Dato il seguente sistema

$$\dot{x}_1 = 2x_1x_2$$

$$\dot{x}_2 = -x_2 - x_1^2$$

Dimostrare che (0, 0) è un equilibrio globalmente stabile, usando funzioni di Lyapunov del tipo

$$V = x_1^2 + \alpha x_2^2$$

con α opportuno.

$\bar{x} = (0,0)$ è un equilibrio

$\alpha > 0$: V è definita positiva (1)

continua con le derivate (2)

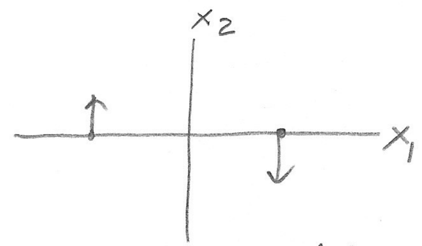
$$\mathring{V} = \frac{\partial V}{\partial x_1} \cdot \mathring{x}_1 + \frac{\partial V}{\partial x_2} \mathring{x}_2 = 2x_1(2x_1x_2) + 2\alpha x_2(-x_2 - x_1^2) =$$

$$= 4x_1^2x_2 - 2\alpha x_2^2 - 2\alpha x_1^2 x_2$$

Ponendo $\alpha = 2 \Rightarrow \mathring{V} = -4x_2^2$ semidefinita negativa in $\bar{x}$ (3)

$k = \{x_2 = 0\}$ luogo di Krasowskii

$x(0) = \begin{vmatrix} \varepsilon \\ 0 \end{vmatrix} \rightarrow \mathring{x}_2(0) = -\varepsilon^2$



$\Rightarrow$ non vi sono traiettorie perturbate in k (4)

(1)-(4) $\Rightarrow \bar{x} = (0,0)$ è loc. as. stab.

$V(x) = x_1^2 + 2x_2^2$ ha linee di livello chiuse $\xrightarrow{\text{LA SALLE}}$ $\bar{x}$ è glob. stab

(1)-(4) valgono $\forall$ linea di livello