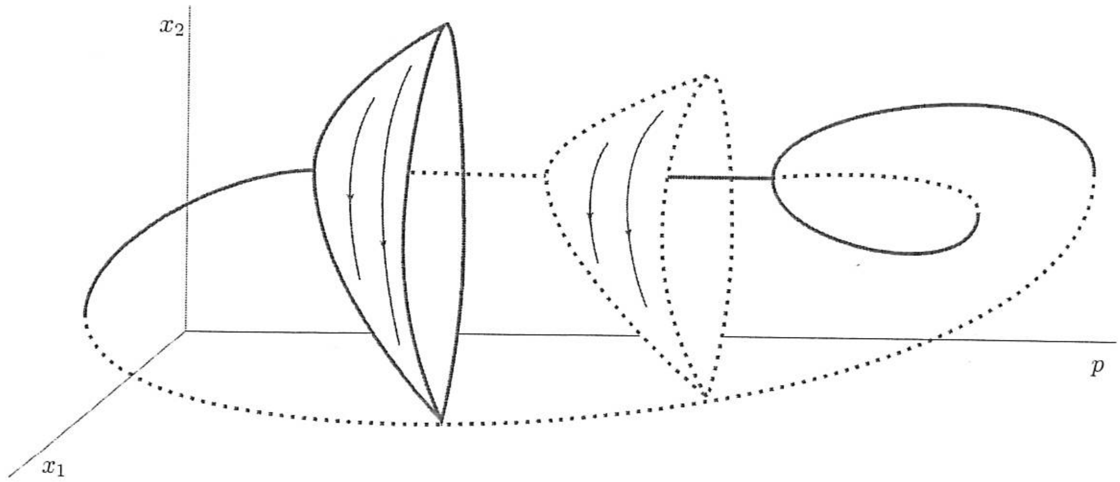
Gli equilibri e i cicli stabili (linea continua) e instabili (a puntini) di un sistema del secondo ordine variano con un parametro p come mostrato in figura



Indicare il numero di biforcazioni che riconosci nella figura scrivendo un numero intero a sinistra del nome di ogni biforcazione, senza motivare la risposta.

☐ flip

☐ Eteroclina

☐ forcone

☐ Hopf

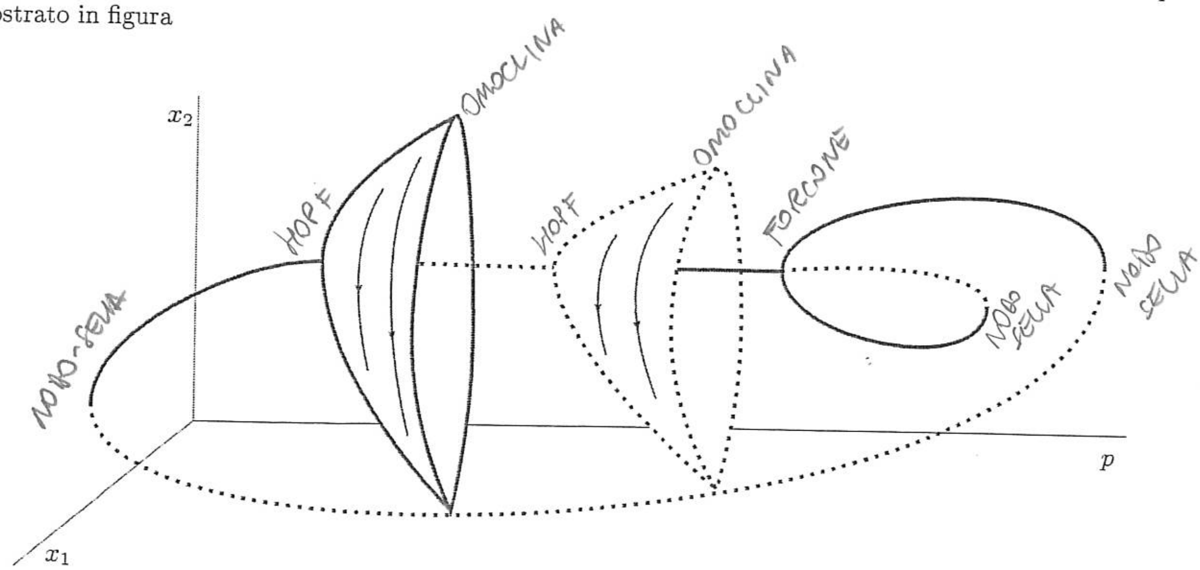
☐ Omoclina

☐ nodo-sella

☐ Neimark-Sacker

☐ transcritica

Gli equilibri e i cicli stabili (linea continua) e instabili (a puntini) di un sistema del secondo ordine variano con un parametro p come mostrato in figura



Indicare il numero di biforcazioni che riconosci nella figura scrivendo un numero intero a sinistra del nome di ogni biforcazione, senza motivare la risposta.

