Analisi di sistemi planari con pplane

1 Modello risorse-consumatori

Sia dato il modello di Rosenzweig-MacArthur

$$\dot{x}_1 = rx_1\left(1-\frac{x_1}{K}\right) - \frac{ax_1}{b+x_1}x_2$$
$$\dot{x}_2 = e\frac{ax_1}{b+x_1}x_2 - mx_2$$

dove x_1 è la densità di risorse, x_2 la densità di consumatori, $r = m = 1$, $K = 6$, $b = 2$ ed $e = 0.5$.

Utilizzando pplane si simuli l'andamento del sistema per i seguenti valori di a: 2.6, 3.3 e 5.

Osservando nei tre casi la posizione delle isocline intuire una possibile "regola" che permetta di prevedere il comportamento del modello (estinzione dei consumatori, coesistenza stazionaria risorse-consumatori, coesistenza ciclica risorse-consumatori).

2 Modello di competizione interspecifica

Sia dato il modello di competizione interspecifica tra due popolazioni batteriche

$$\dot{x}_1 = r_1x_1\left(1-\frac{x_1}{K_1}\right) - ax_1x_2$$
$$\dot{x}_2 = r_2x_2\left(1-\frac{x_2}{K_2}\right) - ax_1x_2$$

dove x_1 è la densità di batteri utili e x_2 la densità di batteri nocivi per la buona salute dell'individuo che li ospita.

I valori dei parametri sono: $r_1 = 5$, $r_2 = 5$, $K_1 = 1$, $K_2 = 2$, $a = 10$.

Mediante pplane verificare che il modello presenta due equilibri stabili alternativi corrispondenti alla dominanza di una sola delle due specie batteriche, valutandone anche i bacini di attrazione.

Supponendo che si instauri una situazione che porti a uno stato di malattia (dominanza di batteri nocivi), cercare una possibile terapia che garantisca la guarigione dell'individuo.

3 Modello di epidemie

Si consideri il sistema seguente (modello di Kermack-McKendrick) che descrive lo sviluppo dell'epidemia di una particolare malattia

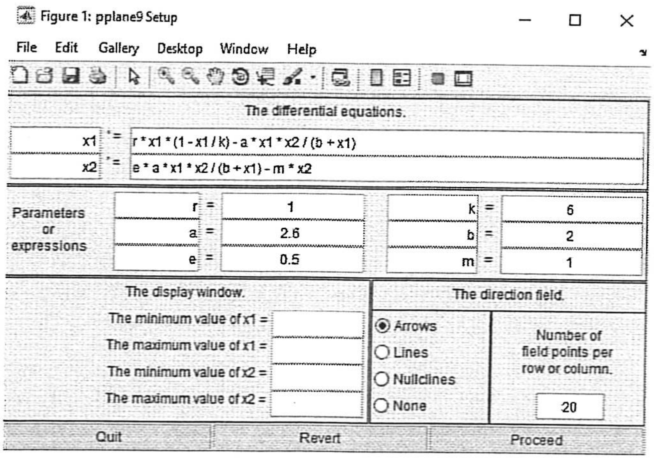
$$\dot{S} = -\alpha SI$$
$$\dot{I} = \alpha SI - \beta I$$

do. S ed I rappresentano, rispettivamente, la densità degli individui sani (ma suscettibili di essere infettati) e degli individui infetti (che possono trasmettere l'infezione prima di morirne o guarirne, diventando in questo caso sani ma non suscettibili perché dotati di anticorpi). Si supponga che, in assenza di una politica di controllo dello sviluppo dell'epidemia, la probabilità di contagio α (inversamente correlata all'uso di mascherine, distanziamento sociale, vaccini) sia pari a 0.05 mentre il tasso di guarigione dalla malattia β (direttamente correlato al miglioramento delle terapie) sia pari a 20. Supponendo che la densità iniziale di individui suscettibili sia pari a 1000, valutare mediante pplane se l'epidemia si sviluppa oppure no. Si spieghi il risultato ottenuto. Si propongano delle azioni di controllo (corrispondenti a opportune variazioni parametriche) che evitino lo sviluppo dell'epidemia o che, al limite, la rendano meno grave supponendo, per esempio, che al più il 20% della popolazione contragga la malattia. Infine, si determinino i valori ottimali per i parametri α e β che permettono di minimizzare i costi totali ($C_{TOT} = \beta + \frac{1}{\alpha}$) di gestione della malattia.

TRACCE DELLE SOLUZIONI

1. Modello risorse - consumatori:

Compiliamo la finestra di Setup ⊛ fornendo a pplane le due equazioni differenziali e i valori dei parametri (NOTA: al massimo possono essere lasciati "liberi" 6 parametri), fissando inizialmente "a" al valore 2,6.

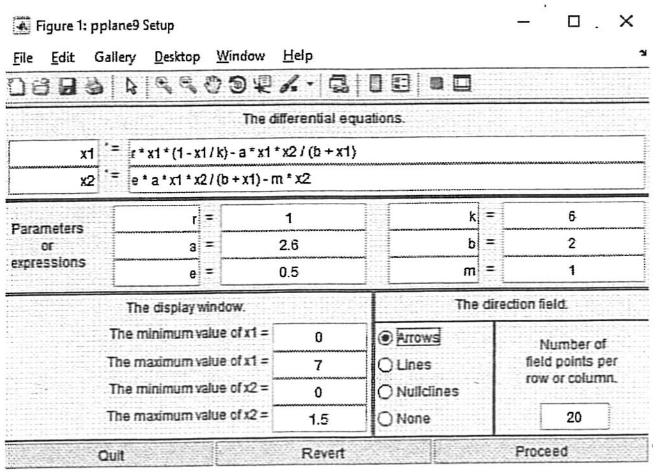


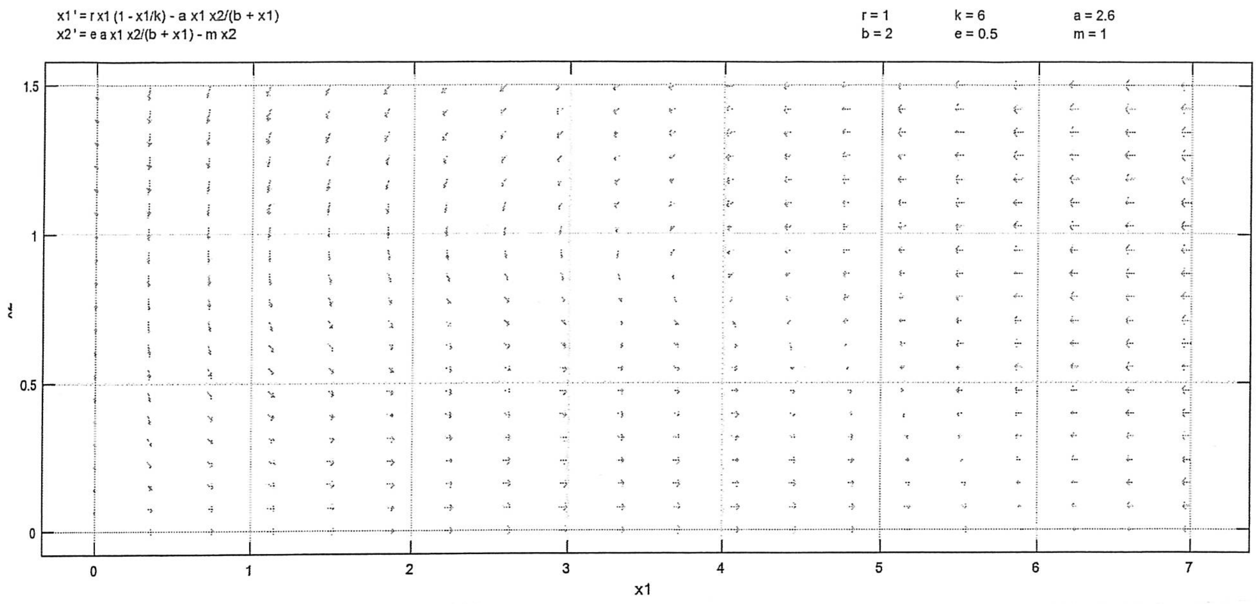
⊛ Edit → Clear all pulisce la finestra di Setup

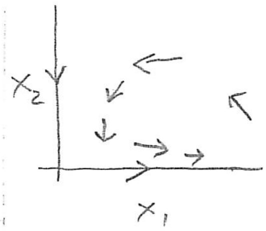
File → Save the current system salva quanto inserito

Per visualizzare le isocline e il verso del vettore tangente le traiettorie nello spazio di stato (x_1, x_2):

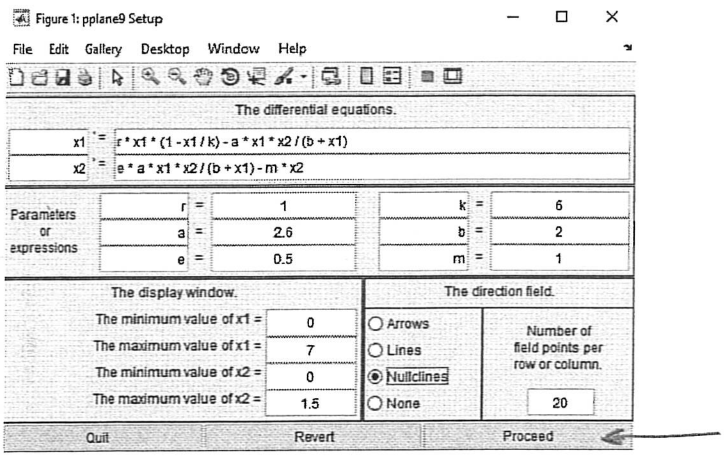
- fissiamo un valore minimo e massimo (0 e 7, rispettivamente) per la variabile x_1;
- fissiamo un valore minimo e massimo (0 e 1,5, rispettivamente) per la variabile x_2;
- selezioniamo "Arrows" e "Proceed" per visualizzare il vettore tangente





