Modello risorse-consumatori

Sia dato il modello di Rosenzweig-MacArthur

$$\dot{x}_1 = rx_1\left(1 - \frac{x_1}{K}\right) - \frac{ax_1}{b + x_1}x_2$$
$$\dot{x}_2 = e\frac{ax_1}{b + x_1}x_2 - mx_2$$

dove x_1 è la densità di risorse, x_2 la densità di consumatori, $r = m = 1$, $K = 6$, $b = 2$ ed $e = 0.5$.

Utilizzando Phase Plane si simuli l'andamento del sistema per i seguenti valori di a: 2.6, 3.3 e 5.

Osservando nei tre casi la posizione delle isocline intuire una possibile "regola" che permetta di prevedere il comportamento del modello (estinzione dei consumatori, coesistenza stazionaria risorse-consumatori, coesistenza ciclica risorse-consumatori).

Modello di competizione interspecifica

Sia dato il modello di competizione interspecifica tra due popolazioni batteriche

$$\dot{x}_1 = r_1x_1\left(1 - \frac{x_1}{K_1}\right) - \alpha_{12}x_1x_2$$
$$\dot{x}_2 = r_2x_2\left(1 - \frac{x_2}{K_2}\right) - \alpha_{21}x_1x_2$$

dove x_1 è la densità di batteri utili e x_2 la densità di batteri nocivi per la buona salute dell'individuo che li ospita. I valori dei parametri sono: $r_1 = 5$, $r_2 = 5$, $K_1 = 1$, $K_2 = 2$, $\alpha_{12} = \alpha_{21} = 10$.

Mediante Phase Plane verificare che il modello presenta due equilibri stabili alternativi corrispondenti alla dominanza di una sola delle due specie batteriche, valutandone anche i bacini di attrazione.

Supponendo che si instauri una situazione che porti a uno stato di malattia (dominanza di batteri nocivi), cercare una possibile terapia che garantisca la guarigione dell'individuo.

Modello di epidemie

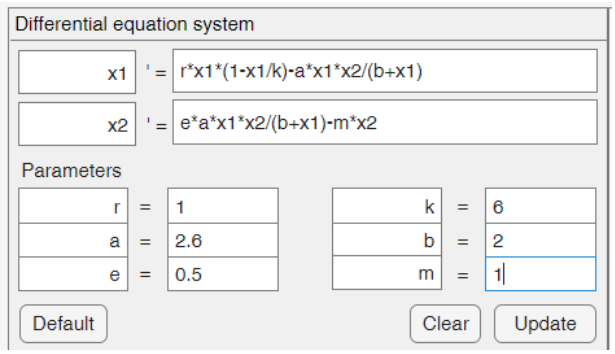
Si consideri il sistema seguente (modello di Kermack-McKendrick) che descrive lo sviluppo dell'epidemia di una particolare malattia

$$\dot{S} = -\alpha SI$$
$$\dot{I} = \alpha SI - \beta I$$

dove S ed I rappresentano, rispettivamente, la densità degli individui sani (ma suscettibili di essere infettati) e degli individui infetti (che possono trasmettere l'infezione prima di morirne o guarirne, diventando in questo caso sani ma non suscettibili perché dotati di anticorpi). Si supponga che, in assenza di una politica di controllo dello sviluppo dell'epidemia, la probabilità di contagio α (inversamente correlata all'uso di mascherine, distanziamento sociale, vaccini) sia pari a 0.05 mentre il tasso di guarigione dalla malattia β (direttamente correlato al miglioramento delle terapie) sia pari a 20. Supponendo che la densità iniziale di individui suscettibili sia pari a 1000, valutare mediante Phase Plane se l'epidemia si sviluppa oppure no. Si spieghi il risultato ottenuto. Si propongano delle azioni di controllo (corrispondenti a opportune variazioni parametriche) che evitino lo sviluppo dell'epidemia o che, al limite, la rendano meno grave supponendo, per esempio, che al più il 20% della popolazione contragga la malattia. Infine, si determinino i valori ottimali per i parametri α e β che permettono di minimizzare i costi totali ($C_{TOT} = \beta + \frac{1}{\alpha}$) di gestione della malattia.

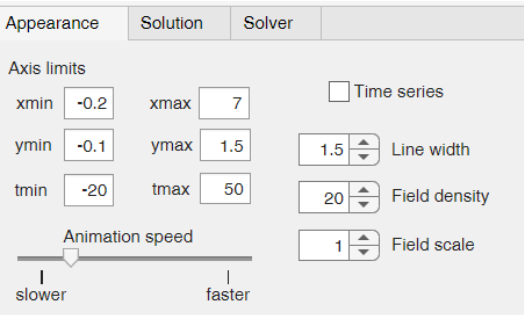
Modello risorse-consumatori

Compiliamo la finestra di Phase Plane definendo il modello (le due equazioni differenziali) e i valori dei parametri (nota: al massimo possono essere lasciati "liberi" sei parametri), fissando inizialmente *a* al valore 2.6.



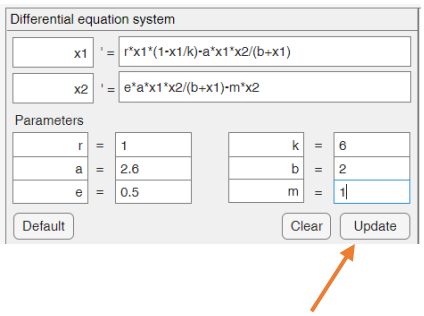
Clear "pulisce" il sistema

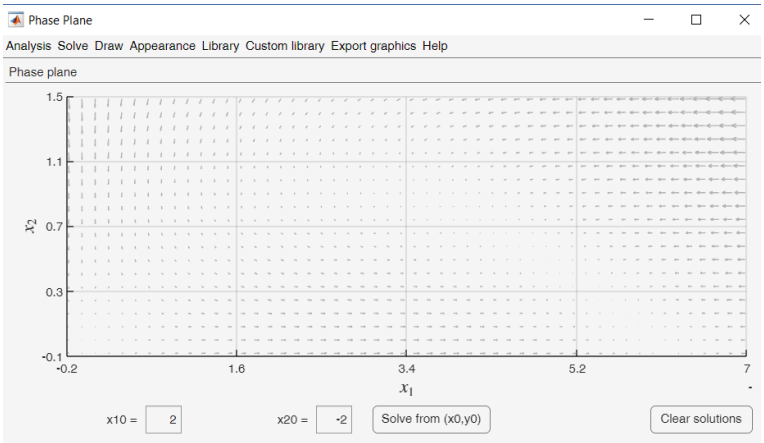
Visualizziamo lo spazio di stato ponendo
$x_{min} = -0.2$ $x_{max} = 7$
$y_{min} = -0.1$ $x_{max} = 1.5$
Fissiamo l'intervallo temporale delle simulazioni ponendo
$t_{min} = -20$ $t_{max} = 50$
($t_{min} = 0$ → simulazione "in avanti" nel tempo, per simulare anche "all'indietro" si pone $t_{min} < 0$)



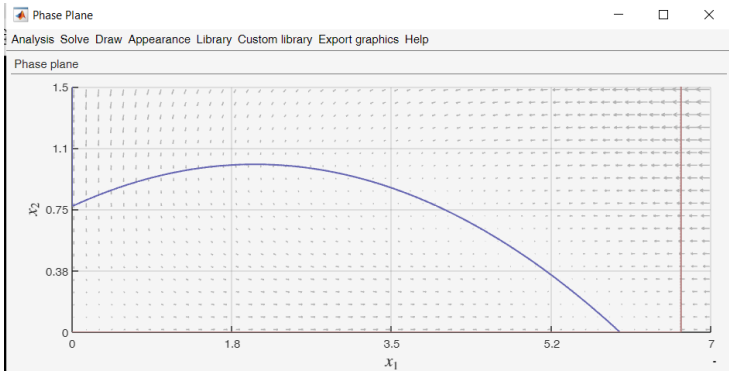
Time series aggiunge alle traiettorie nello spazio di stato (x_1, x_2) i relativi movimenti (t, x_1) e (t, x_2)

Il bottone Update nel riquadro della definizione del sistema genera il campo vettore (direzione e intensità del vettore tangente le traiettorie) nello spazio di stato.





Il comando Custom library → Add current system memorizza il sistema nella directory di lavoro di Matlab.
Il comando Analysis → Show nullclines visualizza le isocline $\dot{x}_1 = 0$ e $\dot{x}_2 = 0$ del sistema.



