Si consideri la famiglia di sistemi dipendenti da un parametro p strettamente positivo ($p > 0$)

$$\dot{x}_1 = x_1 - 2x_2 - x_1^3$$

$$\dot{x}_2 = x_1 - px_2$$

1. Determinare gli equilibri e studiarne la stabilità al variare del parametro p.

2. Determinare le biforcazioni locali al variare del parametro p. Di che biforcazioni si tratta?

3. Tracciare un possibile quadro delle traiettorie del sistema per $p = 0.5$ e per $p = 3$.

4. Esistono cicli nel sistema per qualche valore di p?

5. Ci sono biforcazioni globali al variare di p?

1) $\dot{x}_2 = 0 \rightarrow x_1 = px_2$

$\dot{x}_1 = 0 \rightarrow px_2 - 2x_2 - p^3 x_2^3 = 0 \rightarrow x_2[(p-2) - p^3 x_2^2] = 0$

$x_2 = 0 \quad x_1 = 0 \quad \forall p \qquad A(0,0)$

NOTA
In $p=2$
$A=B=C$

$x_2 = +\sqrt{\dfrac{p-2}{p^3}} \qquad x_1 = +\sqrt{\dfrac{p-2}{p}} \qquad p \geq 2 \rightarrow B$

$x_2 = -\sqrt{\dfrac{p-2}{p^3}} \qquad x_1 = -\sqrt{\dfrac{p-2}{p}} \qquad p \geq 2 \rightarrow C$

$$J = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 - 3x_1^2 & -2 \\ 1 & -p \end{vmatrix}$$

$$J_A = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -p \end{vmatrix} \qquad \begin{aligned} tr &= 1-p \\ det &= -p+2 \end{aligned}$$

	0		1		2	
tr		+	•	−		−
det		+		+	•	−
		INST		A.S.		INST (sella)
			↓ Hopf		↓ forcone	

$$J_B = J_C = \begin{vmatrix} \frac{-2p+6}{p} & -2 \\ 1 & -p \end{vmatrix}$$

$$tr = \frac{-p^2-2p+6}{p}$$

$$det = 2(p-2)$$

con $p \geq 2$

	0 — $-1+\sqrt{7}$	$-1+\sqrt{7}$ — 2	> 2
tr	+	−	−
det	−	−	+
			A.S.

$p = 2$ → forcone $(A=B=C)$

2) $p=1$ L'equilibrio A subisce una biforcazione di Hopf $(tr=0,\ det>0)$

$p=2$ $\quad A=B=C \rightarrow$ forcone

3) $\operatorname{div} f = 1-3x_1^2-p$ $\quad \Rightarrow$ se $p \geq 1$ div f non cambia segno (o al più si annulla su $x_1=0$ per $p=1$) $\Rightarrow \nexists$ cicli

se $p<1$ div f può cambiare segno $\Rightarrow$ può $\exists$ ciclo (Hopf supercritica)

$p = \frac{1}{2}$

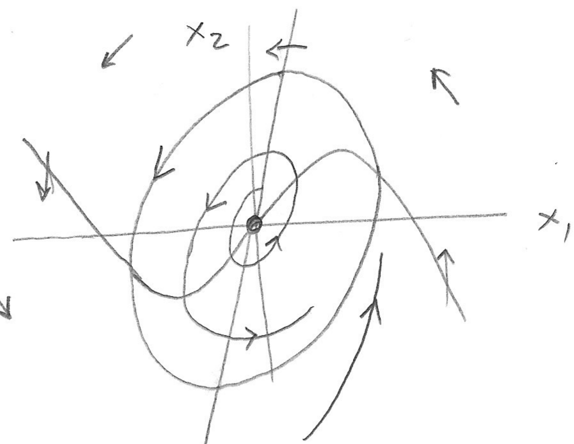
$\dot{x}_1 = 0 \rightarrow x_2 = \frac{1}{2}(x_1 - x_1^3)$

$\dot{x}_2 = 0 \rightarrow x_2 = 2x_1$

In $A \rightarrow tr = \frac{1}{2}$ $\quad det = \frac{3}{2}$

$\lambda^2 - \lambda + 3 = 0$ $\quad \lambda_{1,2} = \frac{1 \pm i\sqrt{11}}{2}$

FUOCO INSTABILE



(p=3) (A) $\to tr = -2$ $\qquad \lambda^2 + 2\lambda - 1 = 0$

$\det = -1 \to$ sella

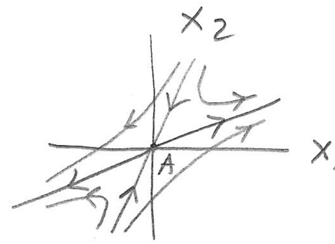
$$\lambda_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1+1} = -1 \pm \sqrt{2} \begin{cases} \lambda^+ = -1+\sqrt{2} \\ \lambda^- = -1-\sqrt{2} \end{cases}$$

$$Jw = \lambda w \qquad \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} w_1 \\ w_2 \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} w_1 \\ w_2 \end{vmatrix}$$

$$w_1 - 2w_2 = \lambda w_1 \to w_2 = \frac{1}{2}(1-\lambda) w_1$$

$\lambda^+ \to w_2 = \dfrac{2-\sqrt{2}}{2} w_1$

$\lambda^- \to w_2 = \dfrac{2+\sqrt{2}}{2} w_1$



(B) $B\left(\sqrt{\frac{1}{3}}, \frac{1}{3}\sqrt{\frac{1}{3}}\right)$ $\qquad J = \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}$ $\qquad tr = -3$, $\det = 2$