---

0 flip

0 Eteroclina

1 forcone

2 Hopf

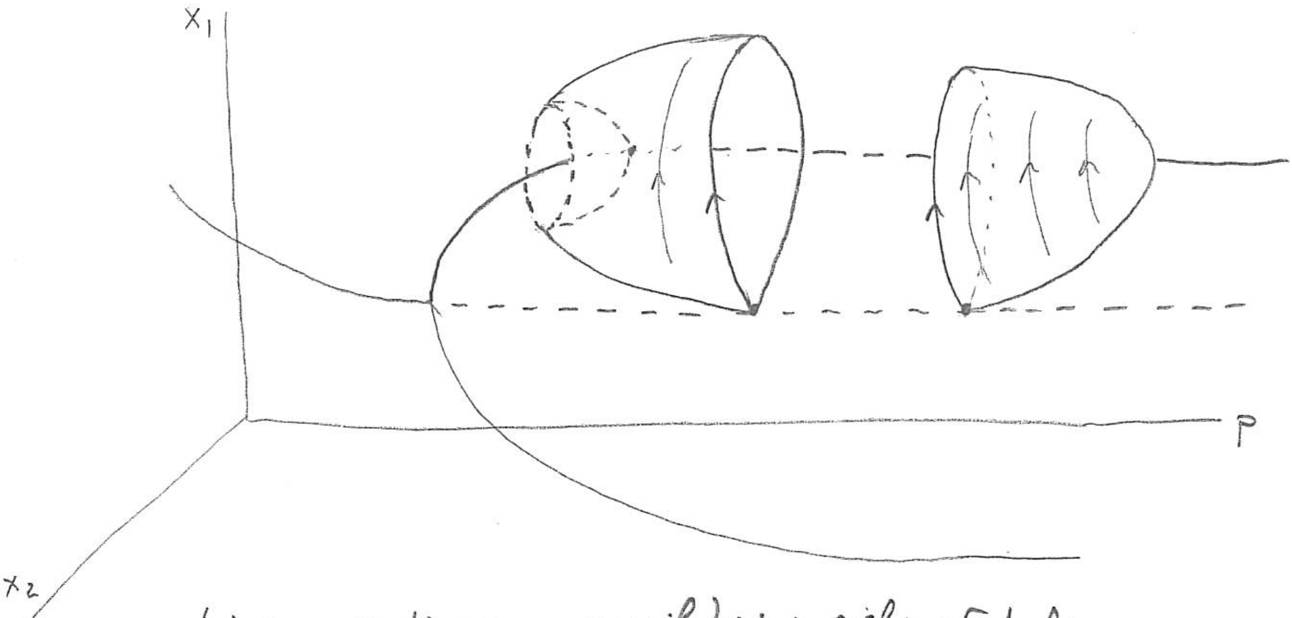
2 Omoclina

3 nodo-sella

0 Neimark-Sacker

0 transcritica

Sia dato il seguente diagramma di biforcazione

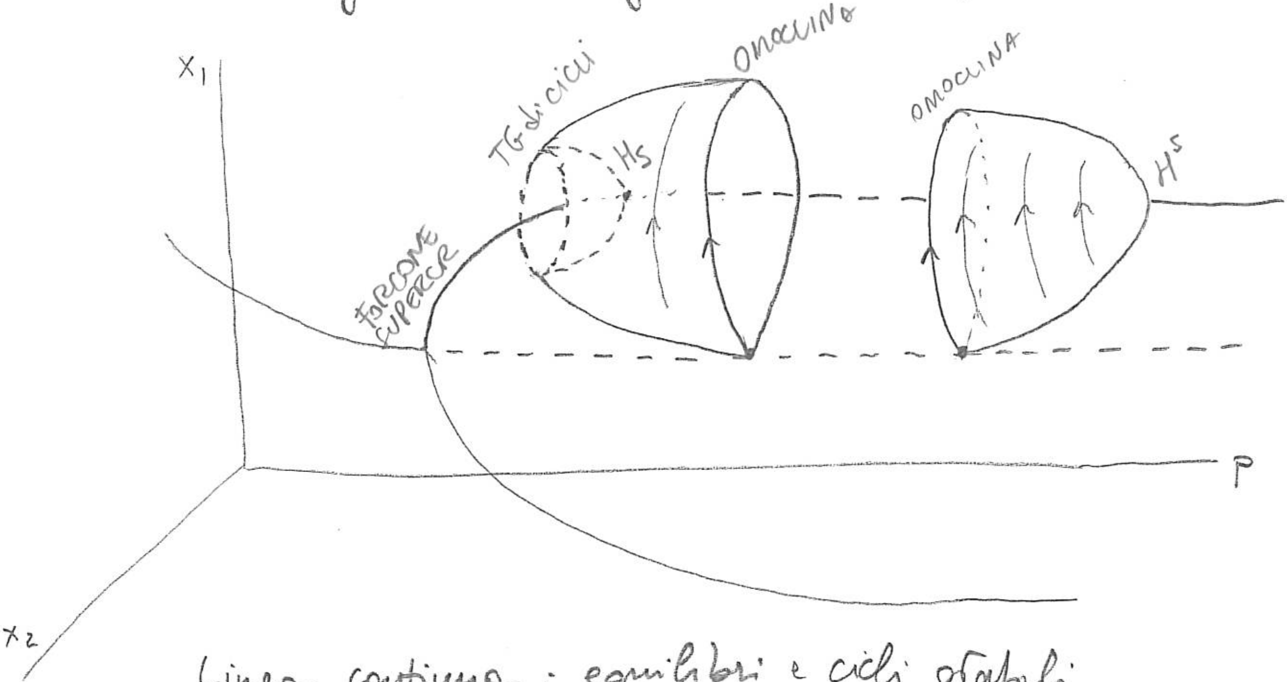


Linea continua: equilibri e cicli stabili
Tratteggio: equilibri e cicli instabili

Si classifichino le biforcazioni riempiendo la tabella

Biforcazione	Quante sono?
Transcritica	
Nodo-sella	
Forcone subcritica	
Forcone supercritica	
Tangente di cicli	
Hopf subcritica	
Hopf supercritica	
Neimark-Sacker	
Flip	
Omoclina	
Eteroclina	

