Si consideri la famiglia di sistemi dipendenti da un parametro p

$$\dot{x}_1 = x_2(x_2 - 1)(x_2 - 2) - x_1$$

$$\dot{x}_2 = -x_1 - p$$

Si consideri dapprima il sistema con $p = 0$.

1. Determinare gli equilibri del sistema

2. Analizzare la stabilità degli equilibri e disegnare le traiettorie in un loro intorno.

3. Dire se esistono cicli.

4. Disegnare un possibile quadro delle traiettorie.

Si consideri ora la famiglia parametrizzata di sistemi.

5. Determinare i valori del parametro per cui si hanno delle biforcazioni e dire di che biforcazioni si tratta.

6. Disegnare nel piano (p, x_2) gli equilibri, rappresentandoli con linee continue se stabili e con linee a puntini se instabili.

7. Dire se esiste un'isteresi.

8. Si supponga infine che il parametro p non sia fissato ma abbia una sua dinamica del tipo

$$\dot{p} = \varepsilon g(x, p)$$

con $\varepsilon > 0$ molto piccolo. Si dica se è possibile che il sistema del terz'ordine così costruito abbia un ciclo e, in caso affermativo, si proponga una funzione g per cui il funzionamento asintotico del sistema sia periodico.

$p=0$

$$\dot{x}_1 = x_2(x_2-1)(x_2-2) - x_1$$

$$\dot{x}_2 = -x_1$$

1) $\dot{x}_2 = 0 \rightarrow x_1 = 0$

$\dot{x}_1 = 0 \rightarrow x_2(x_2-1)(x_2-2) = 0 \quad \begin{cases} x_2 = 0 \\ x_2 = 1 \\ x_2 = 2 \end{cases}$

$A = (0,0)$

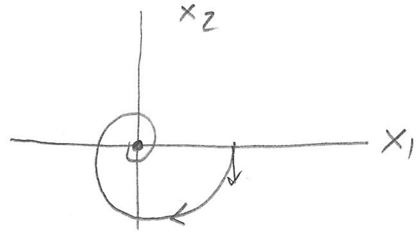
$B = (0,1)$

$C = (0,2)$

2) $J = \begin{vmatrix} -1 & 3x_2^2 - 6x_2 + 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}$

$A = (0,0)$ $\quad J_A = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}$ $\quad tr = -1$, $\det = 2$ $\quad$ A loc. A.S.

$\lambda^2 + \lambda + 2 = 0 \quad \lambda_{1,2} = \dfrac{-1 \pm i3}{2} \rightarrow$ A fuoco stabile

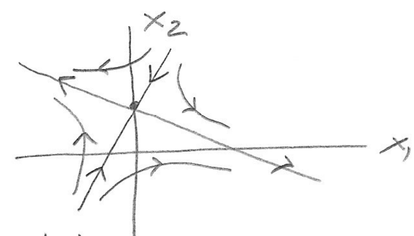


$x_1(0) > 0$, $x_2(0) = 0$ $\rightarrow \dot{x}_2(0) = -x_1(0) < 0$

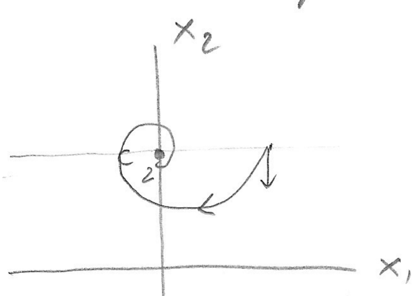
$B = (0,1)$ $\quad J_B = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}$ $\quad tr = -1$, $\det = -1$ $\quad$ A INST $\rightarrow$ sella

$\lambda^2 + \lambda - 1 = 0 \quad \lambda_{1,2} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$

$J_B W = \lambda W \rightarrow -W_1 = \lambda W_2$



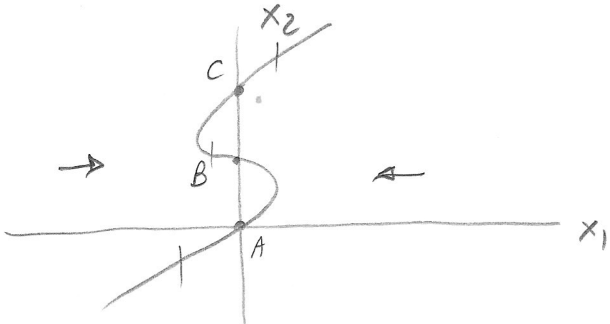
$C = (0,2)$ $\quad J_C = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = J_A$ $\quad$ C loc. As. stab fuoco stabile



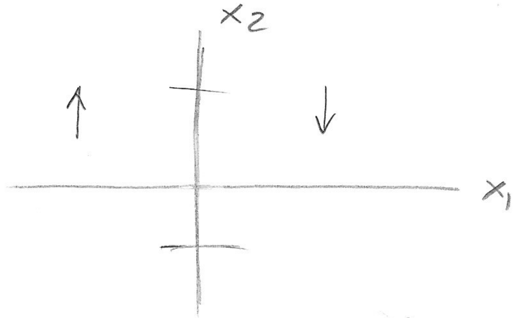
$x_1(0) = \varepsilon > 0$, $x_2(0) = 2$ $\rightarrow \dot{x}_2(0) = -x_1(0) < 0$