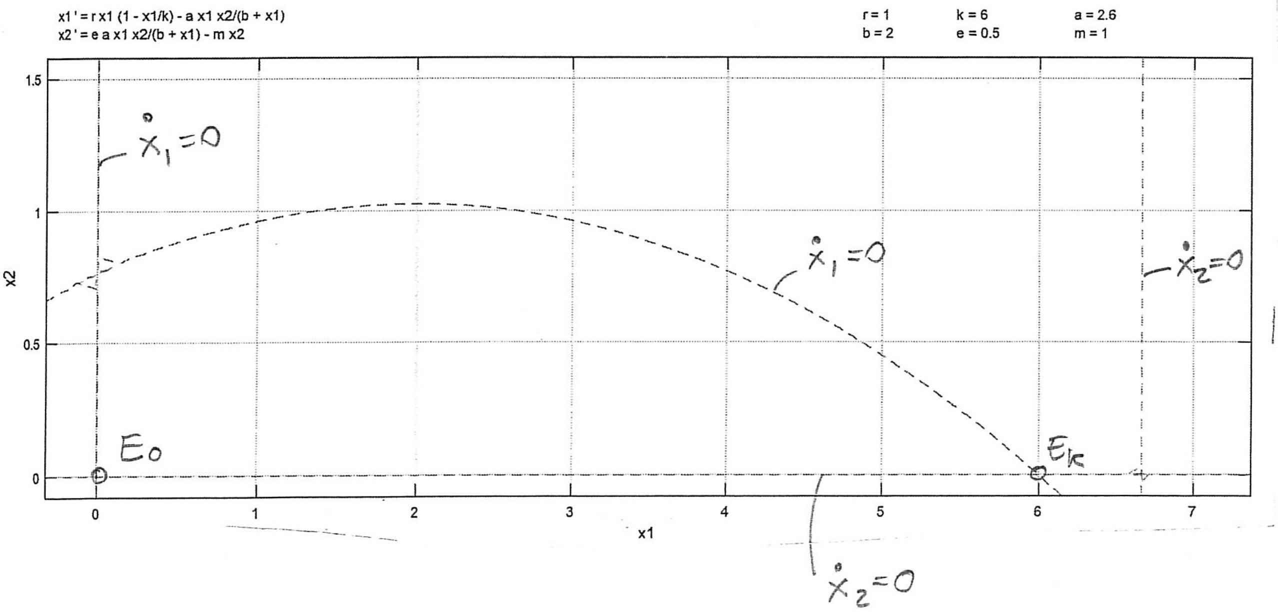


- selezioniamo "Nullclines" e "Proceed" per visualizzare le isocline



$$\dot{x}_1 = 0 \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = \frac{r}{a}(b+x_1)\left(1-\frac{x_1}{k}\right) \end{cases}$$

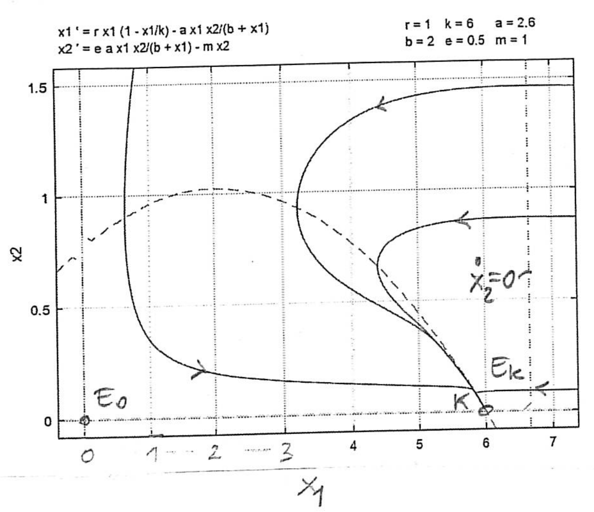
$$\dot{x}_2 = 0 \begin{cases} x_2 = 0 \\ x_A = \frac{mb}{ea-m} \end{cases}$$



$$\text{Equilibri} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = 0 \\ \dot{x}_2 = 0 \end{cases} \rightarrow \cap \text{ isocline} \begin{cases} E_0 = (0,0) \\ E_k = (k,0) = (6,0) \end{cases}$$

Simuliamo ora il sistema tracciando le traiettorie nello spazio di stato (x_1, x_2)

Scegliamo diverse condizioni iniziali posizionando il cursore in diversi punti della finestra grafica. Al "click" del mouse viene prodotta la traiettoria (in avanti e all'indietro nel tempo) corrispondente alla condizione iniziale scelta



L'equilibrio E_K è asintoticamente stabile

L'isoclina non banale $\dot{x}_2 = 0$ si trova a destra di E_K

$$\frac{mb}{ea - m} > k$$

ESTINZIONE DEI CONSUMATORI

Per simulare solo in avanti nel tempo:

Options → Solution direction → Forward / → Back

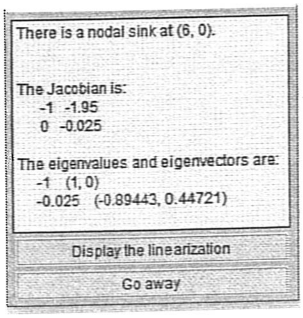
Per inserire la condizione iniziale:

Solutions → keyboard input   Inserire $x_1(0)$ e $x_2(0)$ → Compute

Per studiare la stabilità locale degli equilibri:

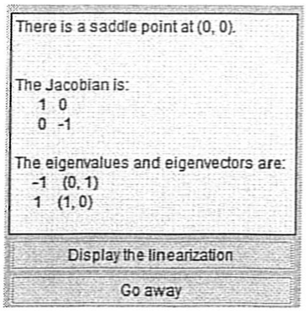
Solutions → Find an equilibrium point

Posizionandosi vicino a un punto di equilibrio (cioè all'intersezione delle isocline) e scegliendo tale punto con il mouse si nota che



E_K è un nodo stabile

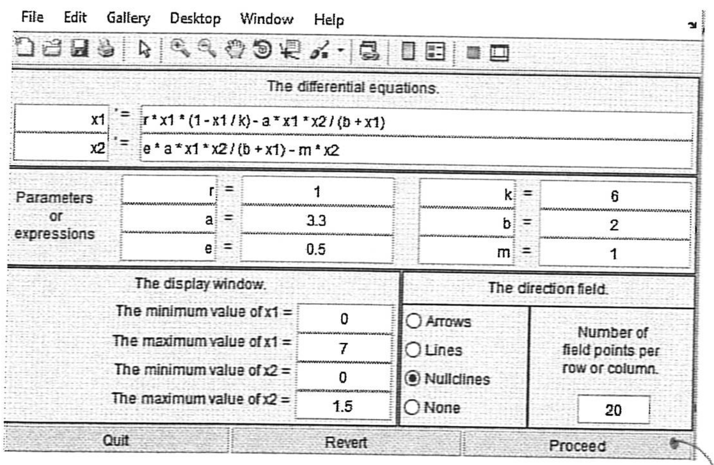
$\mathrm{Re}(\lambda_1, \lambda_2) < 0$

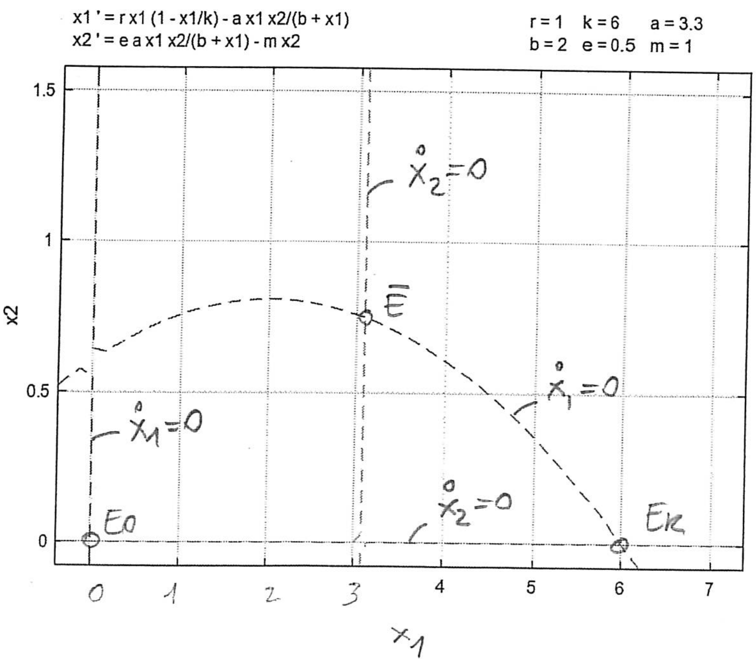


E_0 è una sella
$\lambda_1 < 0 \quad \lambda_2 > 0$

È anche possibile tracciare le varietà stabile e instabile della sella (asse x_2 e asse x_1, rispettivamente) con:
Solutions → Plot stable and unstable orbits
selezionando con il mouse la sella

Fissiamo ora il parametro "a" al valore 3,3

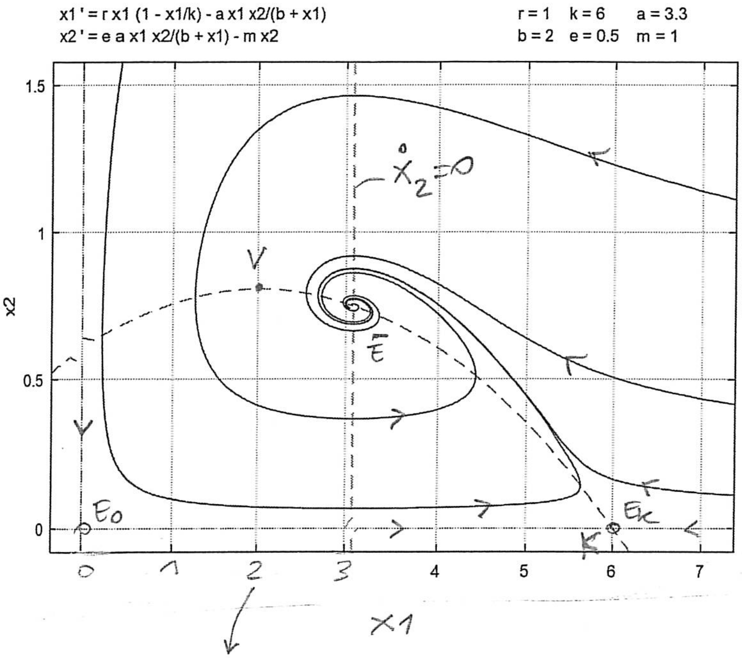




Equilibri $\Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = 0 \\ \dot{x}_2 = 0 \end{cases} \rightarrow \cap$ isocline $\begin{cases} E_0 = (0,0) \\ E_K = (K,0) \\ \bar{E} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2) \end{cases}$

$$\bar{x}_1 = \frac{mb}{ea-m} \qquad \bar{x}_2 = \frac{r}{a}(b+\bar{x}_1)\left(1-\frac{\bar{x}_1}{K}\right)$$

Simulando il sistema si ottiene il seguente quadro delle traiettorie:



$$x_1^V = \frac{K-b}{2}$$

L'equilibrio $\bar{E}$ è asintoticamente stabile

L'isoclina non banale $\dot{x}_2 = 0$ si trova tra il massimo della parabola (isoclina non banale $\dot{x}_1 = 0$) e il punto E_K

$$\frac{K-b}{2} < \frac{mb}{ea-m} < K$$

COESISTENZA STAZIONARIA RISORSE – CONSUMATORI

Utilizzando il comando Solutions → Find an equilibrium point si nota in effetti che:

There is a saddle point at (6, 0).

The Jacobian is:
-1 -2.475
0 0.2375

The eigenvalues and eigenvectors are:
-1 (1, 0)
0.2375 (-0.89443, 0.44721)

Display the linearization

Go away

There is a saddle point at (0, 0).