Sia dato il seguente diagramma di biforcazione

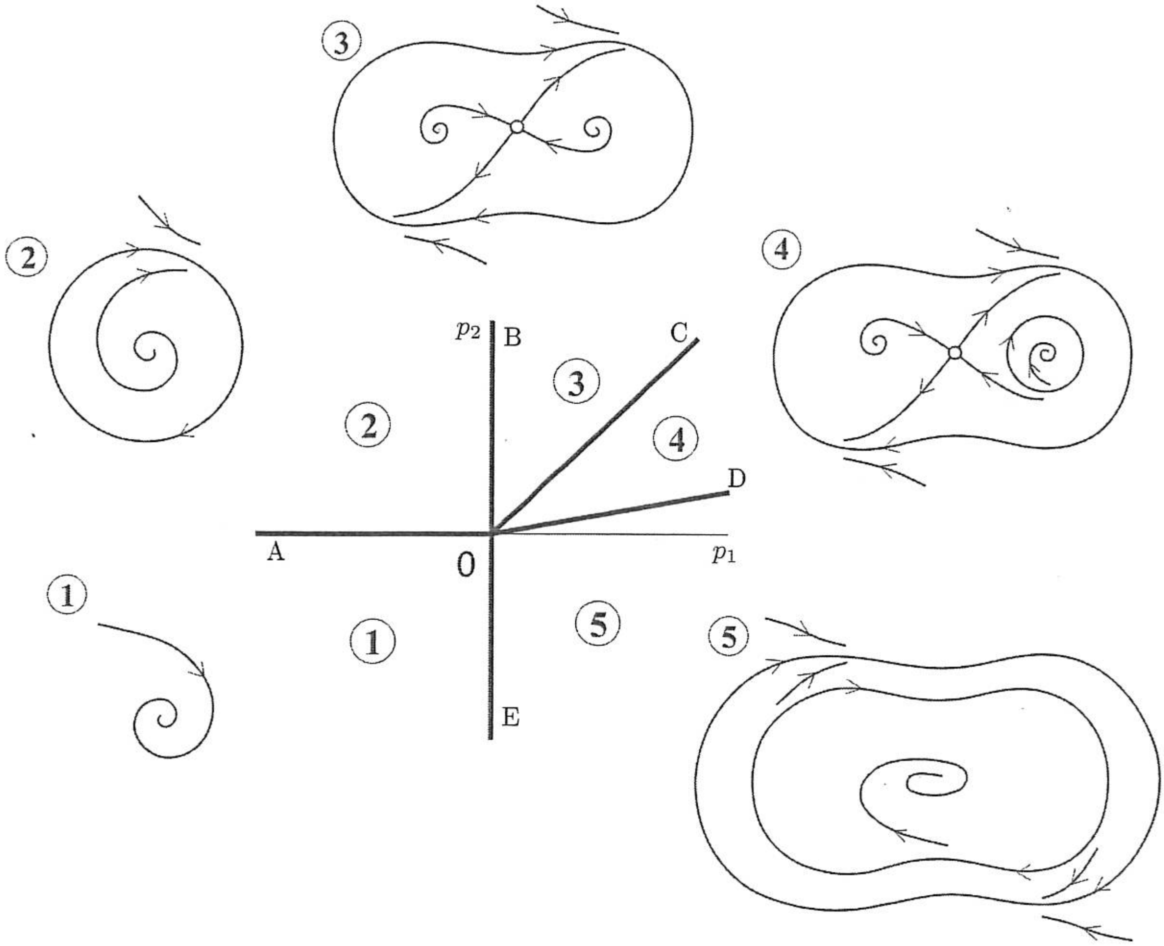


Linea continua: equilibri e cicli stabili
Tratteggio: equilibri e cicli instabili

Si classifichino le biforcazioni riempiendo la tabella

	Biforcazione	Quante sono?
	Transcritica	0
	Nodo-sella	0
	Forcone subcritica	0
	Forcone supercritica	1
	Tangente di cicli	1
H_s	Hopf subcritica	1
H^s	Hopf supercritica	1
	Neimark-Sacker	0
	Flip	0
	Omoclina	2
	Eteroclina	0

Il diagramma di biforcazione di una famiglia di sistemi del second'ordine dipendente da due parametri (p_1, p_2) con i rispettivi schizzi del quadro delle traiettorie sono riportati in figura.

