Si consideri il sistema

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_1(x_1^2 - x_2^2 - 1)\\ \dot{x}_2 &= x_2(x_2^2 + 3x_1^2 - 1)\end{aligned}$$

a) Si dimostri, per mezzo di una funzione di Lyapunov, che l'origine dello spazio di stato è un equilibrio asintoticamente stabile.

b) Si determini una sotto-regione del suo bacino di attrazione.

c) Infine, utilizzando la stessa funzione di Lyapunov, o altre argomentazioni, si mostri che l'origine non è globalmente stabile.

$\begin{matrix} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{matrix} \mapsto \begin{matrix} \dot{x}_1 = 0 \\ \dot{x}_2 = 0 \end{matrix} \longrightarrow$ l'origine è equilibrio

(*) le linee di livello di V sono ordinate

(1) V è definita positiva in $\bar{x} = (0,0)$ $\mapsto$ linee di livello chiuse e limitate

(2) V è continua con le derivate

$$\dot{V} = \frac{\partial V}{\partial x_1}\dot{x}_1 + \frac{\partial V}{\partial x_2}\cdot\dot{x}_2 = \frac{1}{\cancel{2}}\cancel{2}x_1^2(x_1^2 - x_2^2 - 1) + \frac{1}{\cancel{2}}\cancel{2}x_2^2(x_2^2 + 3x_1^2 - 1) =$$

$$= x_1^4 - x_1^2x_2^2 - x_1^2 + x_2^4 + 3x_1^2x_2^2 - x_2^2 =$$

$$= x_1^4 + 2x_1^2x_2^2 + x_2^4 - (x_1^2 + x_2^2) =$$

$$= (x_1^2 + x_2^2)^2 - (x_1^2 + x_2^2) = (x_1^2 + x_2^2)(x_1^2 + x_2^2 - 1)$$

(3) $\dot{V}$ è definita negativa in $I_{\bar{x}}$ ((x_1, x_2) piccoli $\Rightarrow x_1^2 + x_2^2 - 1 < 0$)

Metodo di Liapunov: (1)-(3) $\Rightarrow \bar{x}$ è localmente asint. stabile

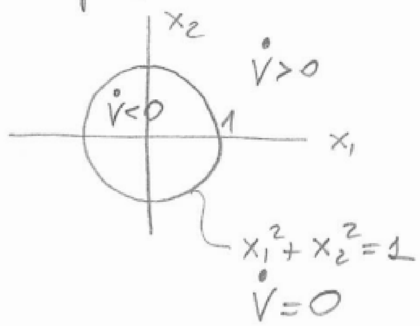
Le condizioni (1)-(3) sono valide nella regione chiusa e limitata $\Omega_{1-\varepsilon} = \{(x_1, x_2) / x_1^2 + x_2^2 = 1-\varepsilon, \; \varepsilon > 0\}$

$\Rightarrow$ per La Salle $\Omega_{1-\varepsilon} \subset B_{\bar{x}}$

$\downarrow$

vale anche la (*)

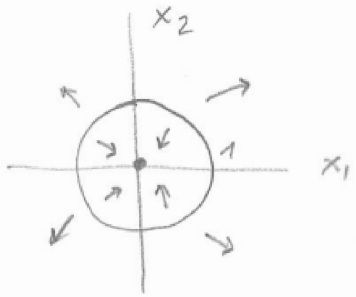
Verificchiamo ora che $\bar{x}$ non è globalmente stabile utilizzando la V proposta



$\Rightarrow$ Il luogo dei punti $x_1^2 + x_2^2 = 1$ è una particolare linea di livello di V ($V = k$ con $k = \frac{1}{2}$) sulla quale $\dot{V} = 0 \Rightarrow$ V resta costante e pari a $\frac{1}{2}$

Tale linea è pertanto traiettoria per il sistema.

Non potendo essere attraversata si ha



$\Rightarrow \bar{x}$ non è globalmente stabile