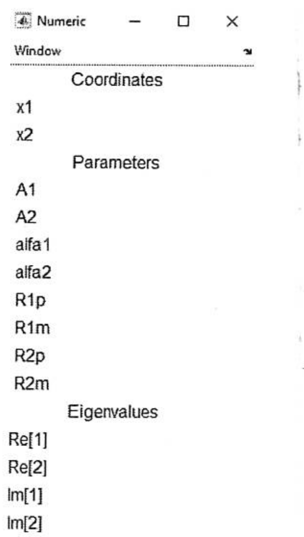
Nella finestra grafica cambiamo gli assi (layout → Variables on Axes) in A2 e X1 fissando opportunamente gli estremi (Layout → Plotting Region)





Durante la "continuazione" dell'equilibrio E_1 vogliamo monitorare il valore degli autovalori della matrice Jacobiana in E_1 (per capire la stabilità di E_1)

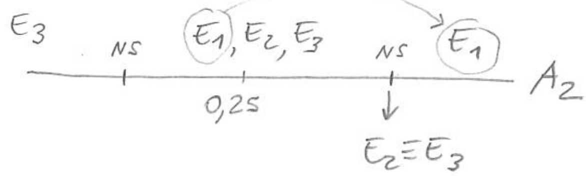
(in Matcont)
Window → Numeric   apre una finestra numerica



(in Numeric)
Window → layout → eigenvalues

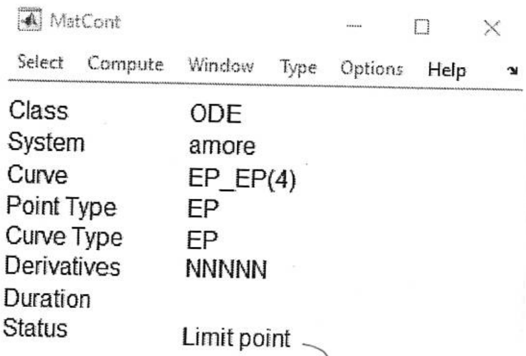
Compute → Forward ⇝ Continua l'equilibrio all'<u>aumentare</u> di A_2

E_1 non subisce biforcazioni

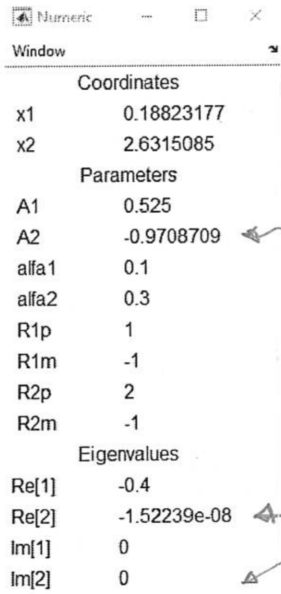


Compute → Backward ⇝ continua l'equilibrio al <u>diminuire</u> di A_2

E_1 subisce la biforcazione nodo-sella per $A_2 = -0{,}9708\ldots$ (con pplane avevamo previsto $-0{,}97$)



è una nodo-sella



valore di biforcazione $E_1 \equiv E_2$

$\lambda = 0$

Con Resume si può andare avanti nella "continuazione" dell'equilibrio che ora non è più E_1, ma è l'equilibrio che ha fatto la biforcazione con E_1 cioè la sella E_2. Notiamo infatti che nella finestra Numeric un autovalore è negativo e l'altro è positivo. A_2 aumenta.

E_2 subisce una biforcazione nodo-sella per $A_2 = 0{,}722\ldots$ (avevamo previsto $0{,}7$)

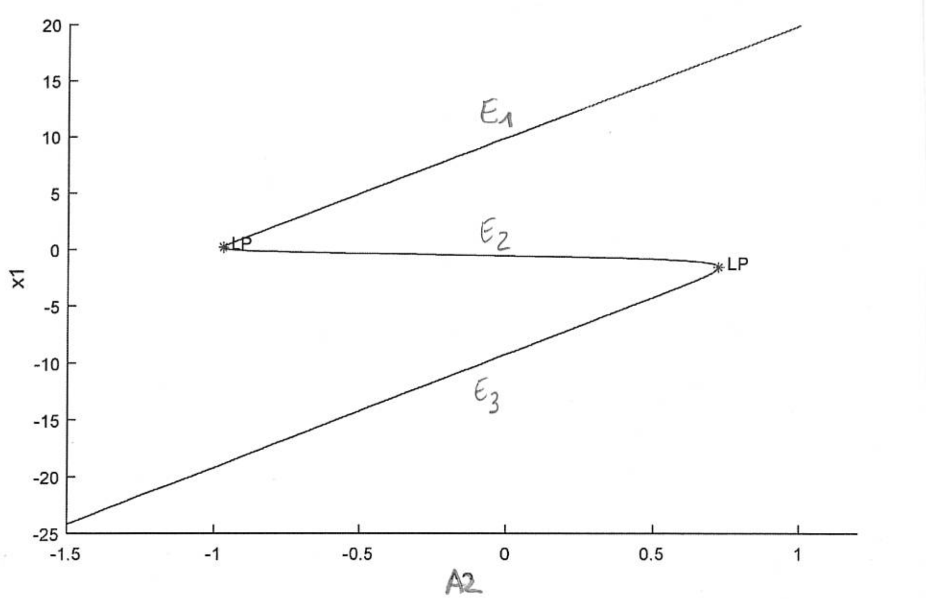
(status = Limit Point nella finestra MatCont)