The Jacobian is:
1 0
0 -1

The eigenvalues and eigenvectors are:
-1 (0, 1)
1 (1, 0)

Display the linearization

Go away

There is a spiral sink at (3.0769, 0.74951).

The Jacobian is:
-0.21756 -2
0.09596 0

The eigenvalues and eigenvectors are:
-0.10878+0.42437i (0.97684, -0.05313-0.20727i)
-0.10878-0.42437i (0.97684, -0.05313+0.20727i)

Display the linearization

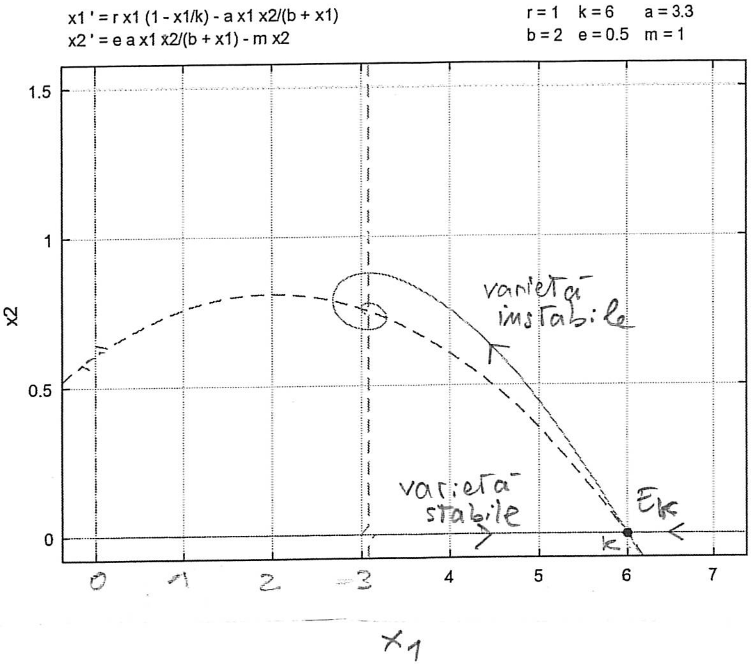
Go away

$E_K = (K,0)$ è una sella $\lambda_1 < 0 \quad \lambda_2 > 0$

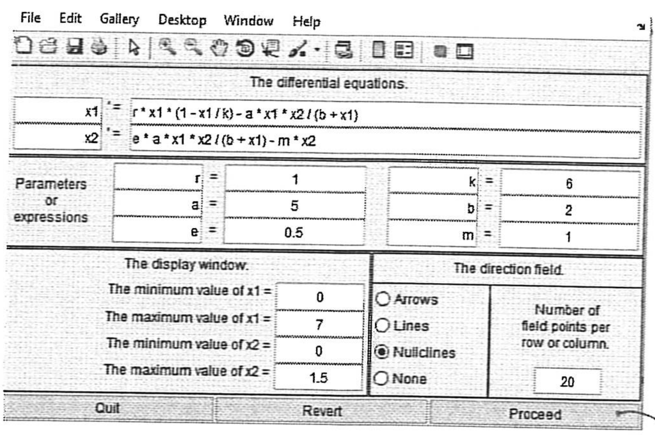
$E_0 = (0,0)$ è una sella $\lambda_1 < 0 \quad \lambda_2 > 0$

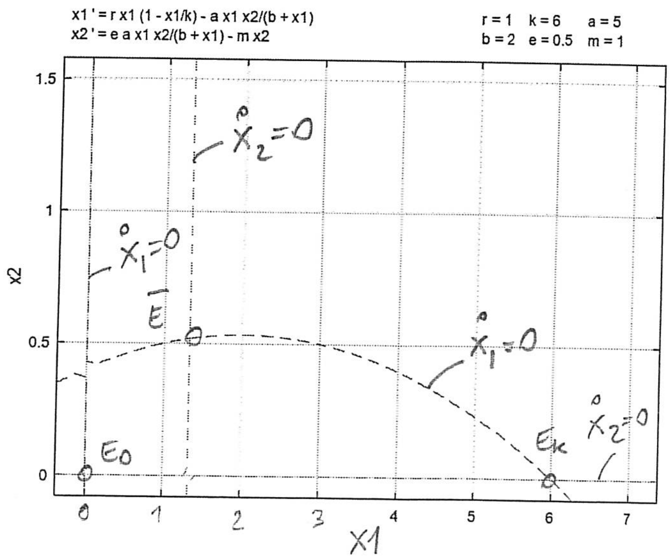
$\bar{E} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ è stabile (fuoco stabile) $\lambda_{1,2} \in \mathbb{C}$ con $\mathrm{Re}(\lambda_i) < 0$

Solutions → Plot stable and unstable orbits
genera le varietà stabile e instabile della sella in E_K



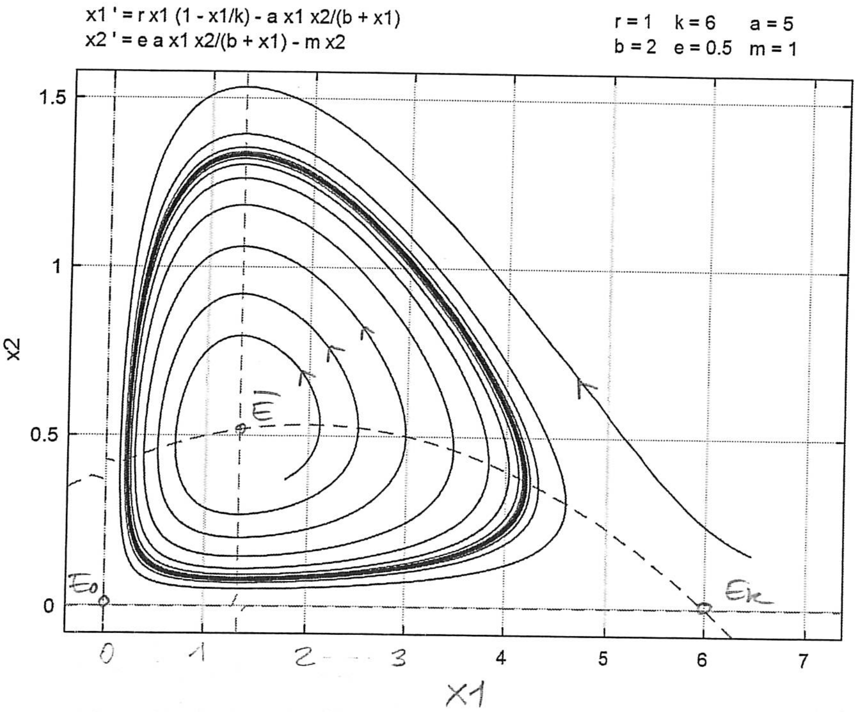
Fissiamo ora "a" al valore 5





Gli equilibri sono ancora $E_0 = (0,0)$, $E_K = (k,0)$, $\bar{E} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2)$

Simulando si ottiene:



NOTA: le simulazioni sono in avanti nel tempo

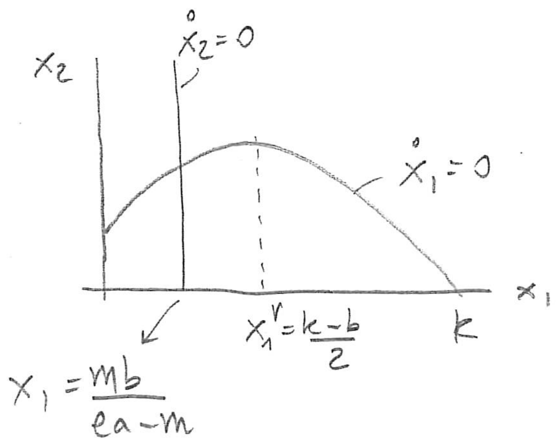
Options → Solution direction → Forward

E_0, E_K ed $\bar{E}$ sono ora tutti instabili e il sistema tende verso un comportamento periodico

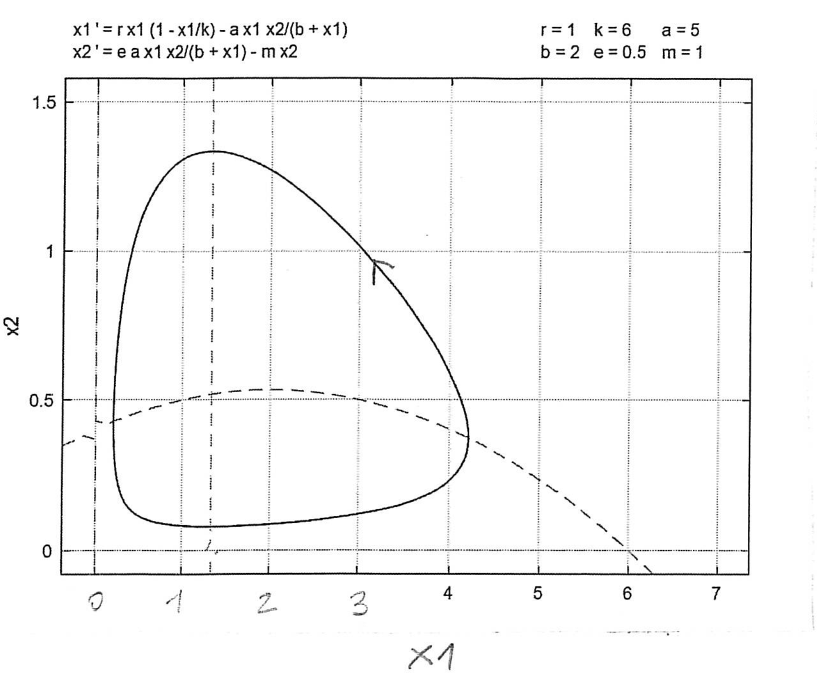
L'isoclina non banale $\dot{x}_2 = 0$ si trova ora a sinistra del massimo della parabola (isoclina non banale $\dot{x}_1 = 0$)

$$\frac{mb}{ea - m} < \frac{k-b}{2}$$

COESISTENZA CICLICA
RISORSE – CONSUMATORI

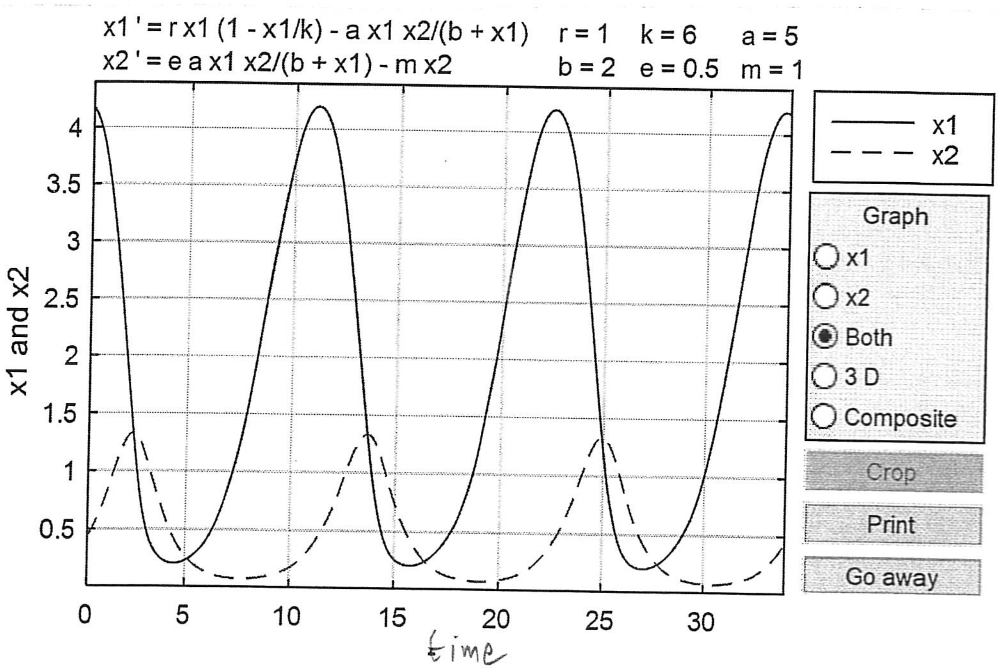


E' anche possibile evidenziare il solo ciclo stabile con Solutions → Find a nearly closed orbit → forward scegliendo con il cursore una posizione iniziale per esempio circa pari a (2,5 , 1)