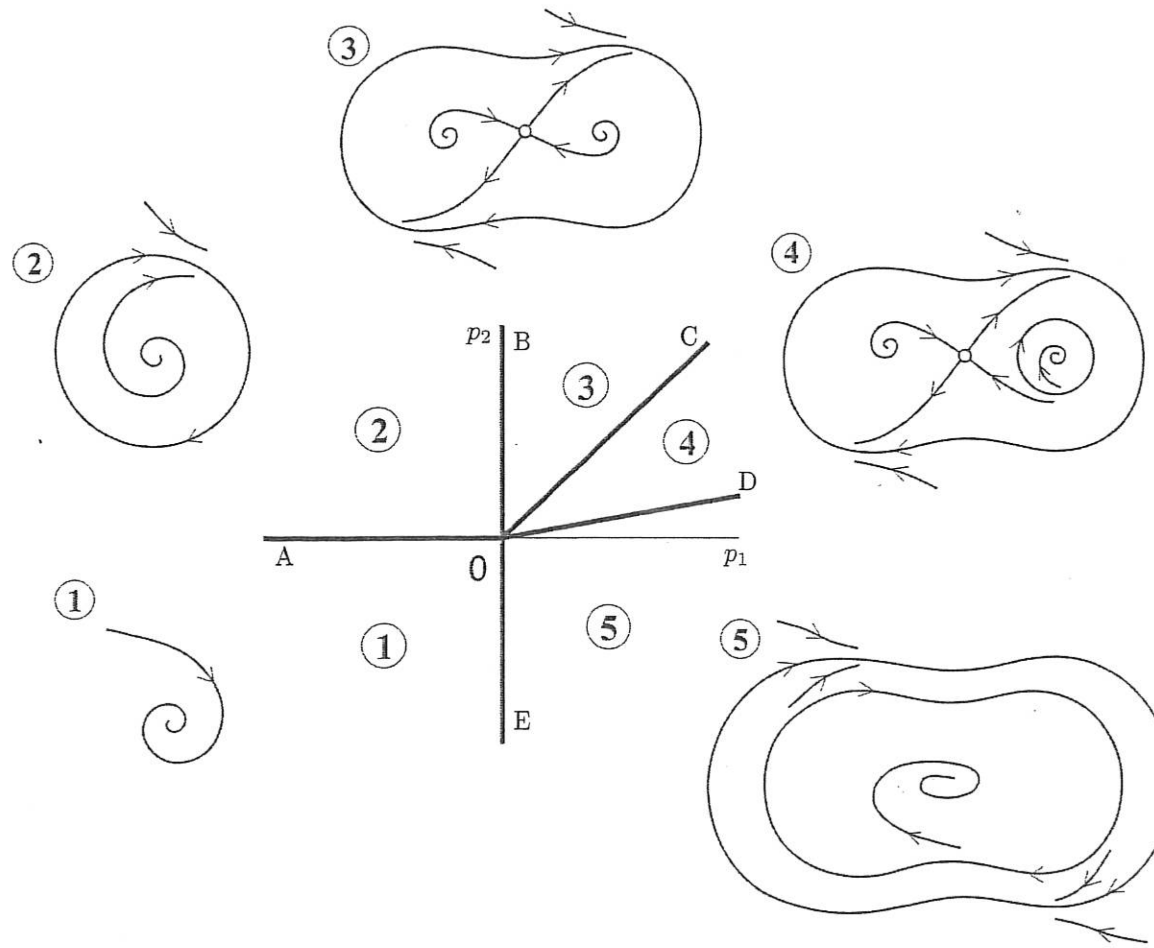


Si classifichino (senza dare alcuna giustificazione) tutte le curve di biforcazione.

SVOLGIMENTO

Curva	Biforcazione
A	
B	
C	
D	
E	

Il diagramma di biforcazione di una famiglia di sistemi del second'ordine dipendente da due parametri (p_1, p_2) con i rispettivi schizzi del quadro delle traiettorie sono riportati in figura.

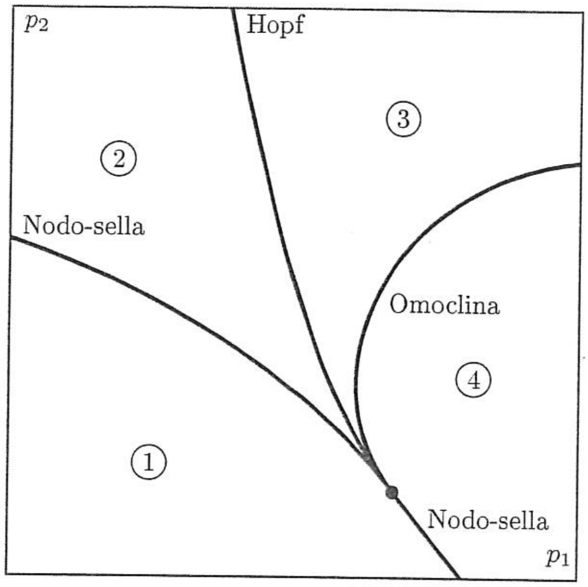


Si classifichino (senza dare alcuna giustificazione) tutte le curve di biforcazione.

SVOLGIMENTO

Curva	Biforcazione
A	Hopf supercritica
B	Forcone subcritico & Nodo-sella
C	Hopf subcritica
D	Nodo-sella
E	Tangente di cicli

Una famiglia di sistemi del second'ordine dipendente da due parametri (p_1, p_2) ha un nodo globalmente stabile se p_1 e p_2 sono piccoli. É inoltre noto che il diagramma di biforcazione rispetto ai due parametri è quello riportato in figura.



Si disegni un possibile quadro delle traiettorie per ognuna delle regioni 1, 2, 3 e 4.