Numeric
Window

Coordinates	
x1	-1.5477479
x2	-1.3620767
Parameters	
A1	0.525
A2	0.72209906
alfa1	0.1
alfa2	0.3
R1p	1
R1m	-1
R2p	2
R2m	-1
Eigenvalues	
Re[1]	-0.399999
Re[2]	-9.0464e-07
Im[1]	0
Im[2]	0

→ valore di biforcazione $E_2 \equiv E_3$

$\lambda = 0$

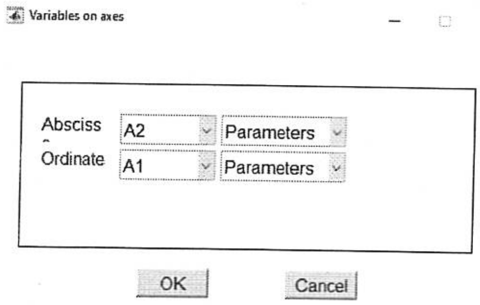


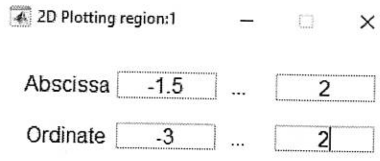
Select → Curve → Actions → Rename

Rinominiamo la curva in EQA2

I due punti di biforcazione nodo-sella (LP) sono stati ottenuti per un preciso valore di A_1. Vogliamo ora vedere come tali punti variano al variare di A_1 ⇒ vogliamo tracciare la curva di biforcazione nodo-sella nel piano (A_2, A_1)

Nella finestra grafica cambiamo assi ed estremi

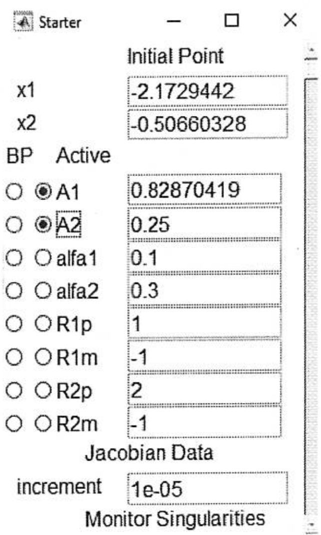




Select → Initial Point   Selezioniamo il primo punto LP: limit point sulla curva EQA2

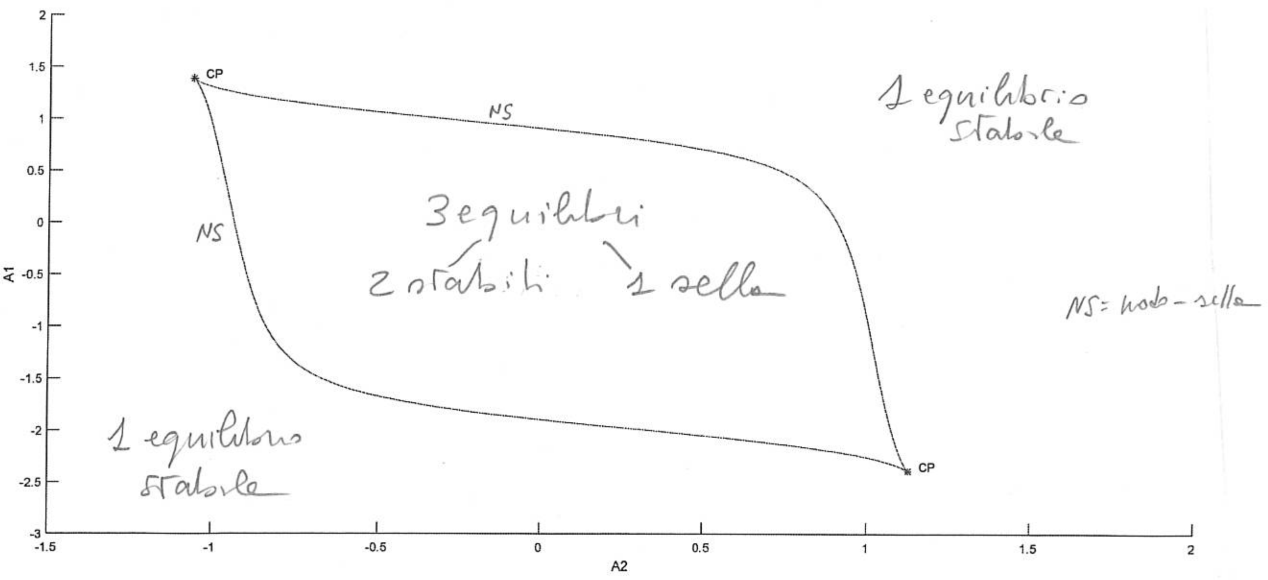
Nella finestra MatCont Curve Type viene aggiornato a LP (è già la curva che vogliamo determinare)