$\dot{x}_1 = 0$ (in blu)

$$x_1 = 0$$
$$x_2 = \frac{r}{a}\left(1 - \frac{x_1}{K}\right)(b + x_1)$$

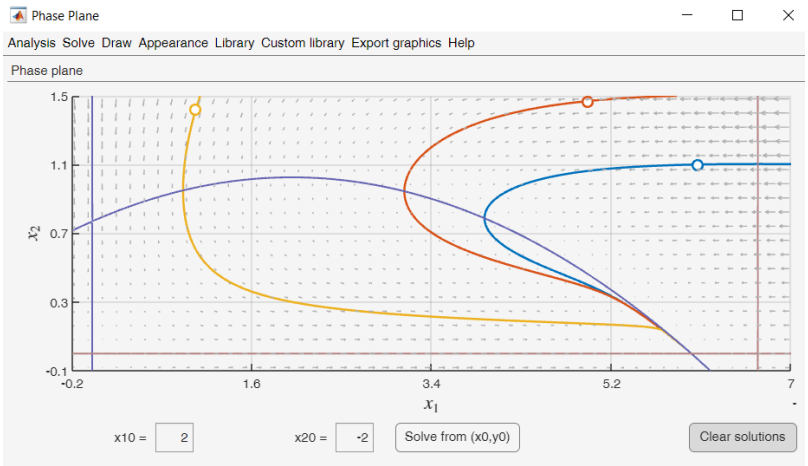
$\dot{x}_2 = 0$ (in rosso)

$$x_2 = 0$$
$$x_1 = \frac{mb}{ea-m}$$

Gli equilibri si trovano all'intersezione delle isocline e, in questa configurazione, gli equilibri (biologicamente significativi) sono:

$$E_0 = (0,0) \qquad\qquad E_K = (K,0) = (6,0)$$

Simuliamo ora il sistema tracciando il quadro delle traiettorie, scegliendo diverse condizioni iniziali posizionando il cursore in diversi punti dello spazio di stato. Al "click" del mouse viene prodotta la traiettoria (in avanti, $t_{max} > 0$ e all'indietro se $t_{min} < 0$) corrispondente alla condizione iniziale scelta.
[In alternativa, è possibile fissare il valore della condizione iniziale in x10 e x20 e produrre la traiettoria con il bottone Solve from (x0,y0)]



Le traiettorie convergono verso l'equilibrio E_K che è asintoticamente stabile essendo $\frac{mb}{ea-m} > K$ (vedi esercitazione 1; $x_1 = \frac{mb}{ea-m}$ è l'isoclina non banale $\dot{x}_2 = 0$).
Per studiare la stabilità locale degli equilibri scegliamo Analysis → Find nearby equilibrium. Posizionandoci vicino a un punto di equilibrio (gli equilibri sono all'intersezione delle isocline) e scegliendo tale punto con il mouse si nota che

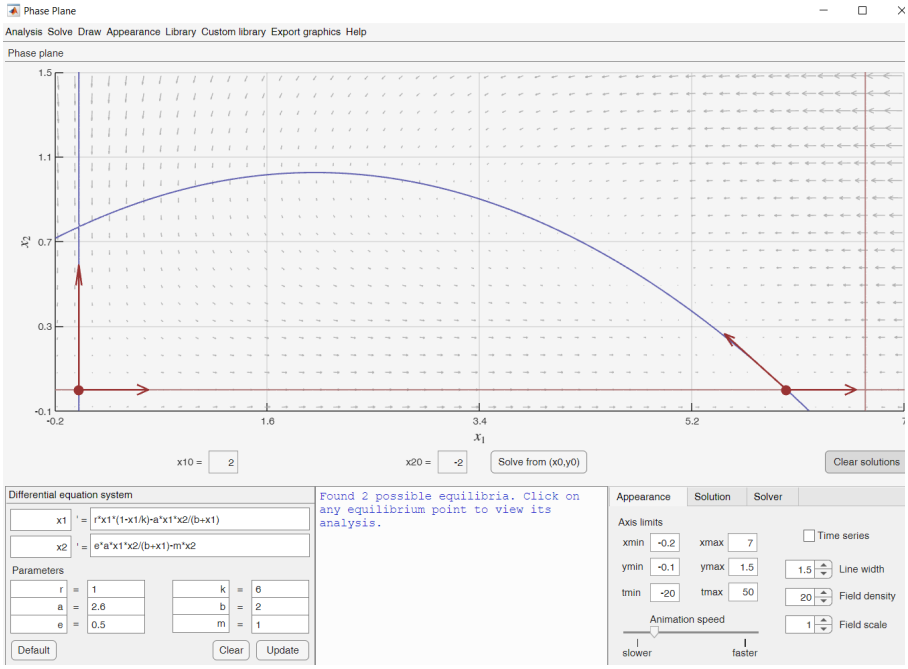
```
Possible equilibrum at (0.00,0.00)
where
[dxdt,dydt] ~= [1.8e-17;3.06e-21]
Looks like a unstable saddle to me.

J ~=  |1          0|
      |0         -1|
with eigenvalues:
 lambda1 = 1.00
 lambda2 = -1.00
and corresponding eigenvectors
 v1 = |1|
      |0|
```

E_0 è una sella (instabile) avendo J un autovalore positivo e uno negativo

```
Possible equilibrum at (6.00,0.00)
where
[dxdt,dydt] ~= [-3.45e-27;-4.42e-29]
Looks like a stable and attractive
node to me.

J ~=  |-1      -1.95|
      | 0     -0.025|
with eigenvalues:
 lambda1 = -1.00
 lambda2 = -0.02
and corresponding eigenvectors
 v1 = |1|
```

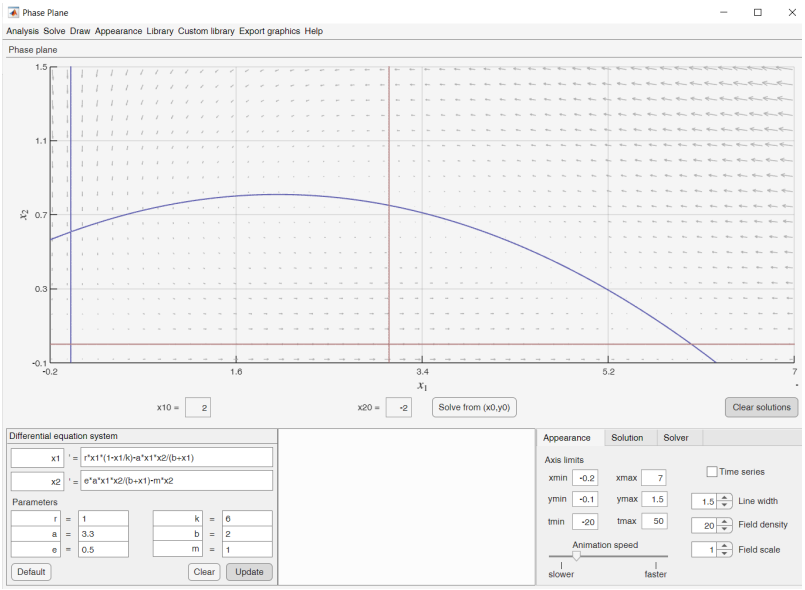
E_K è un nodo stabile avendo J entrambi gli autovalori negativi

In alternativa, il comando Analysis → Scan for equilibria determina gli equilibri del sistema tracciando, qualora l'opzione Analysis → Show real eigenvectors sia attiva, gli autovettori reali ad essi associati (non è detto che il verso sia quello corretto!). Per completare lo studio della stabilità degli equilibri (e quindi capire il verso di percorrenza degli autovettori) occorre selezionare ciascun equilibrio.



E' anche possibile tracciare le varietà stabile e instabile della sella in E_0 (asse x_2 e x_1, rispettivamente) con il comando Analysis → Solve for saddle separatrices

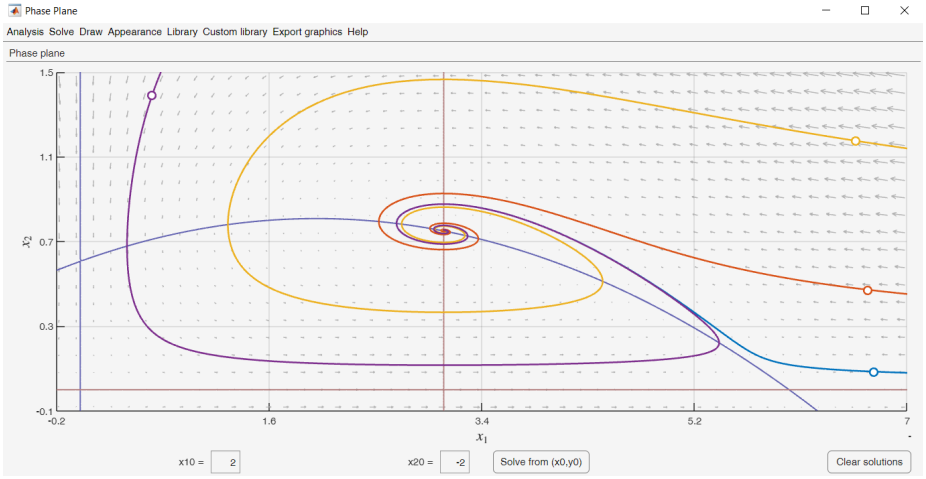
Fissiamo ora il parametro a al valore 3.3 e produciamo il nuovo campo vettore e le nuove isocline con i comandi Update e Analysis → Show nullclines.



Il sistema ora ha tre equilibri:

$E_0 = (0,0)$ $\qquad$ $E_K = (K,0)$ $\qquad$ $\bar{E} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ con $\bar{x}_1 = \frac{mb}{ea-m}$ e $\bar{x}_2 = \frac{r}{a}(1 - \frac{\bar{x}_1}{K})(b + \bar{x}_1)$

Simulando il sistema si ottiene il seguente quadro delle traiettorie



Le traiettorie ora convergono verso l'equilibrio $\bar{E}$ (coesistenza stazionaria risorsa-consumatore) che è asintoticamente stabile essendo $\frac{K-b}{2} < \frac{mb}{ea-m} < K$ (vedi esercitazione 1; $\frac{K-b}{2}$ è l'ascissa del massimo della parabola ottenuta come isoclina non banale $\dot{x}_1 = 0$).