Si possono visualizzare le serie temporali di x_1 e x_2 sul ciclo con

Graph → Both
selezionando con il mouse la curva da visualizzare



Con il comando Solutions → Find an equilibrium point si nota che:

There is a saddle point at (6, 0).

The Jacobian is:
-1 -3.75
0 0.875

The eigenvalues and eigenvectors are:
-1 (1, 0)
0.875 (-0.89443, 0.44721)

Display the linearization

Go away

There is a saddle point at (0, 0).

The Jacobian is:
1 0
0 -1

The eigenvalues and eigenvectors are:
-1 (0, 1)
1 (1, 0)

Display the linearization

Go away

There is a spiral source at (1.3333, 0.51852).

The Jacobian is:
0.088889 -2
0.23333 0

The eigenvalues and eigenvectors are:
0.044444+0.68168i (-0.94632, -0.021029+0.32255i)
0.044444-0.68168i (-0.94632, -0.021029-0.32255i)

Display the linearization

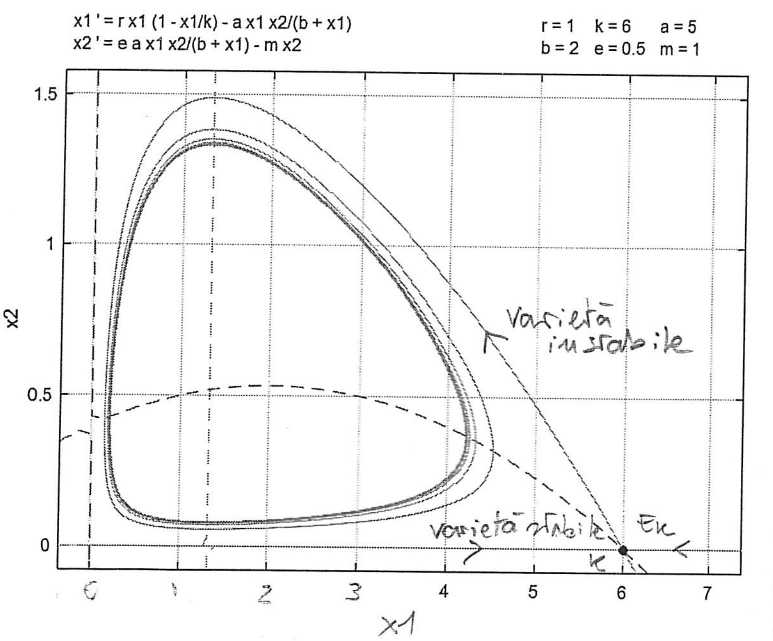
Go away

$E_k=(k,0)$ è una sella $\lambda_1<0$ $\lambda_2>0$

$E_0=(0,0)$ è una sella $\lambda_1<0$ $\lambda_2>0$

$\bar{E}=(\bar{x}_1,\bar{x}_2)$ è instabile (fuoco instabile) $\lambda_{1,2}\in\mathbb{C}$ con $\mathbb{R}e(\lambda_i)>0$

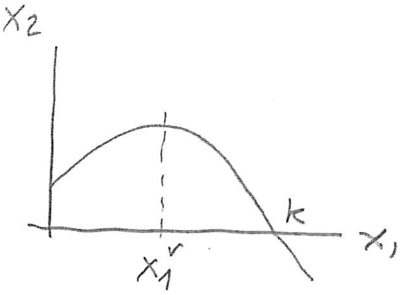
Solutions → Plot stable and unstable orbits genera le varietà stabile e instabile della sella in E_k



la varietà instabile di E_k tende ora verso il ciclo stabile

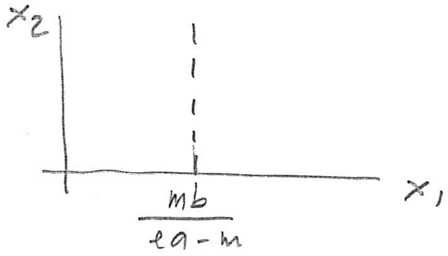
Riassumendo:

$\dot{x}_1 = 0 \underset{\text{non banale}}{\rightsquigarrow} x_2 = \frac{r}{a}(b + x_1)\left(1 - \frac{x_1}{k}\right)$

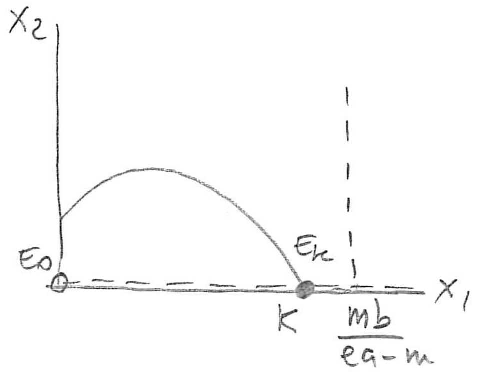


$x_1^v = \frac{k-b}{2}$

$\dot{x}_2 = 0 \underset{\text{non banale}}{\longrightarrow} x_1 = \frac{mb}{ea - m}$



⊙

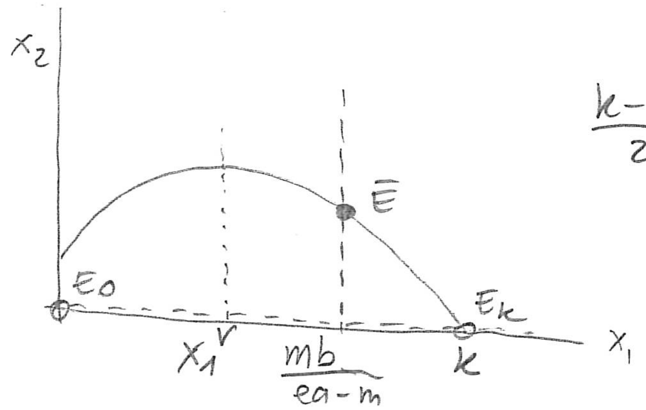


$\frac{mb}{ea-m} > k$

$E_k = (k;0)$ stab

$E_0 = (0,0)$ sella

⊙



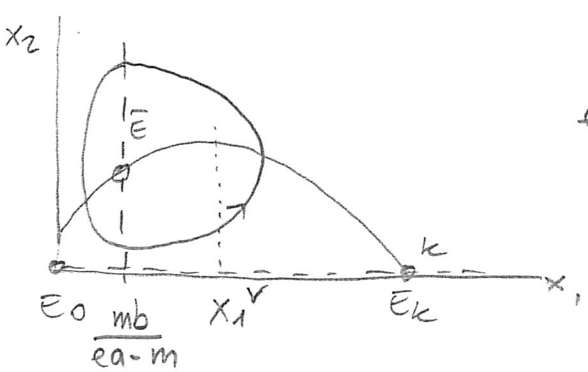
$\frac{k-b}{2} < \frac{mb}{ea-m} < k$

$E_k = (k,0)$ sella

$E_0 = (0,0)$ sella

$\bar{E} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ stabile

⊙



$\frac{mb}{ea-m} < \frac{k-b}{2}$

$E_k = (k,0)$ sella

$E_0 = (0,0)$ sella

$\bar{E} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ instabile

$\exists$ ciclo stabile

Analiticamente:

$$\dot{x}_1 = r x_1 \left(1 - \frac{x_1}{k}\right) - \frac{a x_1}{b + x_1} x_2 = x_1 \left[r\left(1 - \frac{x_1}{k}\right) - \frac{a}{b+x_1} x_2 \right] = x_1 F_1(x_1, x_2) = f_1$$

$$\dot{x}_2 = e \frac{a x_1}{b + x_1} x_2 - m x_2 = x_2 \left[\frac{e a x_1}{b + x_1} - m \right] = x_2 F_2(x_1) = f_2$$

All'equilibrio: $\begin{cases} \dot{x}_1 = 0 \\ \dot{x}_2 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_1 F_1 = 0 \\ x_2 F_2 = 0 \end{cases}$ da cui si hanno i tre equilib.

$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases} \rightarrow E_0 = (0, 0)$ | $\begin{cases} x_2 = 0 \\ F_1 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{matrix} x_2 = 0 \\ x_1 = k \end{matrix} \rightarrow E_k = (k, 0)$

$\begin{cases} F_1 = 0 \\ F_2 = 0 \end{cases} \rightarrow \bar{E} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2) \rightsquigarrow \in$ I quadrante se $0 < \frac{mb}{ea - m} < k$
(vedi isocline)

<u>Stabilità via linearizzazione</u>

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} F_1 + x_1 \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & x_1 \frac{\partial F_1}{\partial x_2} \\ x_2 \frac{\partial F_2}{\partial x_1} & F_2 + x_2 \underbrace{\frac{\partial F_2}{\partial x_2}}_{0} \end{vmatrix}$$

⊙ Stabilità di $E_0 = (0, 0)$

$$J_{E_0} = \begin{vmatrix} F_1(0,0) & 0 \\ 0 & F_2(0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} r & 0 \\ 0 & -m \end{vmatrix}$$

$\lambda_1 = r > 0$
$\lambda_2 = -m < 0$

E_0 INSTABILE
SELLA

⊙ Stabilità di $E_k = (k, 0)$ $\overset{\text{NOTA}}{\rightsquigarrow} F_1(k, 0) = 0$

$$\frac{\partial F_1}{\partial x_1} = -\frac{r}{k} + \frac{a x_2}{(b + x_1)^2}$$

$$J_{E_k} = \begin{vmatrix} k\left(-\frac{r}{k}\right) & * \\ 0 & \frac{eak}{b+k} - m \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -r & * \\ 0 & \frac{eak}{b+k} - m \end{vmatrix}$$

$\lambda_1 = -r < 0$

$\lambda_2 = \dfrac{eak}{b+k} - m$ $\rightsquigarrow$ il segno di λ_2 determina la stabilità di E_k

$\Rightarrow \lambda_2 < 0$ $\quad \dfrac{eak}{b+k} - m < 0 \rightarrow eak - mb - mk < 0$

$\dfrac{mb}{ea-m} > k$ $\quad E_k$ è asint. stab.