Nella finestra Starter attiviamo i due parametri di biforcazione: A1 e A2



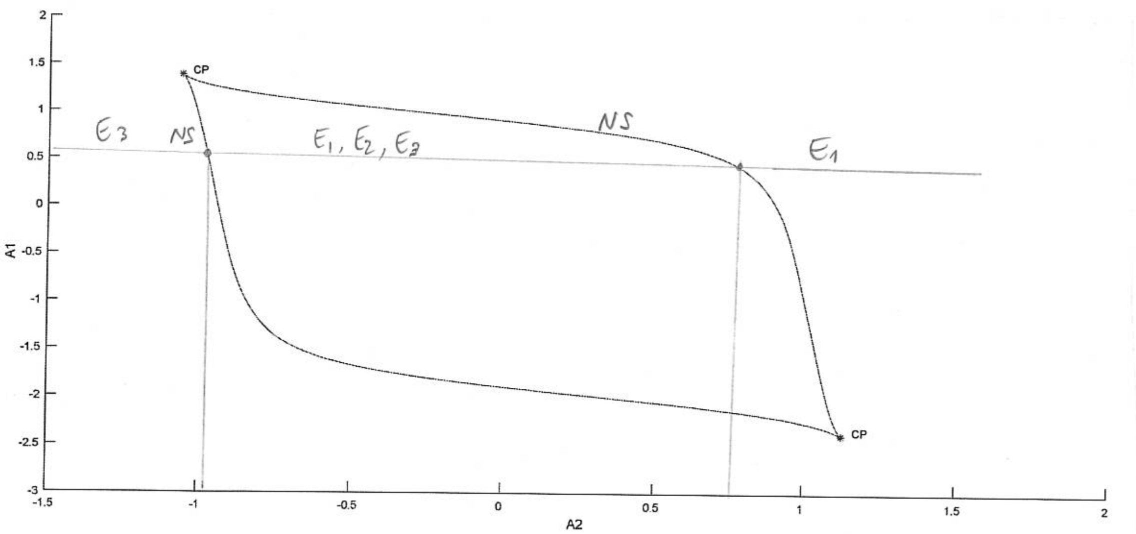
Durante il calcolo si ottengono due punti di cuspide CP in cui si incontrano le biforcazioni nodo-sella.

Select → Curve → Actions → Rename → NSA1A2

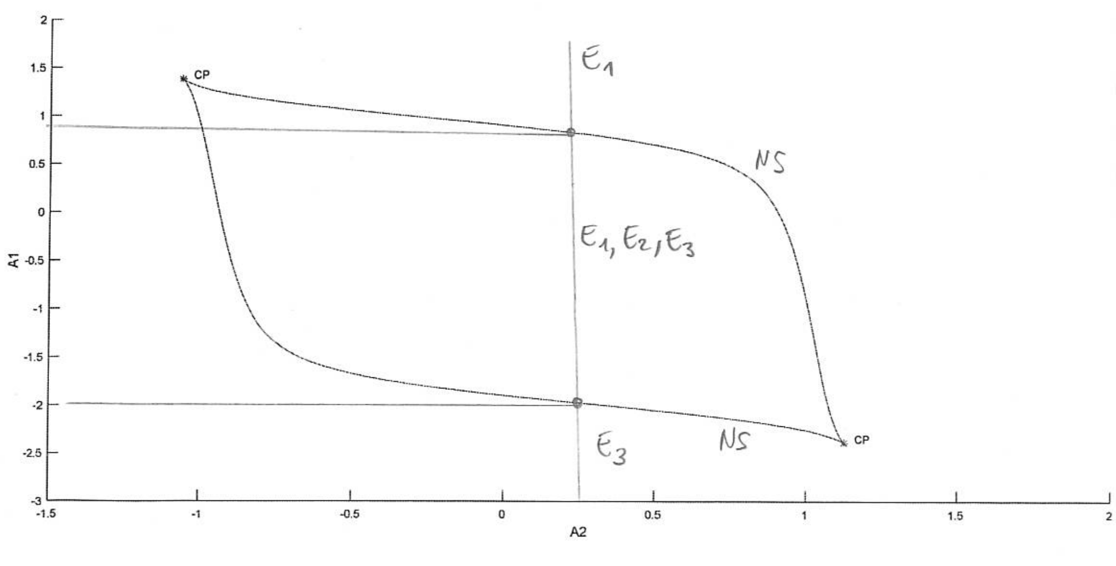


Note

- Con pplane $A_1 = 0{,}525 \Rightarrow$ NS in $-0{,}97$ e $0{,}7$



- Con pplane $A_2 = 0{,}25 \Rightarrow$ NS in -2 e $0{,}8$



• Senza attraversare curve di biforcazione, il passaggio da E_3 ad E_1 avviene in modo graduale

$A_1 = 1{,}8$