SVOLGIMENTO

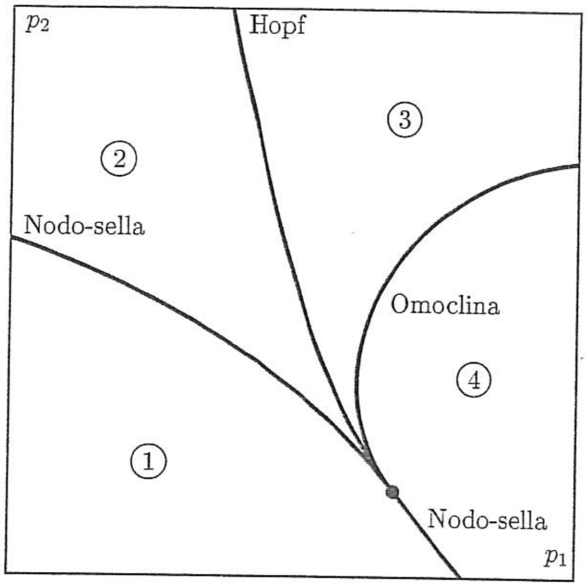
1

2

3

4

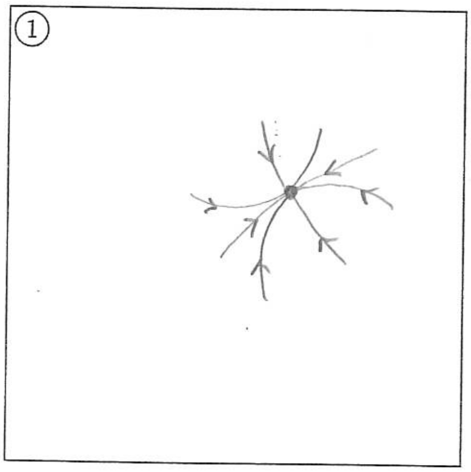
Una famiglia di sistemi del second'ordine dipendente da due parametri (p_1, p_2) ha un nodo globalmente stabile se p_1 e p_2 sono piccoli. É inoltre noto che il diagramma di biforcazione rispetto ai due parametri è quello riportato in figura.

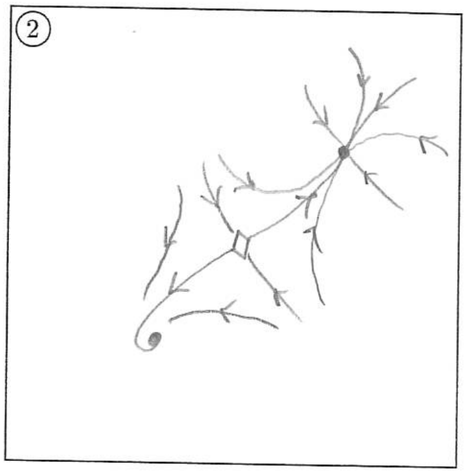


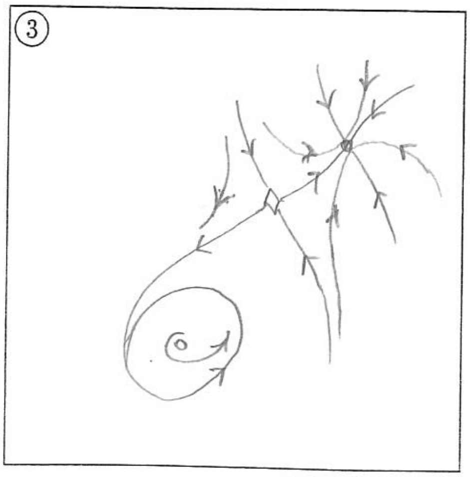
Si disegni un possibile quadro delle traiettorie per ognuna delle regioni ①, ②, ③ e ④.

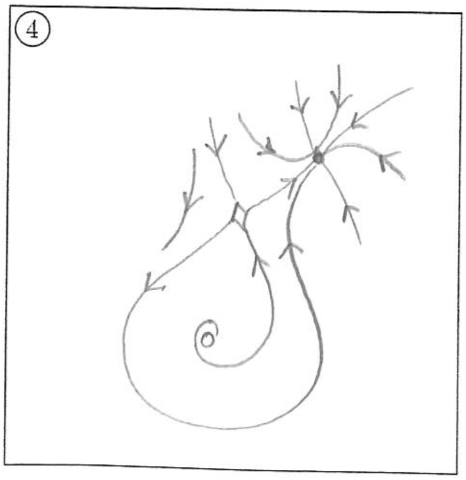
SVOLGIMENTO

• ATTRATT
◇ SELLA
o REPULS

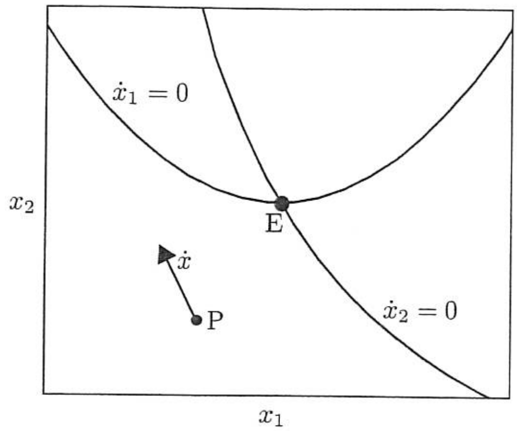








In un sistema del second'ordine le due isocline si intersecano come in figura



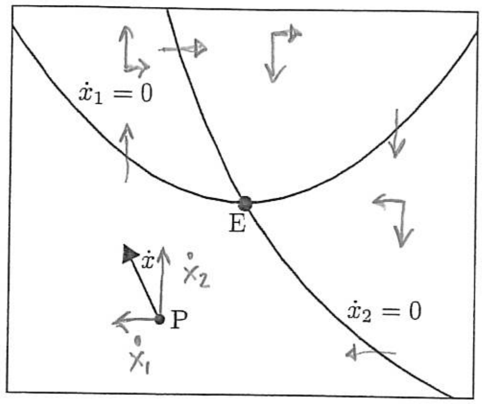
Sapendo che il vettore $\dot{x}$ tangente alla traiettoria nel punto P è come indicato in figura, si dica se l'equilibrio E è un fuoco, un nodo o una sella (la risposta deve essere giustificata).