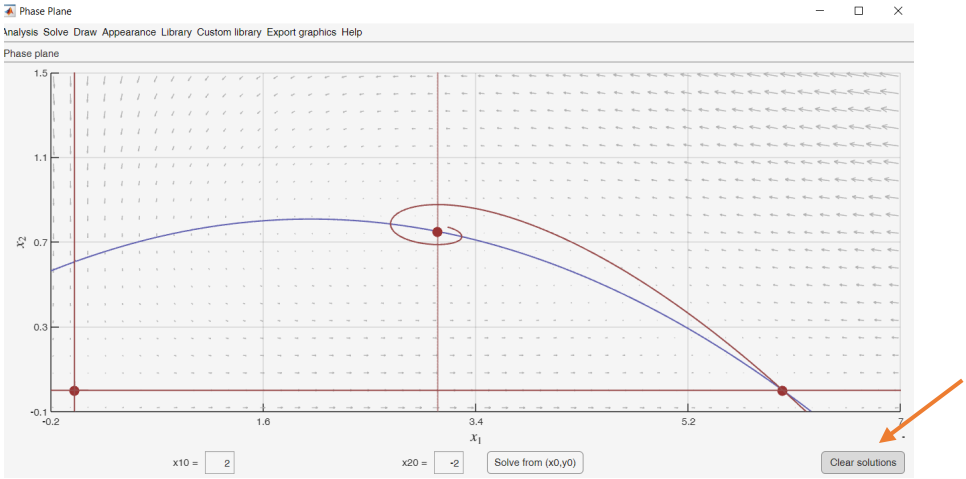
Il comando Analysis → Find nearby equilibrium permette di studiare la stabilità degli equilibri: E_0 è ancora una sella, E_K è ora una sella, mentre l'equilibrio $\bar{E}$ è asintoticamente stabile e di tipo fuoco (J ha due autovalori complessi coniugati a parte reale negativa).

```
Possible equilibrum at (0.00,0.00)
where
[dxdt,dydt] ~= [2.86e-16;1.04e-18]
Looks like a unstable saddle to me.

J ~=  |1          0|
      |0         -1|
with eigenvalues:
 lambda1 = 1.00
 lambda2 = -1.00
and corresponding eigenvectors
 v1 = |1|
      |0|
```

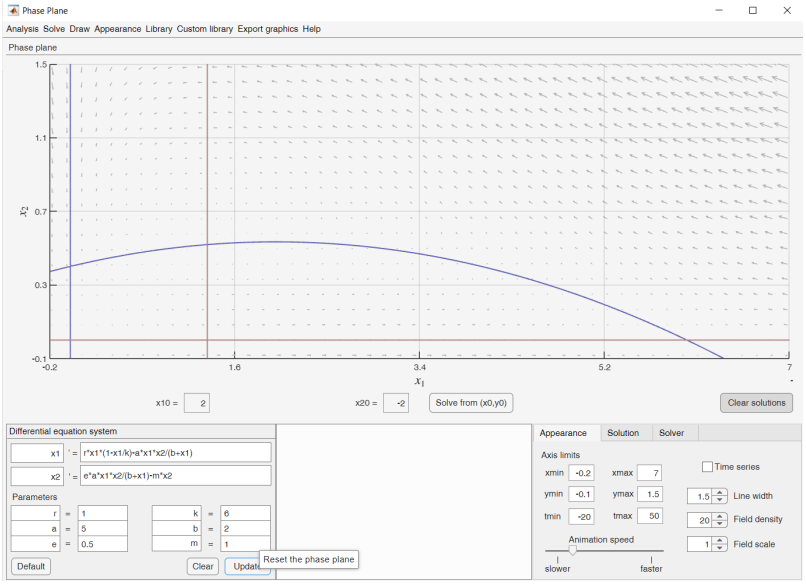
```
Possible equilibrum at (6.00,0.00)
where
[dxdt,dydt] ~= [7.45e-21;-7.15e-22]
Looks like a unstable saddle to me.

J ~=  |-1      -2.48|
      | 0      0.237|
with eigenvalues:
 lambda1 = -1.00
 lambda2 = 0.24
and corresponding eigenvectors
 v1 = |1|
```

```
Possible equilibrum at (3.08,0.75)
where
[dxdt,dydt] ~= [2.22e-16;-1.11e-16]
Looks like a stable and attractive
spiral to me.

J ~=  |-0.218        -2|
      | 0.096         0|
with eigenvalues:
 lambda1 = -0.11-0.42i
 lambda2 = -0.11+0.42i
and corresponding eigenvectors
 v1 = | 0.977+0i     |
```

Puliamo le traiettorie con Clear solutions. Il comando Analysis → Solve for saddle separatrices ci permette di tracciare le varietà stabili e instabili delle selle E_0 ed E_K.



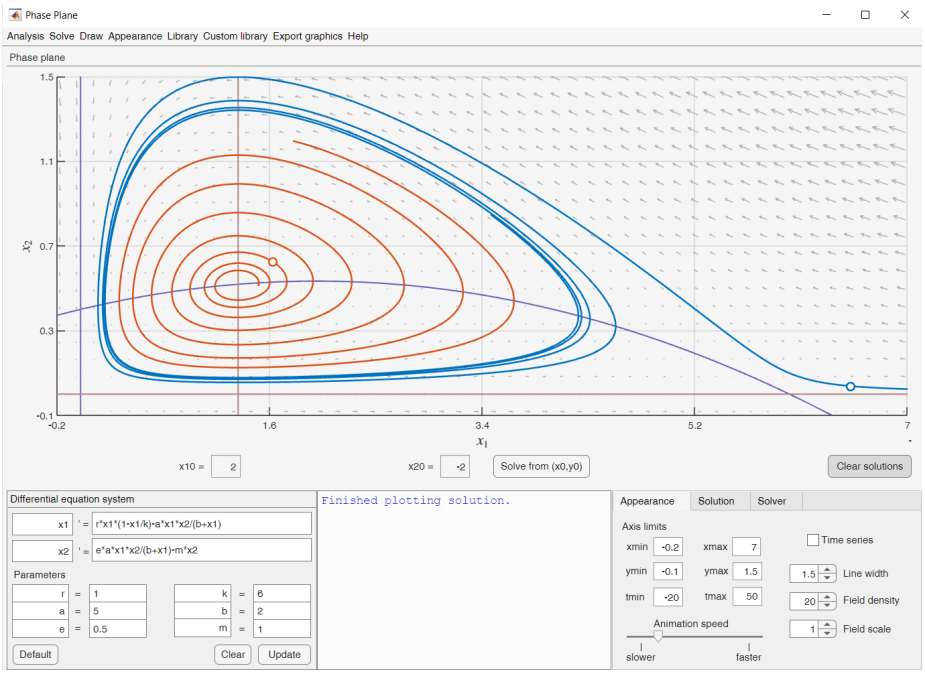
Fissiamo ora il parametro a al valore 5 e produciamo il nuovo campo vettore e le nuove isocline con i comandi Update e Analysis → Show nullclines.



Gli equilibri sono ancora

$E_0 = (0,0)$ $\qquad$ $E_K = (K,0)$ $\qquad$ $\bar{E} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ con $\bar{x}_1 = \frac{mb}{ea-m}$ e $\bar{x}_2 = \frac{r}{a}(1 - \frac{\bar{x}_1}{K})(b + \bar{x}_1)$

Simulando, si ottiene:



Gli equilibri sono ora tutti instabili; in particolare $\bar{E}$ è un fuoco instabile (J ha due autovalori complessi coniugati a parte reale positiva) essendo $\frac{mb}{ea-m} < \frac{K-b}{2}$.

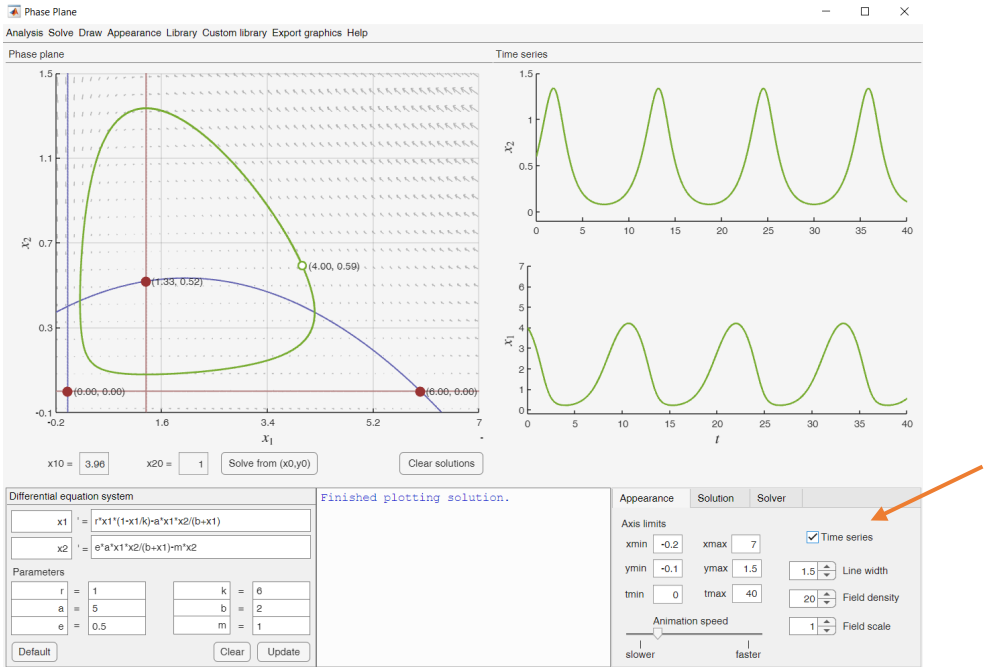
```
Possible equilibrum at (1.33,0.52)
where
[dxdt,dydt] ~= [2.22e-16;0]
Looks like a unstable spiral to me.

J ~=  |0.089        -2|
      |0.233         0|
with eigenvalues:
 lambda1 = 0.04-0.68i
 lambda2 = 0.04+0.68i
and corresponding eigenvectors
 v1 = |-0.946+0i      |
      |-0.021+0.323i|
```

Il sistema tende verso un comportamento periodico (coesistenza ciclica risorsa-consumatore).