$\Rightarrow \lambda_2 > 0$ $\quad$ - - - $\dfrac{mb}{ea-m} < k$ $\quad E_k$ è instabile $\rightsquigarrow$ sella

- Stabilità di $\bar{E}$ $\overset{\text{NOTA}}{\rightsquigarrow}$ $F_1(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = 0$ e $F_2(\bar{x}_1) = 0$ $\quad$ con $\bar{x}_1 > 0$ e $\bar{x}_2 > 0$

$$J_{\bar{E}} = \begin{vmatrix} \bar{x}_1 \dfrac{\partial F_1}{\partial x_1} & \bar{x}_1 \dfrac{\partial F_1}{\partial x_2} \\ \bar{x}_2 \dfrac{\partial F_2}{\partial x_1} & 0 \end{vmatrix}$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial x_1} = -\frac{r}{k} + \frac{a x_2}{(b+x_1)^2} \quad \Bigg| \quad \frac{\partial F_1}{\partial x_2} = -\frac{a}{b+x_1} \quad \Bigg| \quad \frac{\partial F_2}{\partial x_1} = \frac{eab}{(b+x_1)^2}$$

$$\mathrm{tr}\, J_{\bar{E}} = \left[-\frac{r}{k} + \frac{a\bar{x}_2}{(b+\bar{x}_1)^2}\right]\bar{x}_1$$

$$\det J_{\bar{E}} = \bar{x}_1 \bar{x}_2 \left(+\frac{a}{b+\bar{x}_1}\right)\left(\frac{eab}{(b+\bar{x}_1)^2}\right) > 0$$

Il segno di $\mathrm{tr}\, J_{\bar{E}}$ determina la stabilità di $J_{\bar{E}}$

All'equilibrio $\bar{E} \in$ parabola $\rightarrow \bar{x}_2 = \frac{r}{a}\left(1 - \bar{x}_1/k\right)(b+\bar{x}_1)$

$$\Rightarrow \mathrm{tr}\, J_{\bar{E}} = \left[-\frac{r}{k} + \frac{r\left(1-\frac{\bar{x}_1}{k}\right)\cancel{(b+\bar{x}_1)}}{(b+\bar{x}_1)^{\cancel{2}}}\right]\bar{x}_1$$

$$\text{segno}\left(\mathrm{tr}\, J_{\bar{E}}\right) \propto -1 + \frac{k-\bar{x}_1}{b+\bar{x}_1}$$

$\operatorname{tr} J_{\bar{E}} < 0 \qquad -1 + \dfrac{k - \bar{x}_1}{b + \bar{x}_1} < 0$

$$-b - \bar{x}_1 + k - \bar{x}_1 < 0$$

$$\bar{x}_1 > \frac{k-b}{2} \Longrightarrow \begin{cases} \overbrace{\dfrac{mb}{ea-m}}^{\bar{x}_1} > \dfrac{k-b}{2} \\[2ex] \dfrac{mb}{ea-m} < k \end{cases}$$

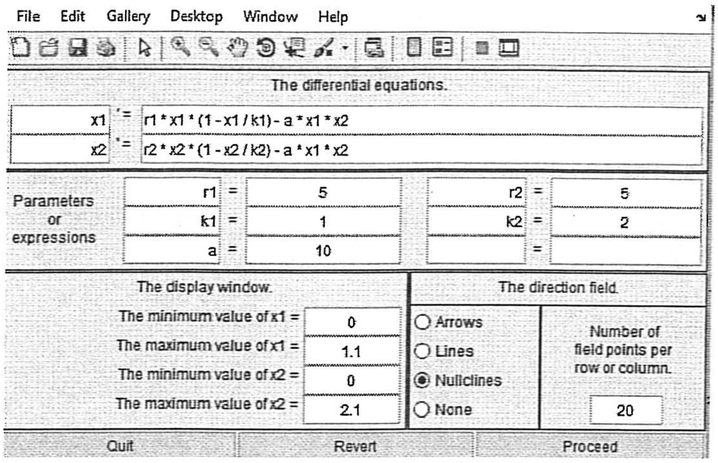
$$\bar{x}_1 > 0$$

$\Longrightarrow \dfrac{k-b}{2} < \dfrac{mb}{ea-m} < k \qquad \bar{E}$ è as. stab.

$\operatorname{tr} J_{\bar{E}} > 0 \quad \ldots\ldots \quad \dfrac{mb}{ea-m} < \dfrac{k-b}{2} \qquad \bar{E}$ è instabile

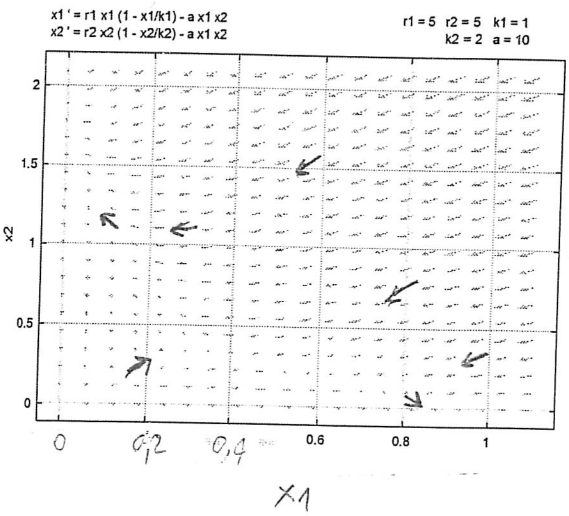
2. Modello di competizione interspecifica

Compiliamo la finestra di Setup(*) con equazioni differenziali, definizione e valore dei parametri

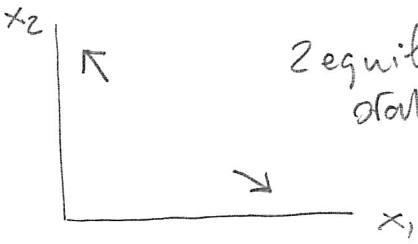


(*) Edit → Clear all
pulisce la finestra di setup

Fissiamo i valori minimo e massimo di x_1 a 0 e 1.1, rispettivamente; per x_2 si considerino i valori 0 e 2.1.
Selezioniamo "Arrows" e "Proceed" per visualizzare il vettore tangente le traiettorie

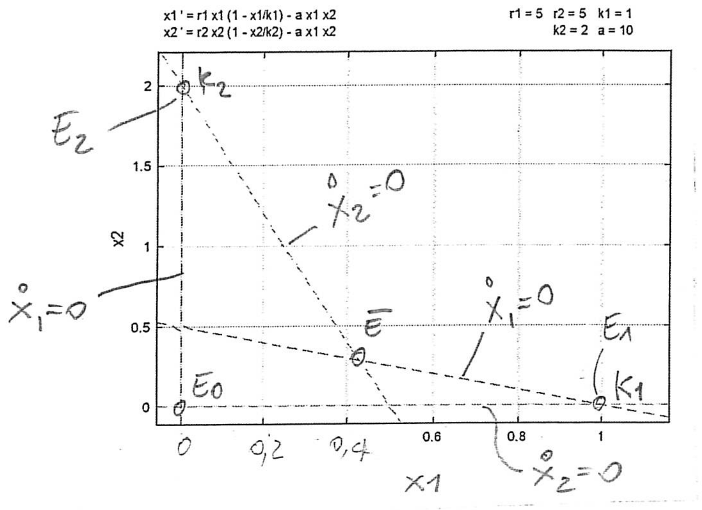


⇒



2 equilibri stabili ?

Selezioniamo "Nullclines" e "Proceed" per visualizzare le isocline



Facciamo alcune osservazioni.

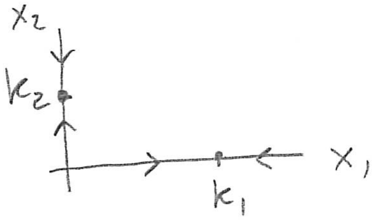
Gli assi sono invarianti

crescita logistica

$$x_2(0)=0 \rightarrow x_2(t)=0 \;\; \forall t \;\; (\text{essendo } \dot{x}_2(0)=0) \text{ e } \dot{x}_1 = r_1 x_1\left(1-\frac{x_1}{k_1}\right)$$

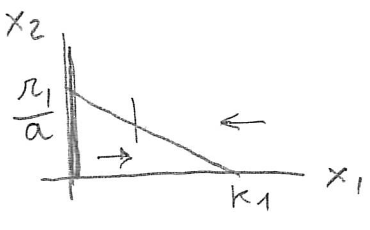
$$x_1(0)=0 \rightarrow \cdots \rightarrow \dot{x}_2 = r_2 x_2\left(1-\frac{x_2}{k_2}\right)$$

La dinamica sugli assi è $\rightarrow$

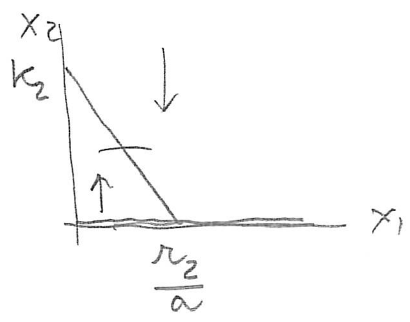


Le isocline sono rette

$$\dot{x}_1=0 \begin{cases} x_1=0 \\ x_2=\dfrac{r_1}{a}\left(1-\dfrac{x_1}{k_1}\right) \end{cases}$$



$$\dot{x}_2=0 \begin{cases} x_2=0 \\ x_1=\dfrac{r_2}{a}\left(1-\dfrac{x_2}{k_2}\right) \end{cases}$$



Equilibri $\rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = 0 \\ \dot{x}_2 = 0 \end{cases} \rightarrow \cap$ isocline

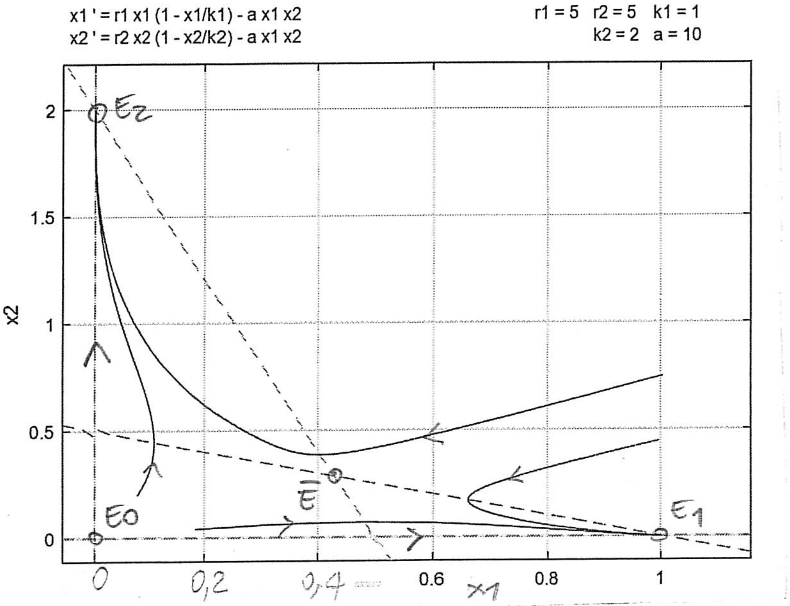
$E_0 = (0,0)$

$E_1 = (k_1, 0)$

$E_2 = (0, k_2)$

$\bar{E} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ con $\bar{x}_i > 0$

Simuliamo il sistema tracciando le traiettorie nello spazio di stato (solo in avanti con Options → Solution direction → forward)



A seconda della condizione iniziale, il sistema tende verso l'equilibrio E_1 oppure verso l'equilibrio E_2 (localmente asintoticamente stabili). L'equilibrio $\bar{E}$ è, al contrario, instabile (sella) così come E_0 (nodo)

Infatti, utilizzando il comando
Solutions → Find an equilibrium point
si ha che:

There is a sink at (1, 0).
Its specific type has not been determined.