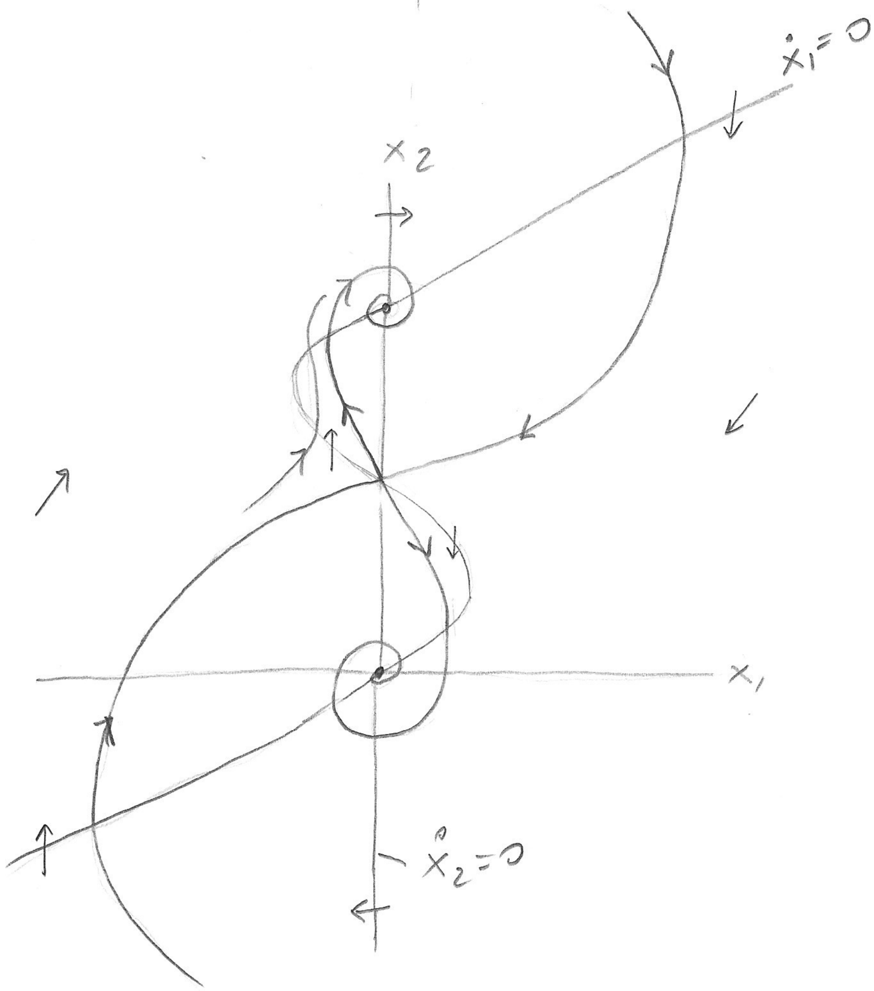
3) $\dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} + \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2} = \operatorname{div} f = -1$ non cambia segno $\rightarrow \nexists$ cicli

4) $\dot{x}_1 = 0 \rightarrow \quad x_1 = x_2(x_2 - 1)(x_2 - 2)$

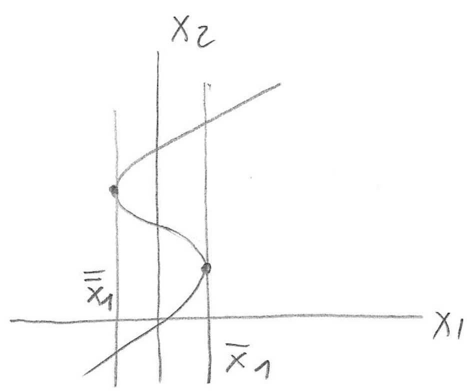


$\dot{x}_2=0 \to x_1=0$





5) $\dot{x}_2=0 \to x_1=-p$



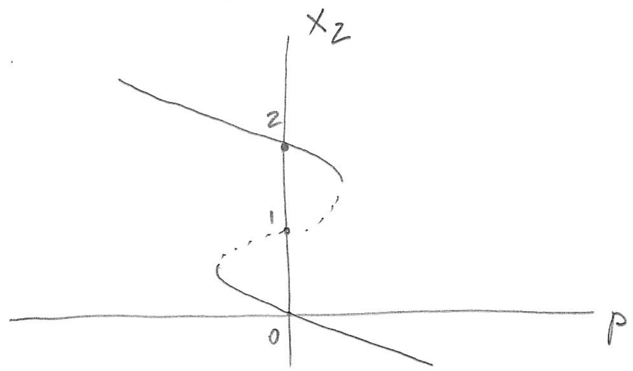
$3x_2^2-6x_2+2=0 \to \bar{x}_2=\frac{3-\sqrt{3}}{2}$ $\qquad \bar{\bar{x}}_2=\frac{3+\sqrt{3}}{2}$

$\downarrow \qquad\qquad \downarrow$

Sostituendo in $\to$ $\bar{x}_1=\dots=-\bar{p}$ $\qquad \bar{\bar{x}}_1=\dots=-\bar{\bar{p}}$

Nodo Sella di equilibri

6)



7) sì

8) sì per $g = -1 + x_2$