Partendo dall'ultima figura mostrata, con questa procedura è poi possibile visualizzare il solo ciclo stabile:

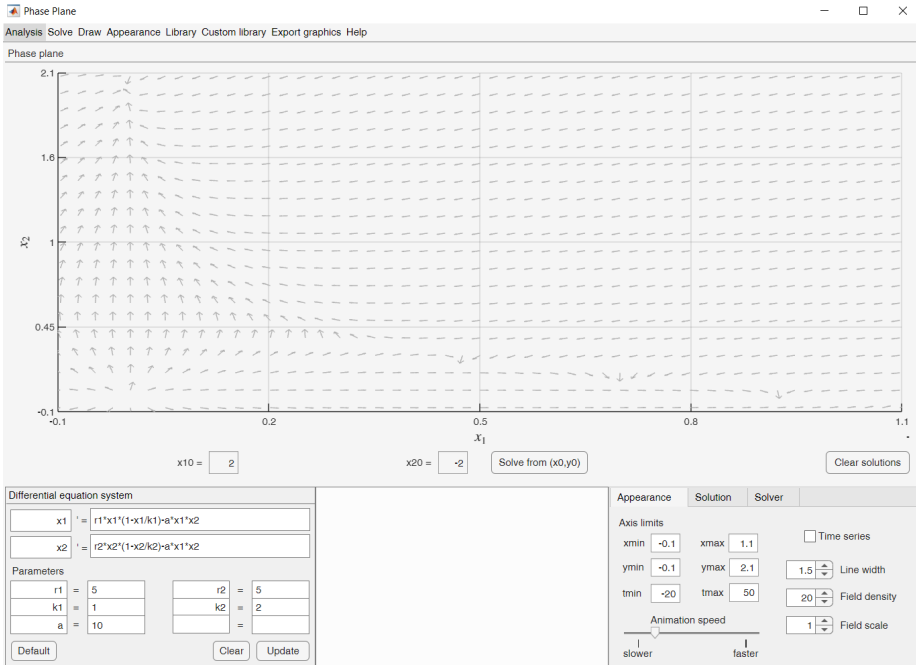
- cambiare t_{min} (da porre a 0 per simulare solo in avanti nel tempo) e t_{max} (da porre a 40 per produrre almeno qualche "giro" sul ciclo)

- cancellare la traiettoria arancione posizionandosi sulla traiettoria e cliccando il pulsante destro del mouse
- cancellare con la stessa procedura la traiettoria blu, scegliendo come punto sulla traiettoria un punto sul ciclo e senza poi spostare il mouse cliccare il pulsante sinistro per ottenere il ciclo
- Time series mostra l'andamento periodico delle variabili di stato nel tempo

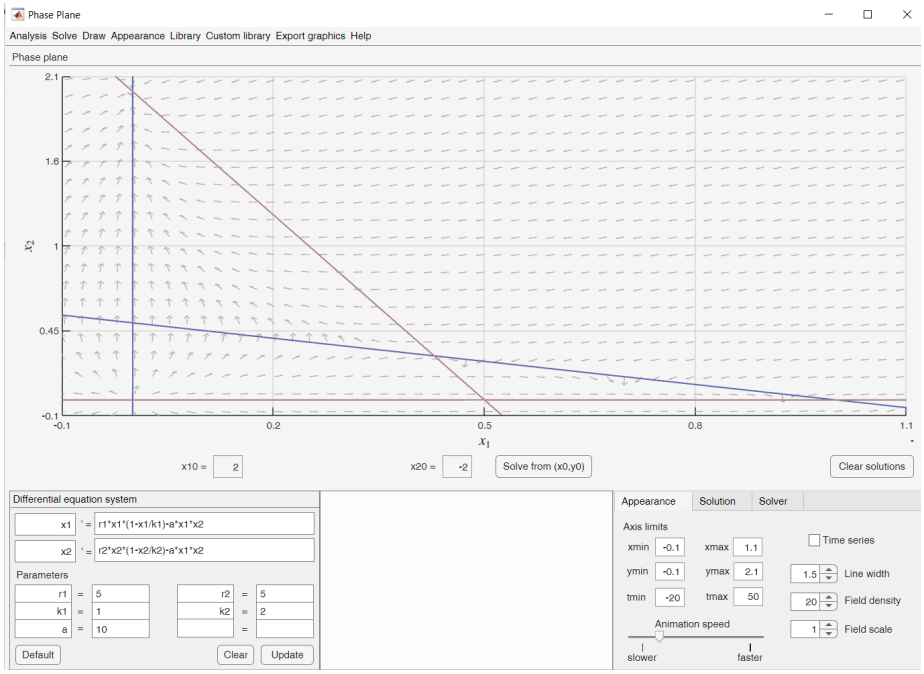


Modello di competizione interspecifica

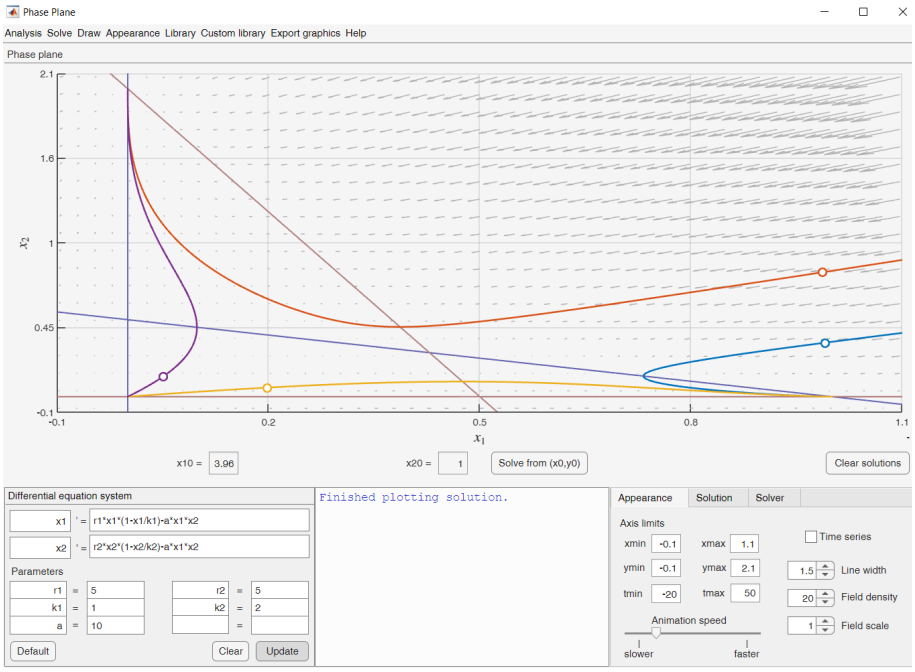
Compiliamo la finestra di Phase Plane definendo il modello (le due equazioni differenziali) e i valori dei parametri (Update aggiorna il sistema; Appearance → Field orientation only visualizza il solo verso del campo vettore tangente le traiettorie mostrando vettori che convergono verso i due equilibri di dominanza alternativa).



Con il comando Analysis → Show nullclines visualizziamo le isocline $\dot{x}_1 = 0$ (in blu) e $\dot{x}_2 = 0$ (in rosso) del sistema.