The Jacobian is:
-5 -10
1.9268e-08 -5

The eigenvalues and eigenvectors are:
-5+0.00043895i (1, -1.245e-07-4.3895e-05i)
-5-0.00043895i (1, -1.245e-07+4.3895e-05i)

Display the linearization
Go away

→ E_1 è un nodo stabile $\lambda_i \in \mathbb{R}^-$

There is a nodal sink at (0, 2).

The Jacobian is:
-15 0
-20 -5

The eigenvalues and eigenvectors are:
-5 (0, 1)
-15 (0.44721, 0.89443)

Display the linearization
Go away

→ E_2 è un nodo stabile $\lambda_i \in \mathbb{R}^-$

There is a saddle point at (0.42857, 0.28571).

The Jacobian is:
-2.1429 -4.2857
-2.8571 -0.71429

The eigenvalues and eigenvectors are:
-5 (-0.83205, -0.5547)
2.1429 (0.70711, -0.70711)

Display the linearization
Go away

→ $\bar{E}$ è instabile (sella) $\lambda_1 < 0$ $\lambda_2 > 0$

There is a source at (0, 0).
Its specific type has not been determined.

The Jacobian is:
5 0
0 5

The eigenvalues and eigenvectors are:
5 (1, 0)
5 (0, 1)

Display the linearization
Go away

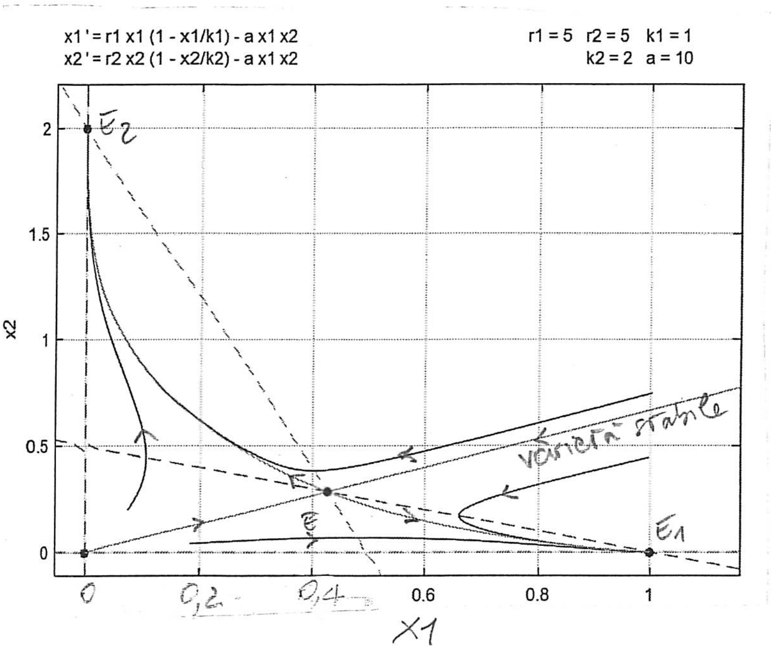
→ E_0 è un nodo instabile $\lambda_i \in \mathbb{R}^+$

Tracciando la varietà stabile e instabile della sella è possibile valutare i bacini di attrazione dei due equilibri asintoticamente stabili. Questi sono definiti dalla varietà stabile della sella $\bar{E}$. → B_1 e B_2

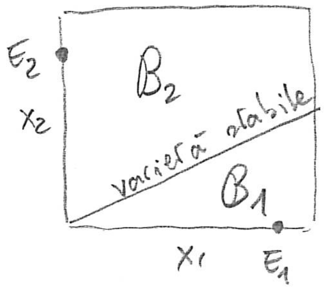
Usiamo quindi il comando

Solutions → Plot stable and unstable orbits

posizionando il cursore del mouse vicino a $\bar{E}$



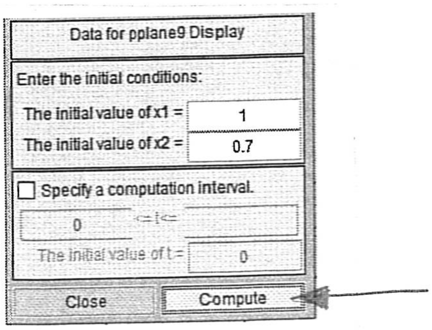
→



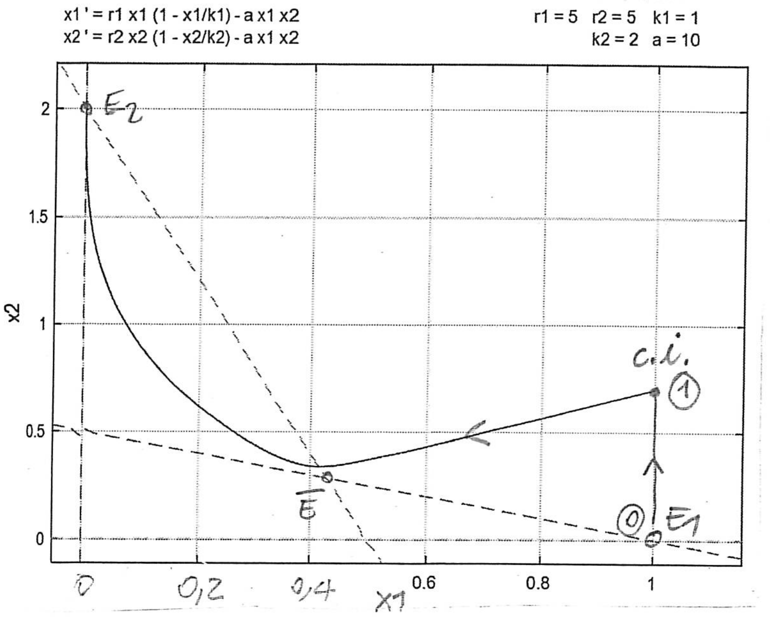
Vediamo ora come cercare una possibile terapia che garantisca la guarigione dell'individuo, una volta che si è instaurato uno stato di malattia.

Supponiamo di essere in una condizione sana ($x_1 = k_1 = 1$ e $x_2 \simeq 0$) e che una carica di batteri nocivi ci infetti ($x_2 = 0{,}7$ per esempio). Fissiamo quindi la condizione iniziale a (1, 0.7) con il comando Solutions → keyboard input

punto 1



"Compute" genera la traiettoria corrispondente a tale condizione iniziale. Il sistema tende verso $E_2 = (0, k_2)$; si instaura quindi una condizione di malattia.



Per meglio visualizzare i risultati fissiamo i valori minimo e massimo di x_2 a 0 e 1, rispettivamente.

Tracciamo le varietà stabile e instabile della sella con

Solutions → Plot stable and unstable orbits

posizionando il cursore in prossimità dell'equilibrio sella $\bar{E}$.

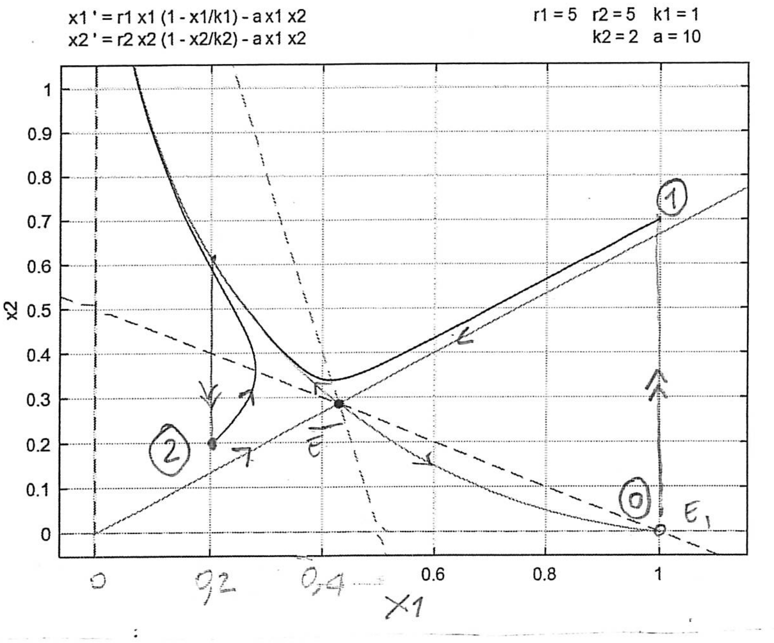
Una volta che ci siamo accorti che stiamo tendendo verso una condizione di malattia, possiamo decidere di prendere dei farmaci per cercare di guarire. L'assunzione di farmaci corrisponde a una diminuzione di carica batterica x_2.