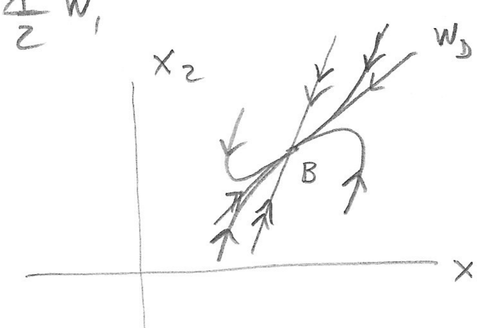
$$\lambda^2 + 3\lambda + 2 = (\lambda+1)(\lambda+2) = 0 \begin{cases} \lambda_1 = -2 \leadsto \lambda_D \\ \lambda_2 = -3 \end{cases}$$

$$Jw = \lambda w \to \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} w_1 \\ w_2 \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} w_1 \\ w_2 \end{vmatrix}$$

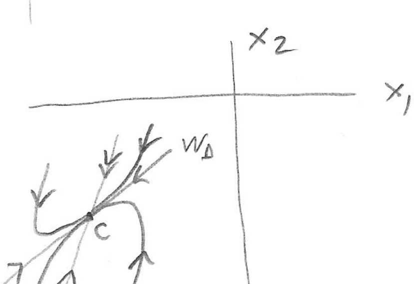
$$-2w_2 = \lambda w_1 \to w_2 = -\frac{\lambda}{2} w_1$$

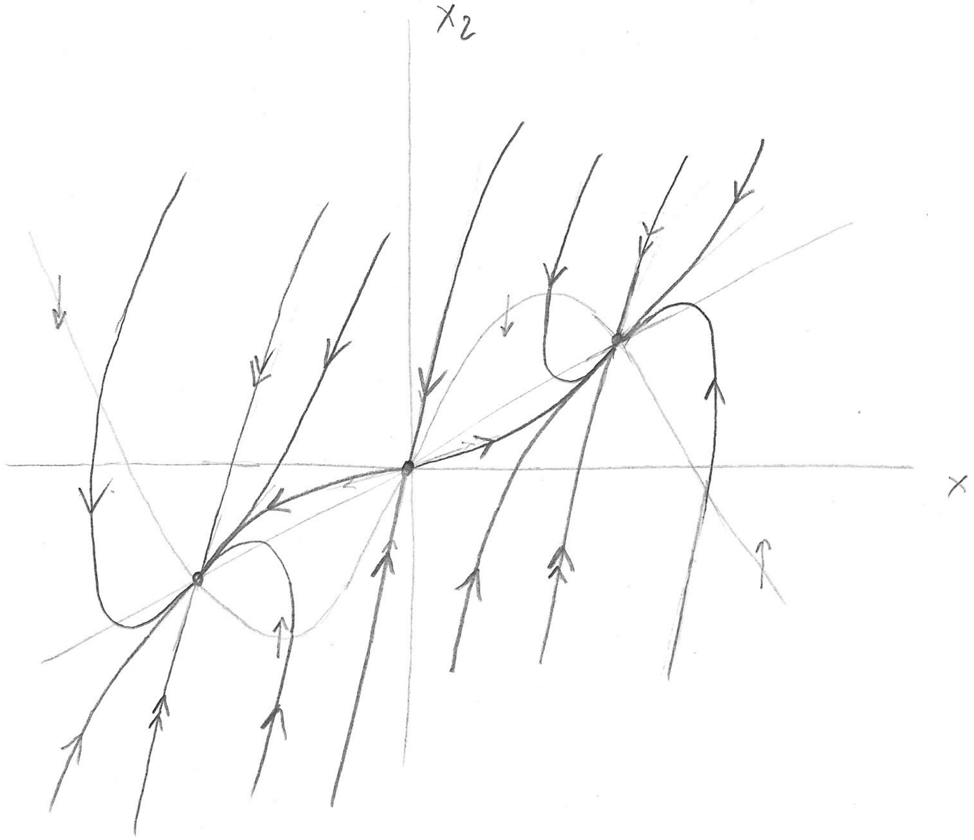
$\lambda_1 = -2 \leadsto w_2 = w_1 \leadsto w_D$

$\lambda_2 = -3 \leadsto w_2 = \frac{3}{2} w_1$



(C) $C\left(-\sqrt{\frac{1}{3}}, -\frac{1}{3}\sqrt{\frac{1}{3}}\right)$ come (B)





4) $\exists$ cicli solo per $p < 1$

5) $\nexists$ bif. globali perché laddove $\exists$ sella in $A(0,0)$ per $p > 3$, la .
(↳ tipo omocline...)

Divergenza non cambia segno $\Rightarrow \nexists$ cicli