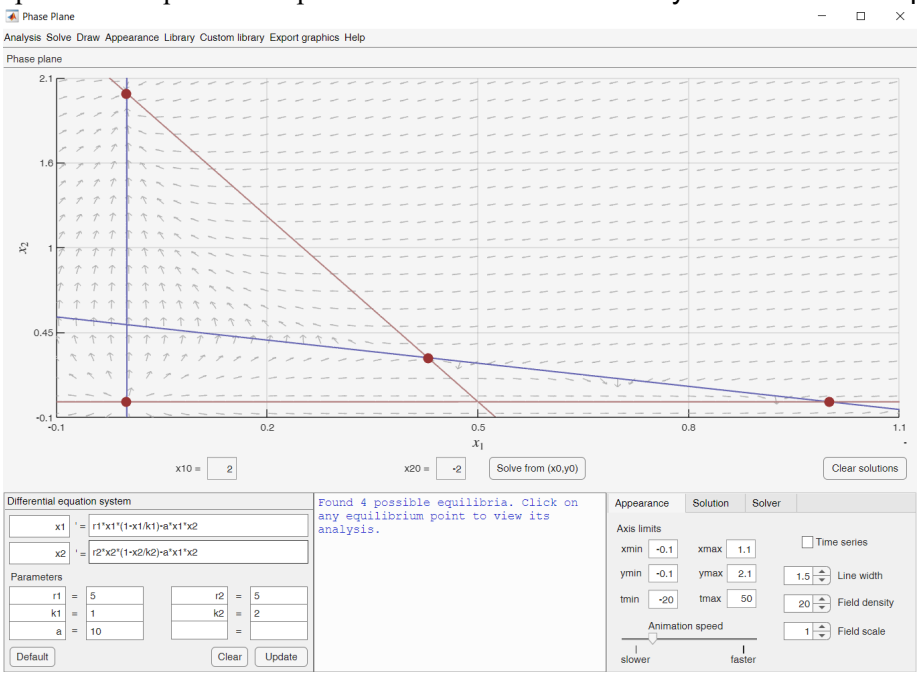


Simuliamo il sistema tracciando le traiettorie nello spazio di stato



A seconda della condizione iniziale, il sistema tende verso l'equilibrio $E_1 = (k_1, 0)$ oppure verso l'equilibrio $E_2 = (0, k_2)$ (che sono localmente asintoticamente stabili)

Il sistema infatti presenta 4 equilibri che possiamo determinare con Analysis → Scan for equilibria



Cliccando su ciascun equilibrio è possibile dedurre la stabilità

```
Possible equilibrum at (0.00,0.00)
where
[dxdt,dydt] ~= [4.02e-17;1.57e-17]
Looks like a unstable node to me.

J ~=  |5         0|
      |0         5|
with eigenvalues:
 lambda1 = 5.00
 lambda2 = 5.00
and corresponding eigenvectors
 v1 = |1|
      |0|
```

$E_0 = (0,0)$ è un repulsore (instabile)

```
Possible equilibrum at (1.00,0.00)
where
[dxdt,dydt] ~= [2.54e-19;1.27e-19]
Looks like a stable and attractive
node to me.

J ~=  |-5       -10|
      | 0        -5|
with eigenvalues:
 lambda1 = -5.00
 lambda2 = -5.00
and corresponding eigenvectors
 v1 = |-1|
```

$E_1 = (k_1, 0)$ è un nodo stabile

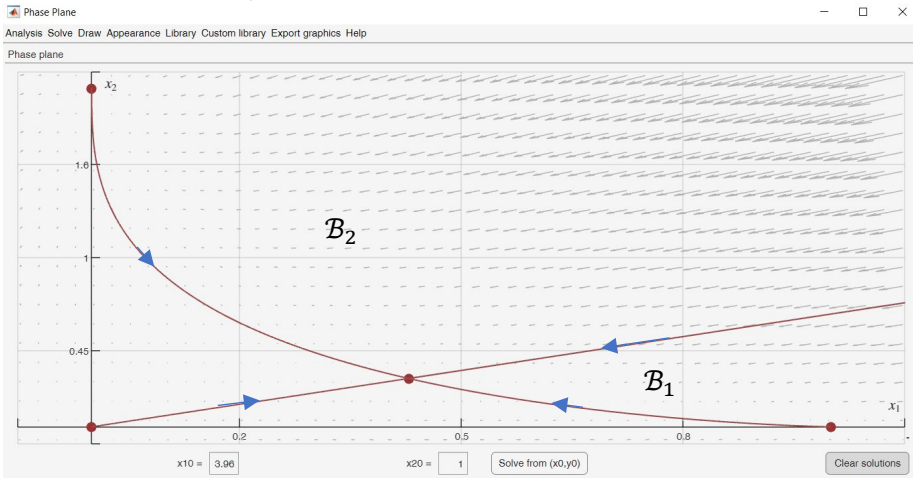
```
Possible equilibrum at (0.00,2.00)
where
[dxdt,dydt] ~= [-1.31e-20;-1.74e-20]
Looks like a stable and attractive
node to me.

J ~=  |-15         0|
      |-20        -5|
with eigenvalues:
 lambda1 = -15.00
 lambda2 = -5.00
and corresponding eigenvectors
 v1 = |-0.447|
```

$E_2 = (0, k_2)$ è un nodo stabile

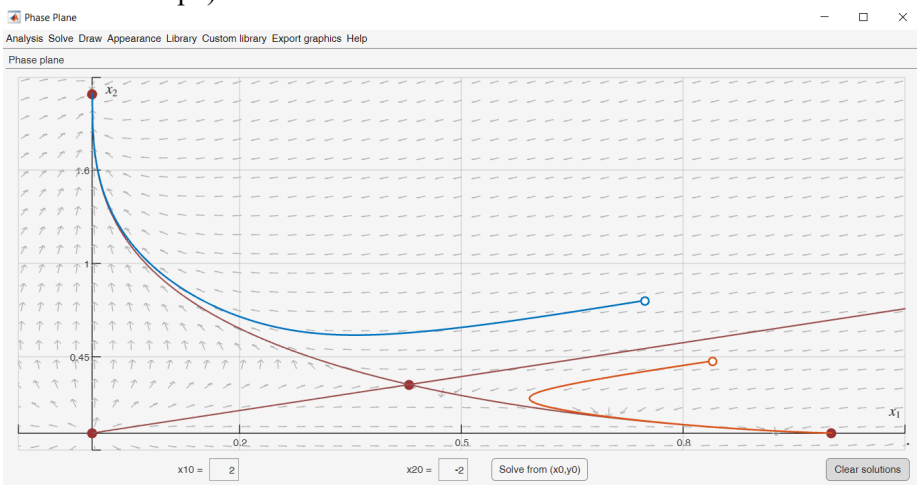
```
Possible equilibrum at (0.43,0.29)
where
[dxdt,dydt] ~= [0;-2.22e-16]
Looks like a unstable saddle to me.

J ~=  |-2.14     -4.29|
      |-2.86    -0.714|
with eigenvalues:
 lambda1 = -5.00
 lambda2 = 2.14
and corresponding eigenvectors
 v1 = |-0.832|
```

$\bar{E} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ è una sella (instabile)

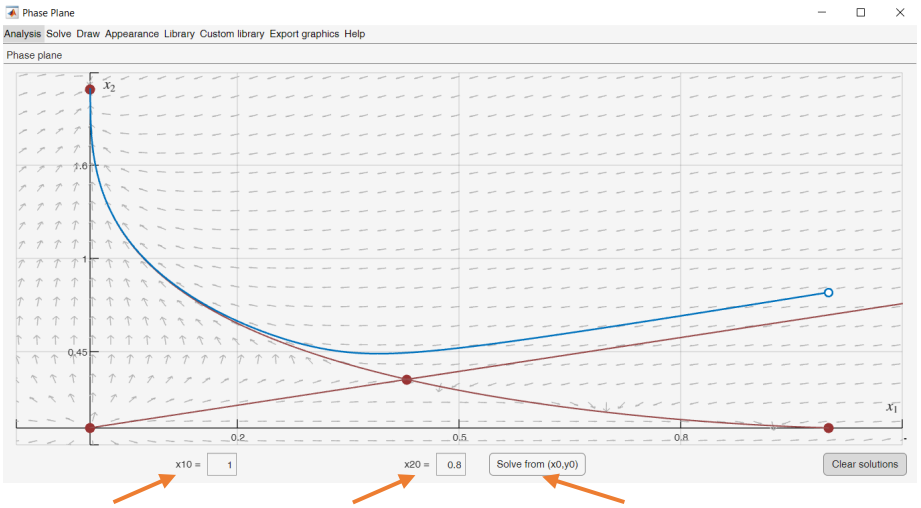
Tracciando le varietà stabile e instabile della sella $\bar{E}$ (Clear solutions, elimina il flag su Analysis → Show nullclines e poi seleziona Analysis → Solve for saddle separatrices) è possibile valutare i bacini di attrazione ($\mathcal{B}_1$ e $\mathcal{B}$) dei due equilibri asintoticamente stabili (E_1 ed E_2). Questi sono definiti dalla varietà stabile della sella $\bar{E}$ (traiettoria entrante in $\bar{E}$).



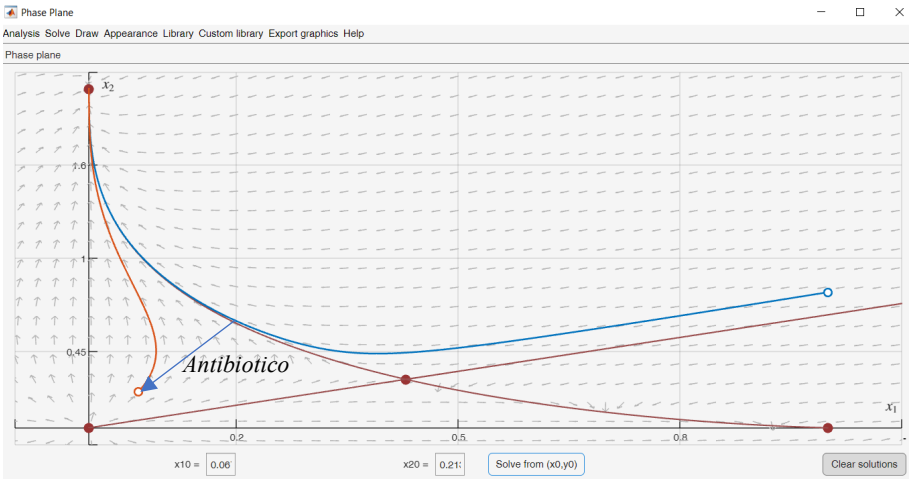
Condizioni iniziali in $\mathcal{B}_1$ ($\mathcal{B}_2$) generano traiettorie che tendono verso l'equilibrio E_1 (E_2) (porre $t_{min} = 0$ per simulare solo in avanti nel tempo).



