Si consideri la famiglia di sistemi (p è un parametro positivo, negativo, o nullo)

$$\dot{x}_1 = p x_2 - x_1$$
$$\dot{x}_2 = -x_2^3 + x_1$$

a) Si determino gli equilibri del sistema al variare di p (è ammesso un metodo grafico, ma è preferibile l'espressione analitica degli equilibri come funzioni di p).

b) Si analizzi la loro stabilità col metodo della linearizzazione.

c) Si dica se è possibile che il sistema abbia cicli per qualche valore di p.

d) Si identifichino le biforcazioni rispetto al parametro p, classificandone il tipo e il valore di p a cui si verificano.

e) Per ciascuna biforcazione identificata, si traccino le isocline del sistema in corrispondenza di un valore di p prima della biforcazione, e di un valore dopo. In tutti i diagrammi, indicare la direzione delle traiettorie nelle regioni del piano di stato delimitate dalle isocline.

f) Ridisegnare tutti i diagrammi del punto precedente, aggiungendo i quadri di traiettorie locali agli equilibri e qualche traiettoria che faccia capire il quadro globale.

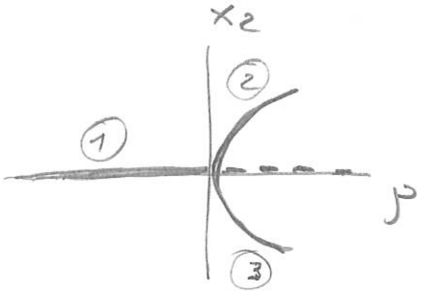
---

a) $\dot{x}_1 = 0 \rightarrow x_1 = p x_2$
$\dot{x}_2 = 0 \rightarrow x_1 = x_2^3$
$\mapsto x_2^3 = p x_2 \rightarrow x_2(p - x_2^2) = 0$ $\begin{cases} x_2 = 0 & \forall p \\ x_2 = +\sqrt{p} & p \geq 0 \\ x_2 = -\sqrt{p} & \end{cases}$

$p \leq 0$ ① $= (0,0)$ $\quad p > 0$ ① $= (0,0)$

② $= (+p\sqrt{p}, +\sqrt{p})$ ③ $= (-p\sqrt{p}, -\sqrt{p})$

b) $J = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & p \\ 1 & -3x_2^2 \end{vmatrix}$



$J_{①} = \begin{vmatrix} -1 & p \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$ $\quad tr = -1$, $det = -p$ $\quad p < 0$ stab, $p > 0$ INST

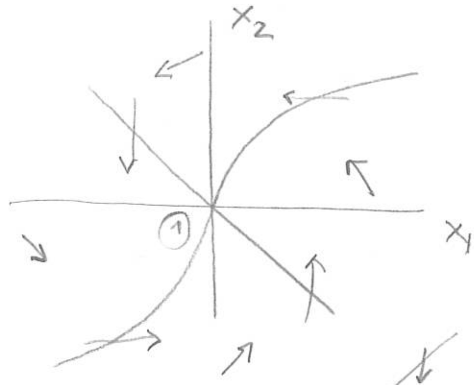
$J_{②} = J_{③} = \begin{vmatrix} -1 & p \\ 1 & -3p \end{vmatrix}$ $\quad tr = -1 - 3p < 0$, $det = 2p > 0$ $(p > 0)$ $\quad$ stab

c) $\operatorname{div} f = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} = -1 - 3x_2^2 < 0$ non cambia segno $\Rightarrow \nexists$ cicli

d) $p = 0$ biforcazione forcone

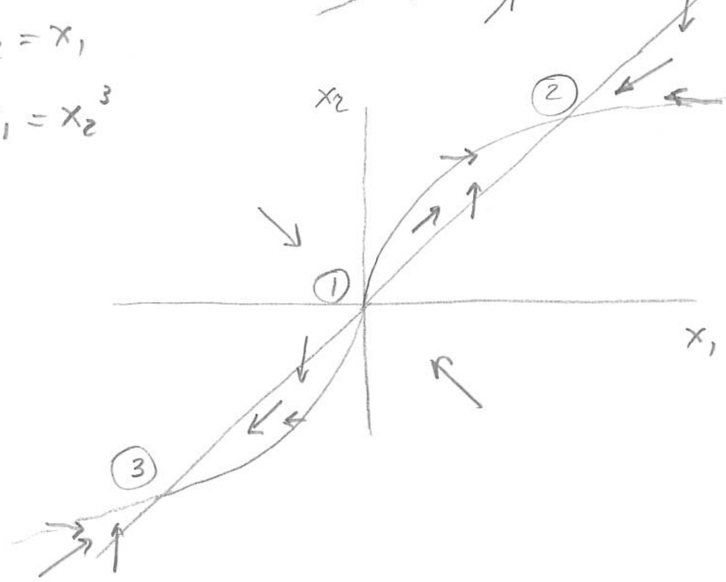
e) $\boxed{p=-1}$

$$\dot{x}_1 = -x_2 - x_1 \rightarrow \dot{x}_1 = 0 \rightarrow x_2 = -x_1$$
$$\dot{x}_2 = -x_2^3 + x_1 \rightarrow \dot{x}_2 = 0 \rightarrow x_1 = x_2^3$$



$\boxed{p=+1}$

$$\dot{x}_1 = +x_2 - x_1 \rightarrow \dot{x}_1 = 0 \rightarrow x_2 = x_1$$
$$\dot{x}_2 = -x_2^3 + x_1 \rightarrow \dot{x}_2 = 0 \rightarrow x_1 = x_2^3$$



f)