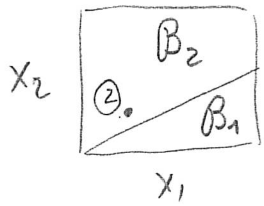
Decidiamo quindi di iniziare la cura farmacologica quando la condizione del sistema è $x_1 = 0{,}2$ e $x_2 = 0{,}6$

Supponiamo che l'assunzione del farmaco (antibiotico) porti la carica batterica nociva a $\frac{1}{3}$ del suo valore iniziale $\Rightarrow x_2 = 0{,}2$

Fissiamo quindi la condizione iniziale a (0.2, 0.2) con il comando Solutions → keyboard input e simuliamo con Compute

punto 2





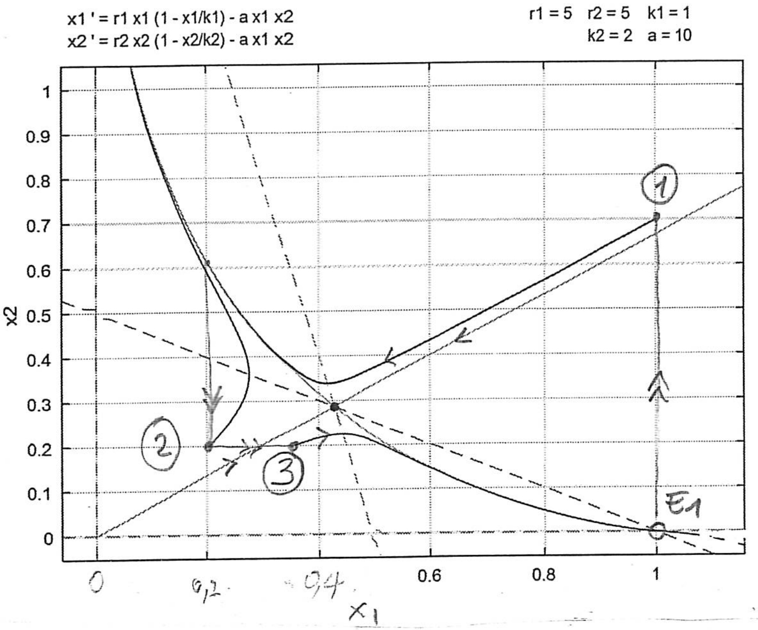
Partendo da 2 il sistema tende ancora verso E_2 (individuo malato); ciò avviene perché 2 $\in B_2$. Supponendo di non poter assumere ulteriori farmaci, decidiamo di iniziare una terapia a base di fermenti lattici che aumentano la carica batterica x_1

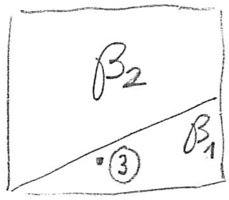
La nuova condizione iniziale potrebbe diventare quindi

$x_1 = 0,35$ $x_2 = 0,2$

fermenti antibiotici

Fissando tale valore (punto 3) con Solutions → keyboard input e simulando con Compute si ottiene:





Partendo da 3 il sistema ora tende verso E_1 (individuo sano); ciò avviene perché 3 $\in B_1$

Una cura farmacologica combinata a una terapia a base di fermenti lattici porta l'individuo a guarigione

3. Modello di epidemia SI

SI

susc ettibili — infetti

$S \xrightarrow{\alpha} I \xrightarrow{\beta}$

Immunizzazione permanente (morbillo/rosolia/varicella ...)

$$\dot{S} = -\alpha SI \quad \text{contagio}$$
$$\dot{I} = \alpha SI - \beta I \quad \text{guarigione}$$

$\alpha \downarrow$ con mascherine/vaccini

$\beta \uparrow$ con cure

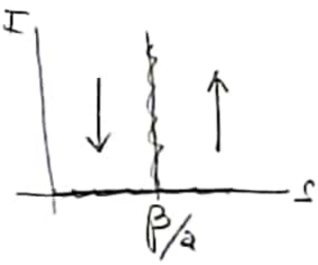
Equilibri $\dot{S} = 0 \begin{cases} S = 0 \\ I = 0 \end{cases}$ $\Rightarrow \exists \infty$ equilibri $(\bar{S}, 0)$

$\dot{I} = 0 \begin{cases} I = 0 \\ S = \frac{\beta}{\alpha} \end{cases}$

Isocline

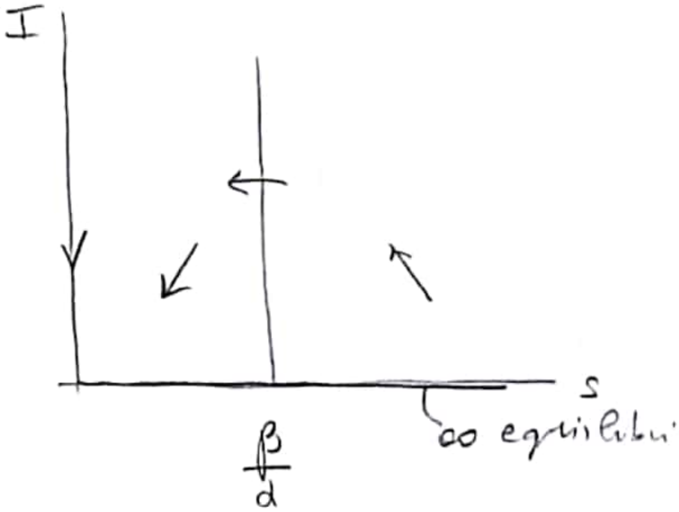
$\dot{S} = 0$

$\dot{I} = 0$



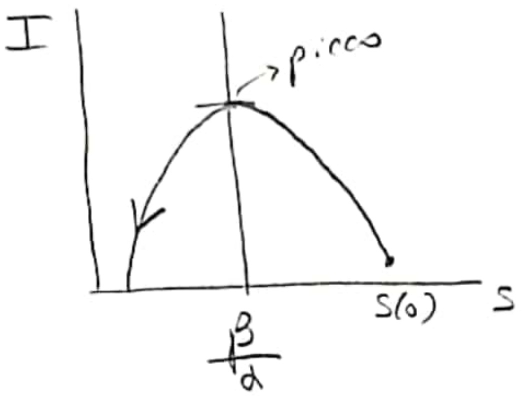
Equilibri $\Rightarrow \cap$ isocline $\Rightarrow I = 0 \ \forall S$

Vettore tangente



$S(0) > \frac{\beta}{\alpha}$ → L'epidemia "parte"

$I(0) > 0$

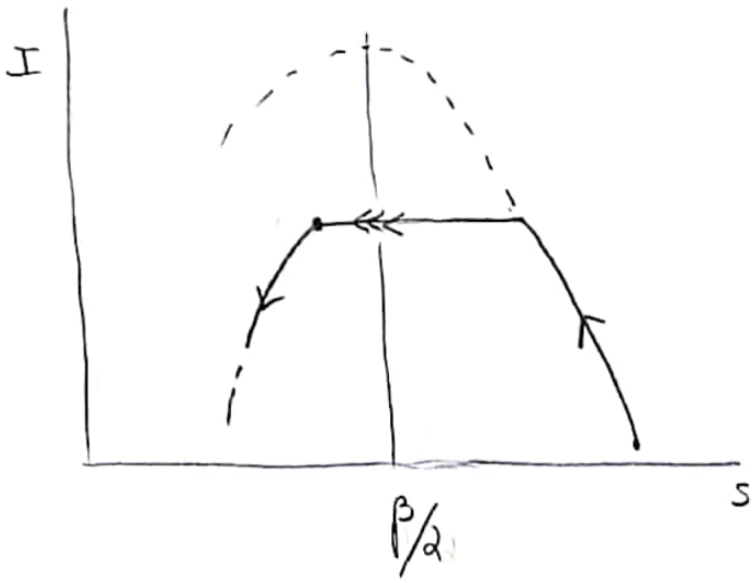


$S(0) < \frac{\beta}{\alpha}$ → L'epidemia "non parte"

Per fare in modo che $S(0)$ sia $< \frac{\beta}{\alpha}$ → β alto (cure)
α piccolo (mascherine, vaccini)

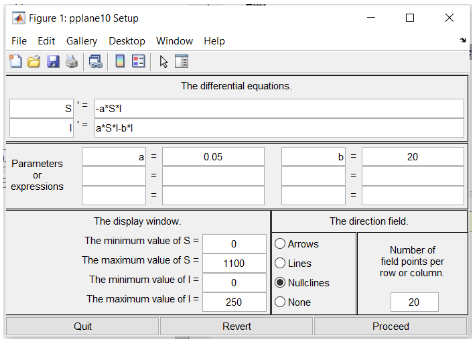
Lockdown?

$S \downarrow$ sotto β/α



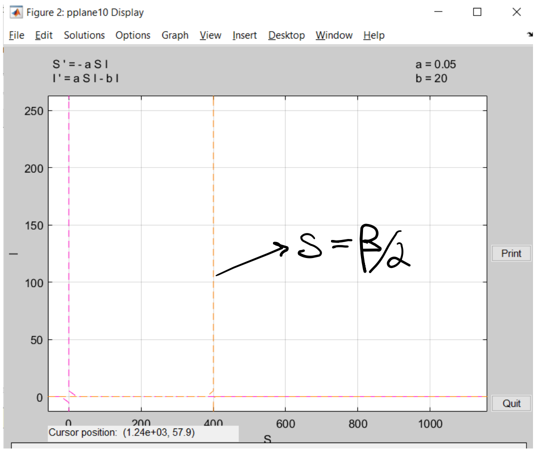
Vediamo con pplane

Scriviamo le equazioni e impostiamo i valori dei parametri α e β



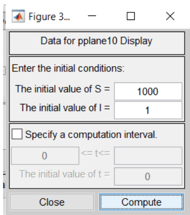
NOTA $\beta/\alpha = \frac{20}{0,05} = 400$

Con Proceed tracciamo le isocline

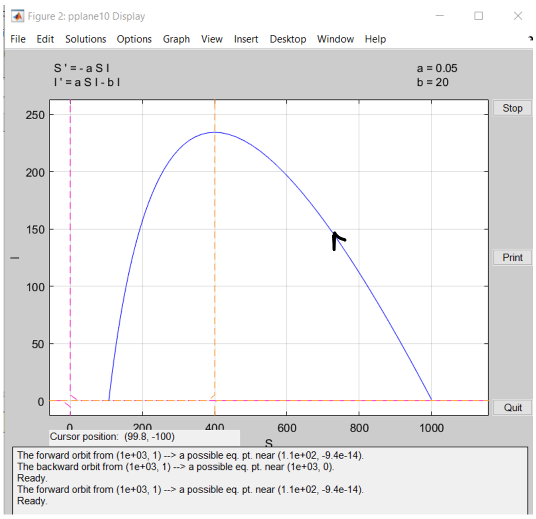


Fissiamo la condizione iniziale a $S(0) = 1000$, $I(0) = 1$
con Solutions → keyboard Input

entra 1 infetto nella popolazione



Con compute simuliamo il sistema



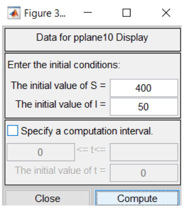
L'epidemia si sviluppa

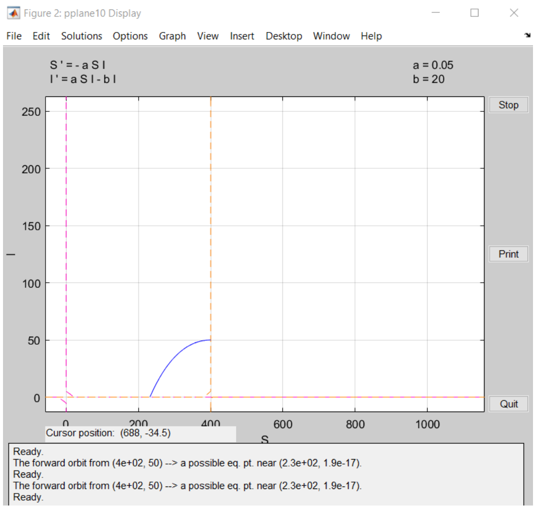
Infatti, $S(0) = 1000 > \beta/\alpha = 400$