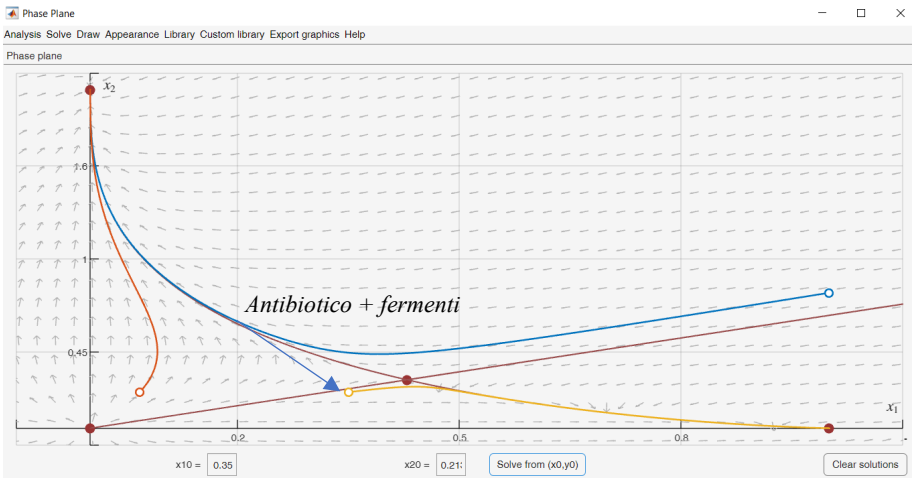
Vediamo ora come cercare una possibile terapia che garantisca la guarigione dell'individuo, una volta che si è instaurato uno stato di malattia.
Supponiamo di essere in una condizione sana ($x_1 = k_1 = 1$ e $x_2 \sim 0$) e che una carica di batteri nocivi ci infetti ($x_2 = 0.8$, per esempio). Fissiamo quindi le condizioni iniziali x10 a 1 e x20 a 0.8 e simuliamo con Solve from (x(0),y(0)). La condizione iniziale si trova in $\mathcal{B}_2$, il sistema tende verso E_2 e l'individuo si ammala.



Una volta che ci siamo accorti che stiamo tendendo verso una condizione di malattia, possiamo decidere di assumere dei farmaci (inizialmente solo antibiotici) per cercare di guarire. Tale assunzione corrisponde a una diminuzione di entrambe le densità batteriche, non solo di x_2 ma anche di x_1.
Ipotizzando di iniziare la cura antibiotica quando $x_1 = 0.2$ ($x_2 \sim 0.64$) e supponendo che l'antibiotico comporti una riduzione pari a $\frac{1}{3}$ delle cariche batteriche, la nuova condizione iniziale diventa $x_1 = \frac{0.2}{3} = 0.067$ e $x_2 = \frac{0.64}{3} = 0.213$.



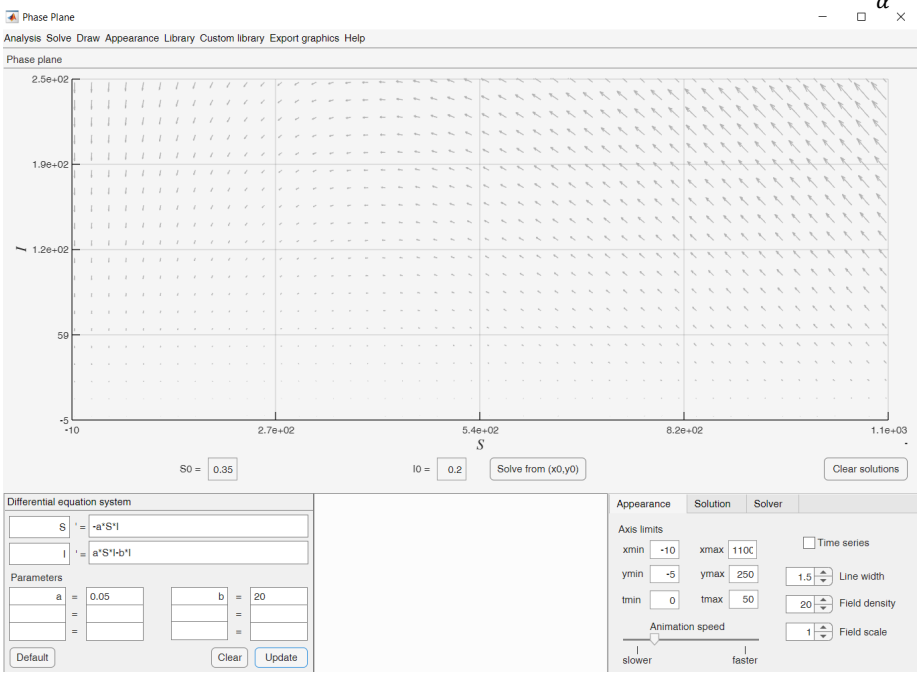
Il sistema tende ancora verso una condizione di malattia; ciò avviene perché la nuova condizione iniziale si trova in $\mathcal{B}_2$. Decidiamo quindi di affiancare alla cura antibiotica l'assunzione di fermenti lattici che aumenti la densità di batteri x_1 così che la nuova condizione iniziale dell'individuo si trovi in $\mathcal{B}_1$. Ipotizzando $x_1 = 0.35$ (antibiotico + fermenti) e $x_2 = 0.213$ (antibiotico) si ha:



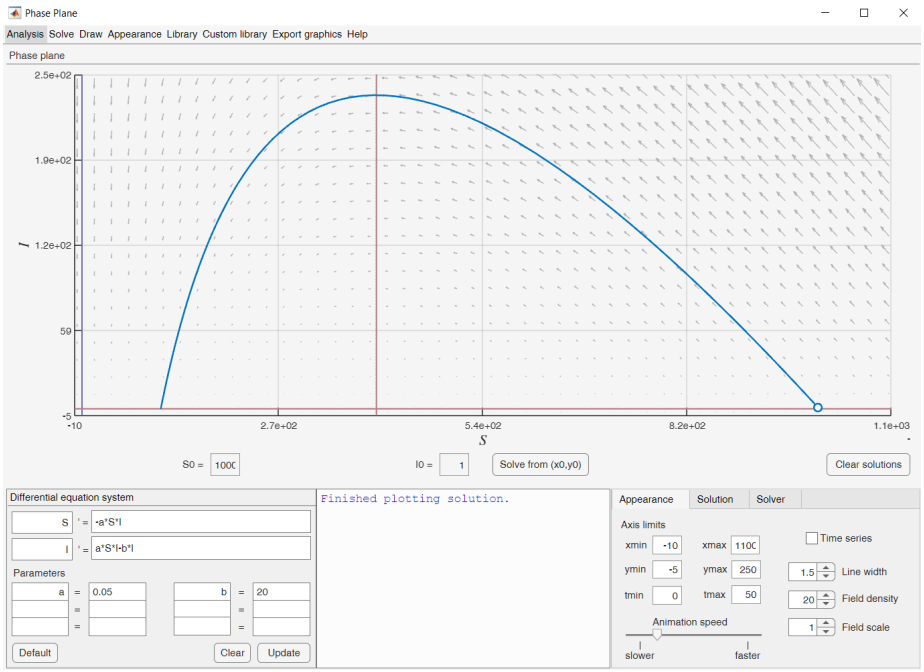
Pertanto, una cura antibiotica combinata a una terapia a base di assunzione di fermenti lattici porta l'individuo a guarigione.

Modello di epidemie

Compiliamo la finestra di Phase Plane definendo il modello e i valori dei parametri (nota: $\frac{\beta}{\alpha} = \frac{20}{0.05} = 400$)



Tracciamo le isocline (Analysis → Show nullclines) e osserviamo che all'ingresso di un infetto nella popolazione (x10 = 1000, x20 = 1, simuliamo con Solve from (x(0),y(0))) l'epidemia si sviluppa ($S(0) = 1000 > \frac{\beta}{\alpha} = 400$, vedi esercitazione 1).

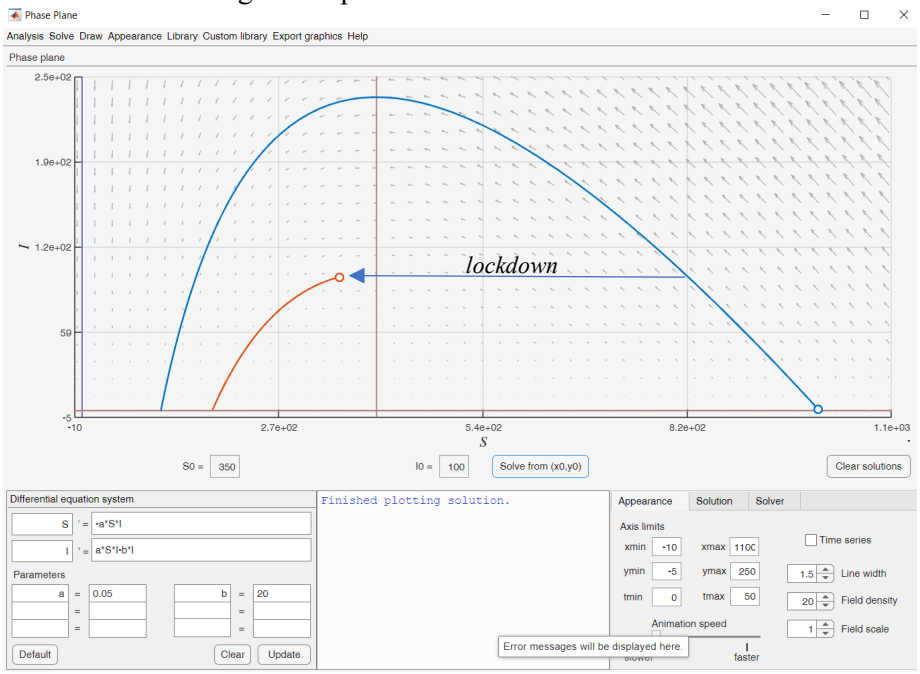


Per evitare che questo accada occorre fare in modo che $S(0)$ sia inferiore a $\frac{\beta}{\alpha}$.