SVOLGIMENTO

L'equilibrio E è ....

Spiegazione:

In un sistema del second'ordine le due isocline si intersecano come in figura

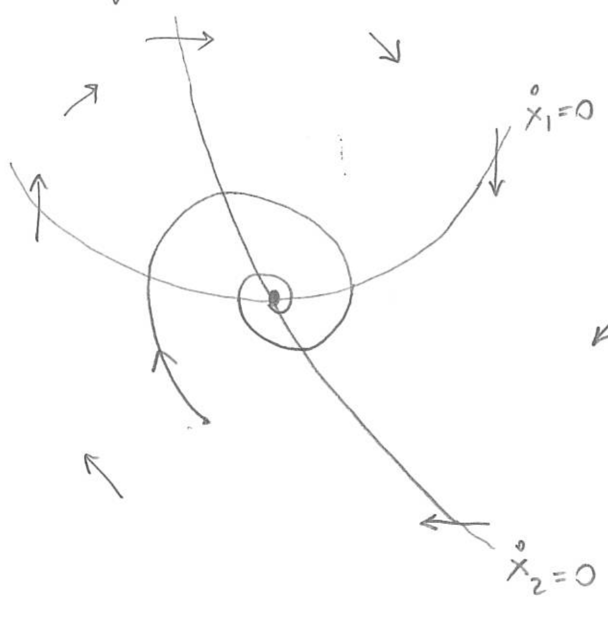


Sapendo che il vettore $\dot{x}$ tangente alla traiettoria nel punto P è come indicato in figura, si dica se l'equilibrio E è un fuoco, un nodo o una sella (la risposta deve essere giustificata).

SVOLGIMENTO

L'equilibrio E è un fuoco

Spiegazione:

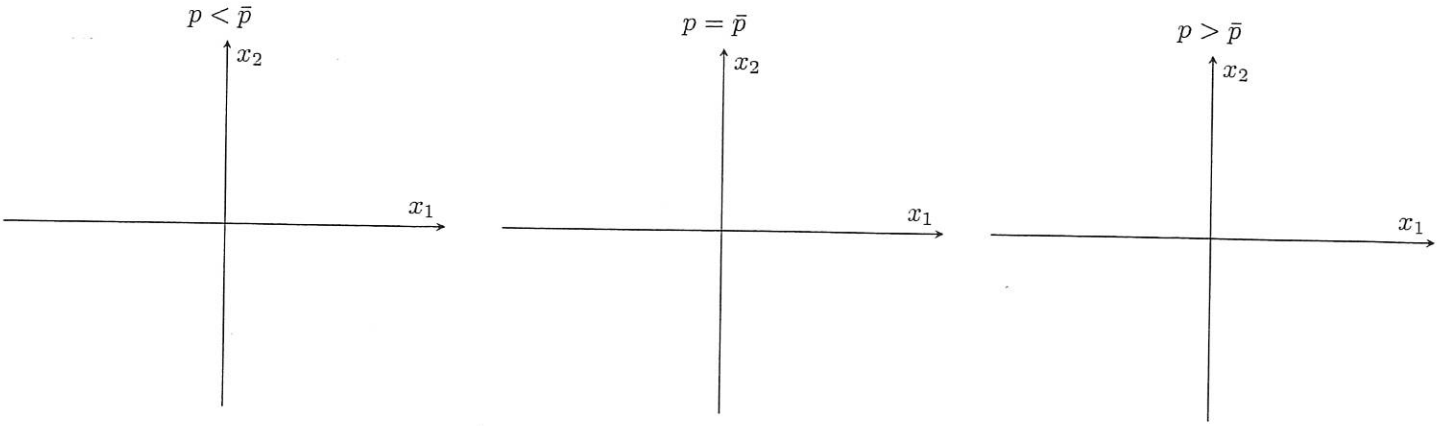


Esempio per un fuoco stabile

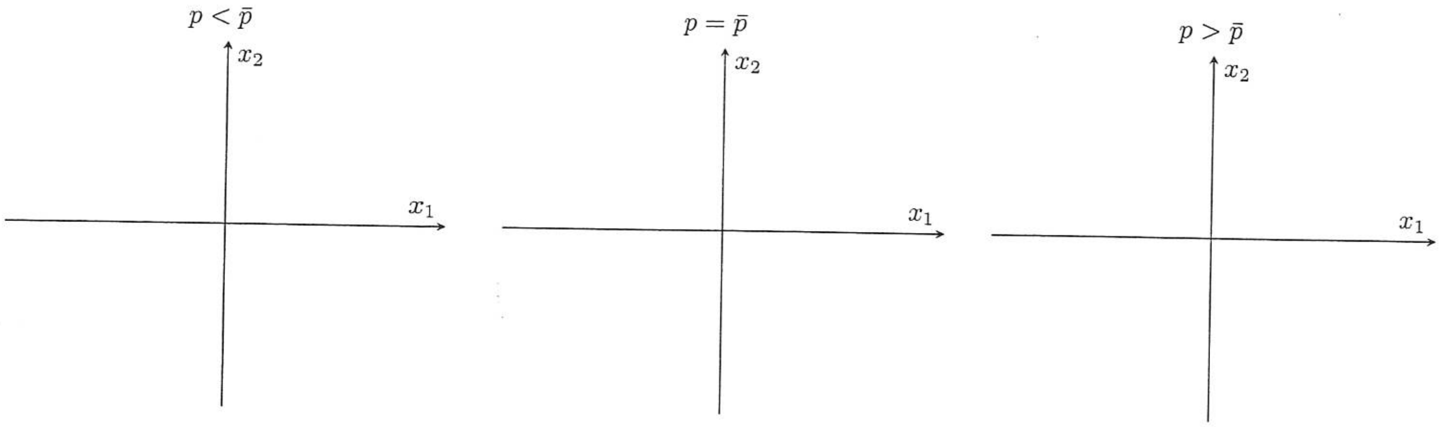
Una famiglia di sistemi del second'ordine a tempo continuo dipendenti da un parametro p ha, per un certo valore $\bar{p}$ del parametro, una biforcazione. Disegnare