Per evitare che questo accada, occorre fare in modo che $S(0)$ sia inferiore a β/α

Pertanto :

- lockdown — Si impedisce alla circolazione suscettibile di incontrare individui infetti $\Rightarrow S(0)$ deve diminuire al di sotto del valore di soglia β/α





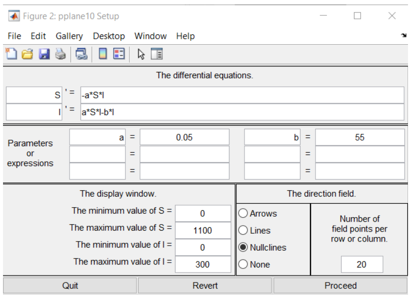
L'epidemia non si sviluppa

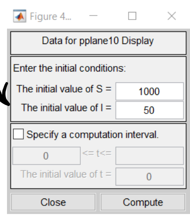
In alternativa, si potrebbero migliorare le cure ($\beta\uparrow$) di modo che $\beta/\alpha > S(0) \Rightarrow \beta > 1000 \cdot 0{,}05 = 50$

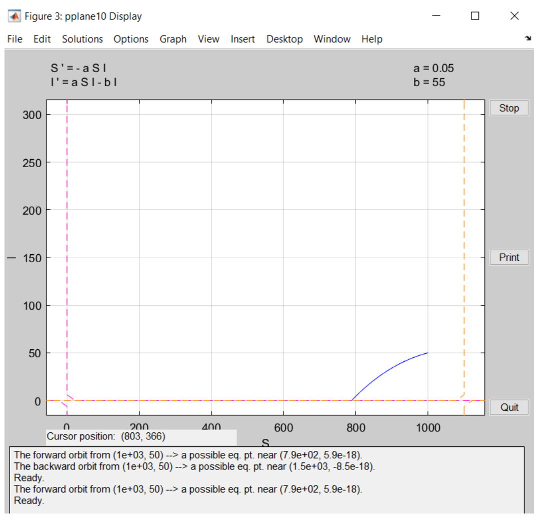
Per esempio, con $\beta = 55$, si ha:

$$\beta/\alpha = 1100 > S(0) = 1000$$

L'epidemia (già in corso) si smorza





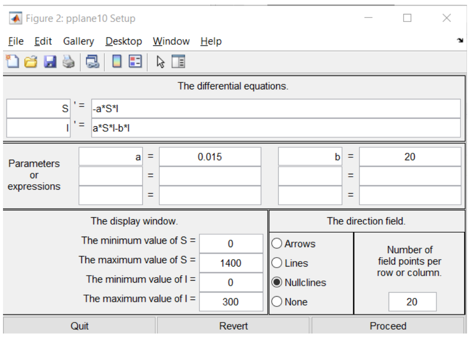


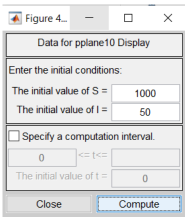
Sarebbe poi possibile "invogliare" maggiormente la popolazione suscettibile all'uso di mascherine/vaccini... $\Rightarrow \alpha \downarrow$

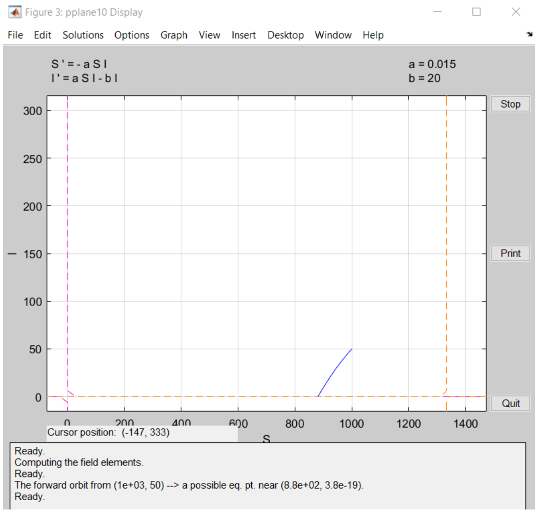
così che $\frac{\beta}{\alpha} > S(0) \Rightarrow \alpha < \beta/S(0) = \frac{20}{1000} = 0{,}02$

Per esempio, con $\alpha = 0{,}015$, si ha:

$\frac{\beta}{\alpha} = 1333 > S(0) = 1000$



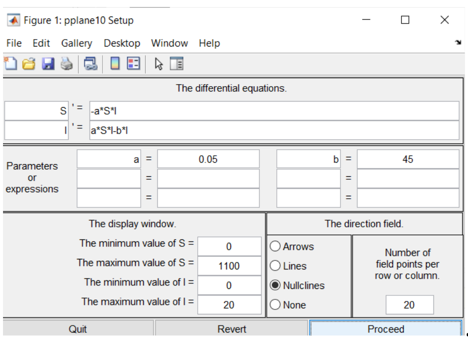


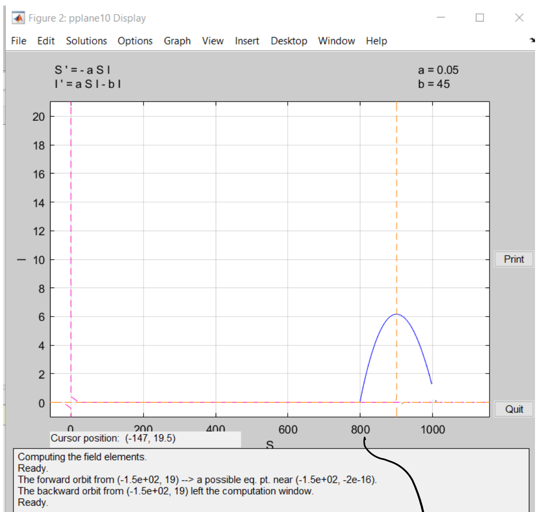


Supponiamo ora di non riuscire a evitare lo sviluppo dell'epidemia ma di voler arrivare al termine di questa con un numero finale di suscettibili pari a 800 (il 20% ha contratto la malattia). Dopo alcune prove di simulazione si nota che tale risultato si ottiene (partendo da $S(0)=1000$ e $I(0)=1$) se $\beta/\alpha = 900$

Pertanto, con $\alpha = 0{,}05$ e $\beta = 45$ si ha:

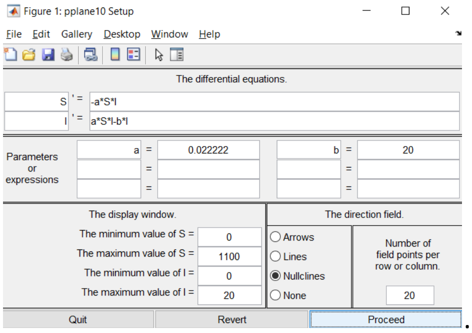
$\frac{\beta}{\alpha} = 900$

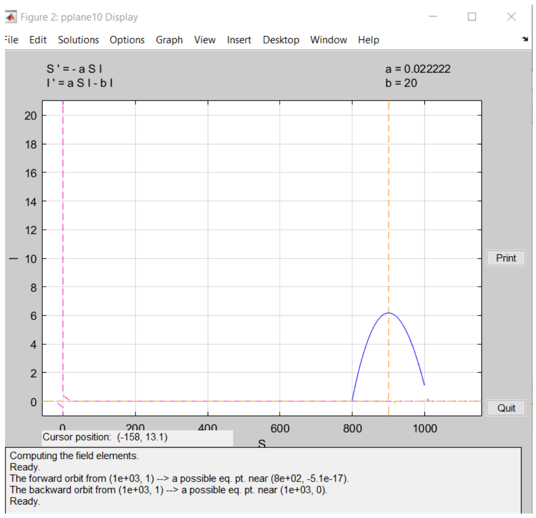




800 suscettibili al termine dell'epidemia

In modo analogo, con $\beta = 20$ e $\alpha = 0{,}0222$ si ha $\rightarrow \beta/\alpha = 900$





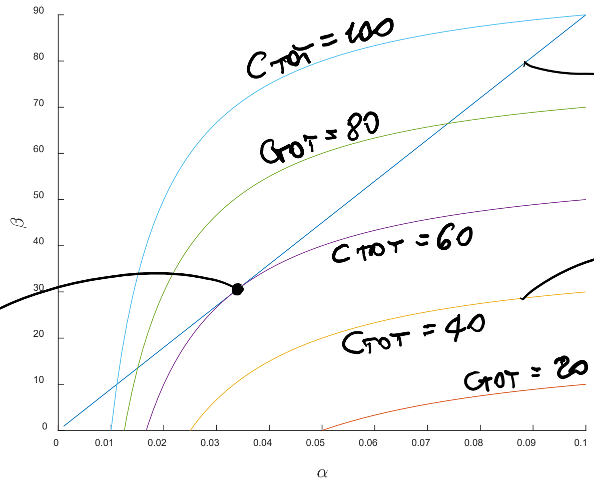
Supponiamo ora che vi sia un costo associato al miglioramento delle cure (β) e all'uso di mascherine e produzione vaccini ($\alpha\downarrow$), così che, per esempio: $C_{TOT} = \beta + \frac{1}{\alpha}$

Si vogliono determinare i valori di α e β che garantiscono che solo il 20% della popolazione si ammali (al termine dell'epidemia restano 800 suscettibili), minimizzando i costi di gestione dell'epidemia.

Si tratta di risolvere il problema

$$\begin{cases} \min\limits_{\alpha,\beta} \left(\beta + \frac{1}{\alpha}\right) = C_{TOT} \\ \beta/\alpha = 900 \end{cases}$$

In figura è mostrata la soluzione grafica



$\beta/\alpha = 900 \rightarrow \beta = 900\alpha$

Curve isocosto
$\beta + \frac{1}{\alpha} = C_{TOT}$

Volendo minimizzare i costi, nel rispetto del vincolo $\beta/\alpha = 900$, questo è il punto di ottimo

Dal punto di vista analitico si ha:

$$\begin{cases} \beta + \dfrac{1}{\alpha} = C_{TOT} \\ \beta = 900\,\alpha \end{cases} \longrightarrow 900\,\alpha^2 - C_{TOT}\,\alpha + 1 = 0$$

La condizione di tangenza tra le curve è:

$$C_{TOT}^2 - 4 \cdot 900 = 0 \longrightarrow C_{TOT} = 60$$

$$\alpha = -\frac{-C_{TOT}}{2 \cdot 900} = \frac{60}{2 \cdot 900} = 0{,}0\overline{3}$$

$$\beta = 900\,\alpha = 30$$