Pertanto, per contenere lo sviluppo dell'epidemia, possiamo provare a intraprendere le seguenti azioni di controllo:

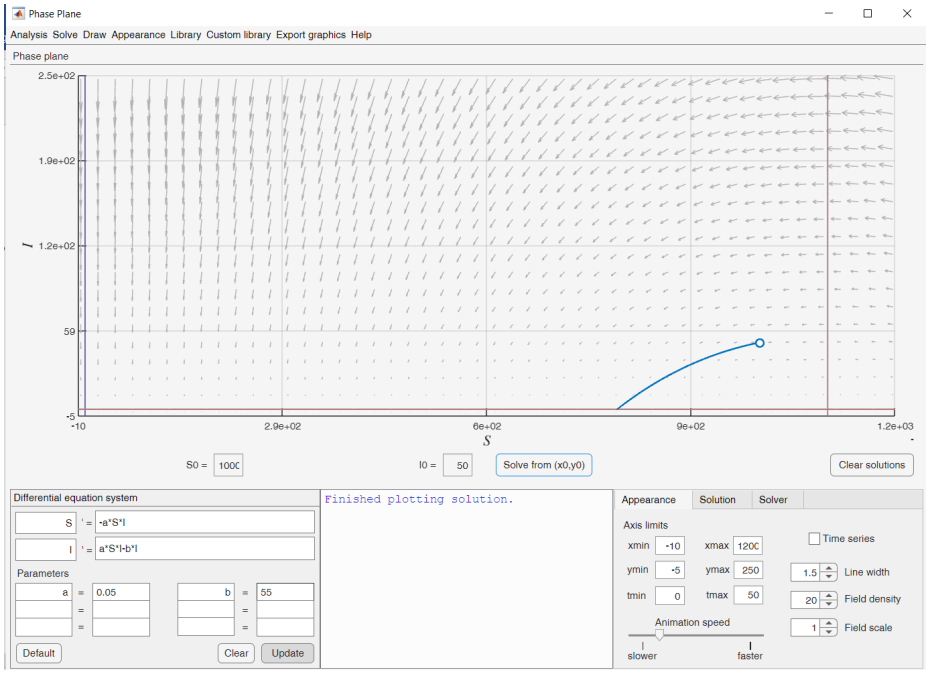
- *Lockdown*: si impedisce alla popolazione suscettibile di circolare e di incontrare individui infetti → $S(0)$ può diventare inferiore a $\frac{\beta}{\alpha}$

Partendo da epidemia in corso ($I(0) = 100$), poniamo $S(0) = 350$. La nuova condizione iniziale per i suscettibili è a sinistra della soglia è l'epidemia si esaurisce.



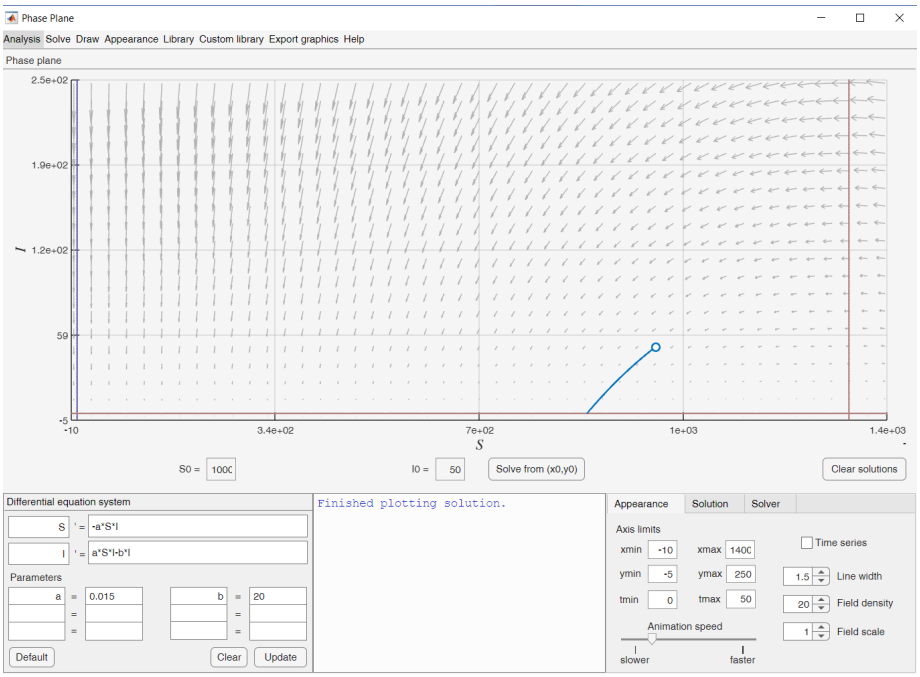
- <u>*Miglioramento delle cure*</u>: il tasso di guarigione β aumenta; se $S(0)$ diventa inferiore a $\frac{\beta}{\alpha}$ l'epidemia non si sviluppa.

  Per esempio, con $\beta = 55$ ($S(0) = 1000 < \frac{\beta}{\alpha} = 1100$), un'epidemia già in corso ($S(0) = 1000, I(0) = 50$) si esaurisce.

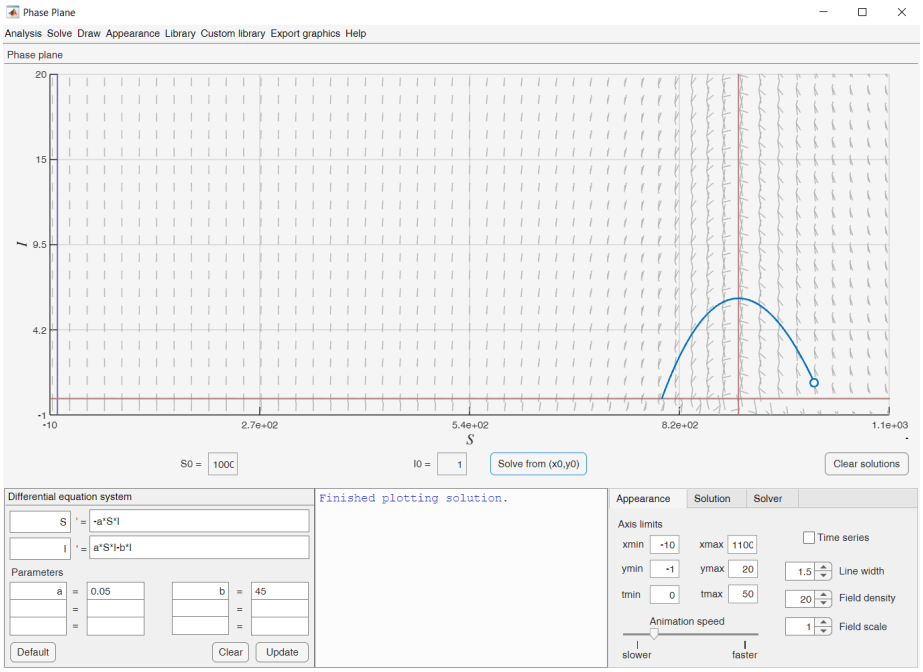


- <u>*Mascherine e vaccini*</u>: il tasso di contagio α diminuisce; se $S(0)$ diventa inferiore a $\frac{\beta}{\alpha}$ l'epidemia non si sviluppa.

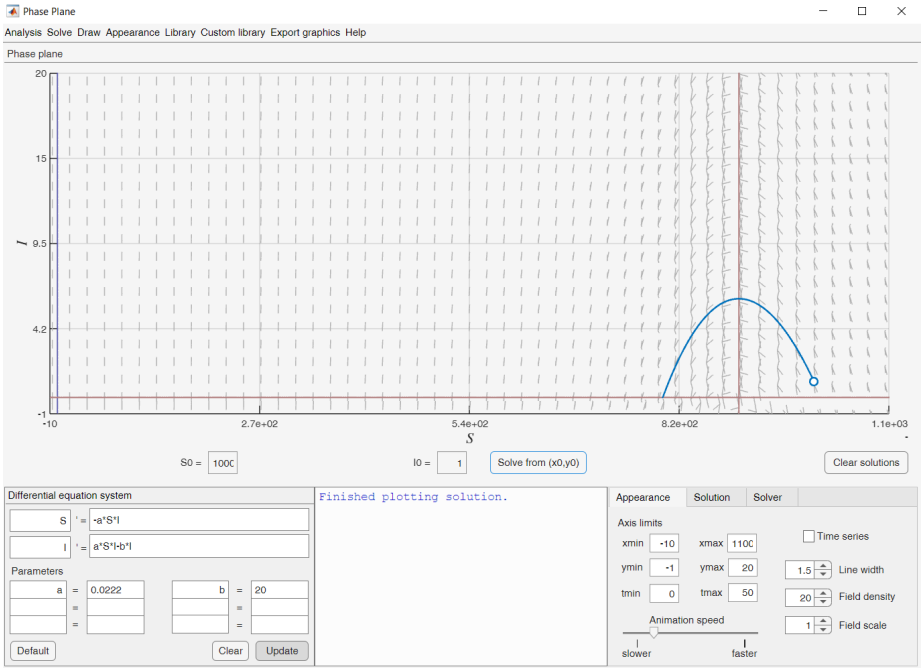
  Per esempio, con $\alpha = 0.015$ ($S(0) = 1000 < \frac{\beta}{\alpha} = 1333$), un'epidemia già in corso ($S(0) = 1000, I(0) = 50$) si esaurisce.



Supponiamo ora di non riuscire a evitare lo sviluppo dell'epidemia ma di voler arrivare al termine di questa con un numero finale di suscettibili pari a 800 (il 20% ha contratto la malattia). Dopo alcune prove di simulazione si nota che tale risultato si ottiene (partendo da $S(0) = 1000, I(0) = 1$) se $\frac{\beta}{\alpha} = 900$. Infatti, con $\alpha = 0.05$ e $\beta = 45$, si ha:



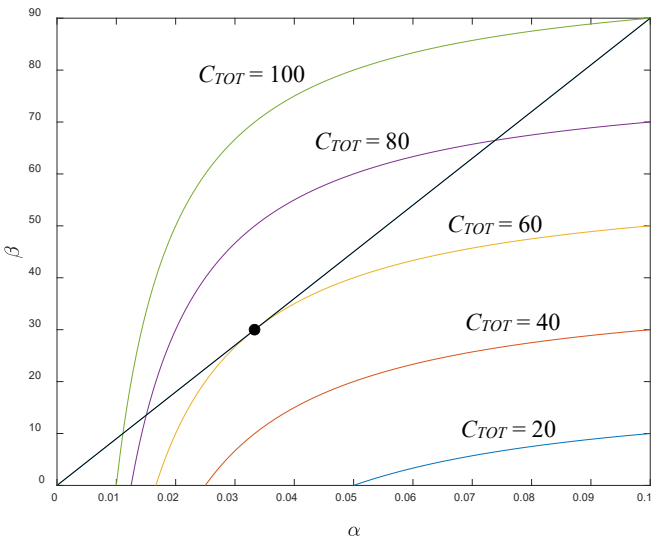
In modo analogo, con $\alpha = 0.0222$ e $\beta = 20$, si ha:



Supponiamo ora che vi sia un costo associato al miglioramento delle cure (aumento di β) e all'uso di mascherine e produzione dei vaccini (diminuzione di α), così che, per esempio: $C_{TOT} = \beta + \frac{1}{\alpha}$.
Vogliamo ora determinare i valori di α e β che garantiscano che solo il 20% della popolazione si ammali minimizzando i costi di gestione dell'epidemia.
Si tratta quindi di risolvere il problema

$$\begin{cases} min_{\alpha,\beta}\left(\beta + \frac{1}{\alpha}\right) = C_{TOT} \\ \frac{\beta}{\alpha} = 900 \end{cases}$$

In figura è mostrata la soluzione grafica (la soluzione ottima e nel punto)

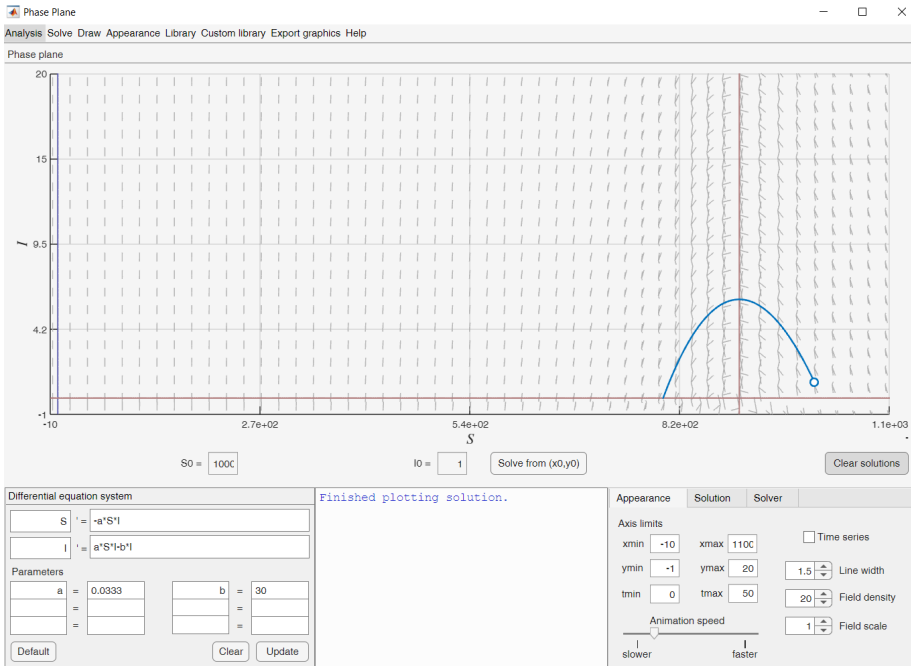


Analiticamente

$$\begin{matrix} \beta + \frac{1}{\alpha} = C_{TOT} \\ \beta = 900\alpha \end{matrix} \rightarrow 900\alpha^2 - C_{TOT}\alpha + 1 = 0$$

La condizione di tangenza tra le curve è: $C_{TOT}^2 - 4 \cdot 900 = C_{TOT}^2 - 3600 = 0 \rightarrow C_{TOT} = 60$

$\alpha = -\frac{-C_{TOT}}{2 \cdot 900} = \frac{60}{3600} = 0.0333$ $\qquad$ $\beta = 900\alpha = 30$


Phase Plane
Analysis Solve Draw Appearance Library Custom library Export graphics Help
Phase plane
20
15
9.5
4.2
-1
I
-10
2.7e+02
5.4e+02
8.2e+02
1.1e+03
S
S0 = 1000
I0 = 1
Solve from (x0,y0)
Clear solutions
Differential equation system
S ' = -a*S*I
I ' = a*S*I-b*I
Parameters
a = 0.0333
b = 30
Default
Clear
Update
Finished plotting solution.
Appearance
Solution
Solver
Axis limits
xmin -10
xmax 1100
ymin -1
ymax 20
tmin 0
tmax 50
Time series
1.5 Line width
20 Field density
1 Field scale
Animation speed
slower
faster

MathWorks
Accelerating the pace of engineering and science

Phase Plane App

Quick Start Guide

Use the phase plane app to analyze autonomous ODE systems of the form:

$$\frac{dx}{dt} = f(x,y) \qquad \frac{dy}{dt} = g(x,y)$$

3. Explore

Find equilibria from the **Analysis** menu

Draw a solution

Select a different ODE system from the library

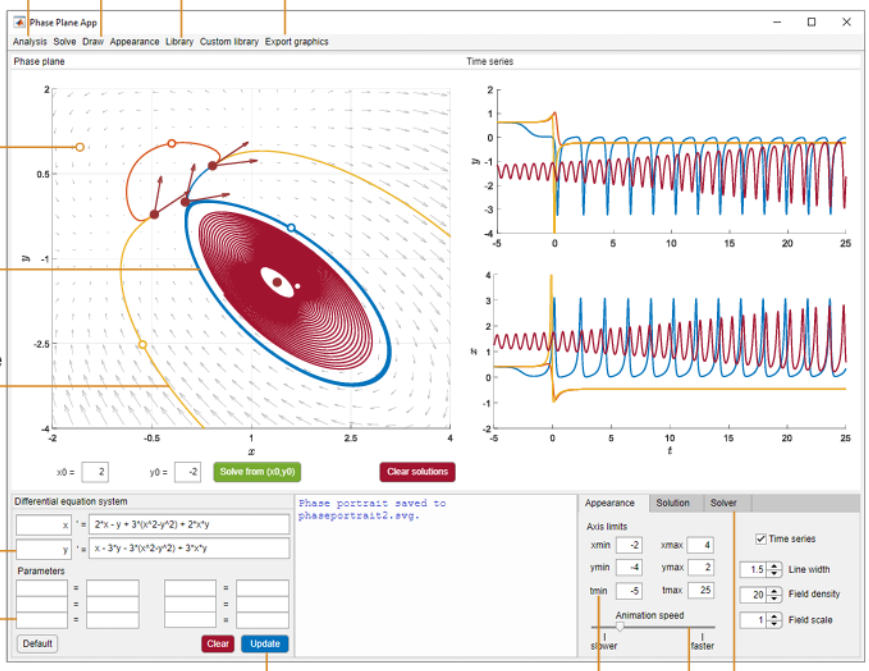
Export the phase portrait to an image

2. Solve

Solve by clicking on the field

Delete a solution by right-clicking it

Highlight a solution curve by left-clicking it



1. Define the ODE system

Define the ODE system by entering an expression

Set parameters by entering names and values

Update the slope field by clicking **Update**

4. Tune

Adjust the axis limits

Speed up the animation

Adjust the solver tolerance

© 2021 The MathWorks, Inc.