i possibili quadri di stato corrispondenti ai diversi scenari di biforcazione.

SVOLGIMENTO

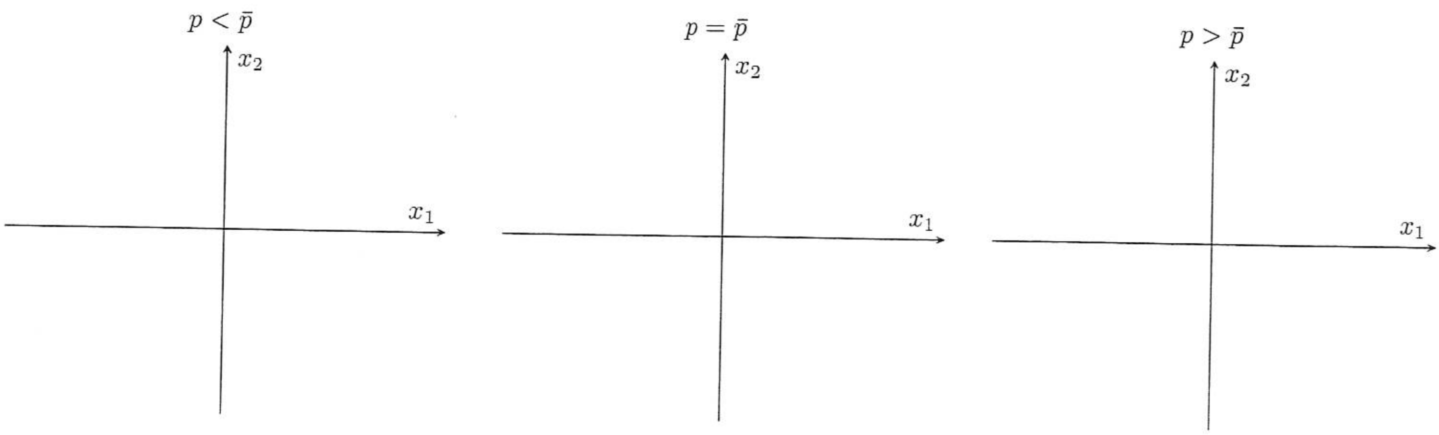
(a) per $p = \bar{p}$ il sistema ha una biforcazione di Hopf subcritica.



(b) per $p = \bar{p}$ il sistema ha una biforcazione transcritica.



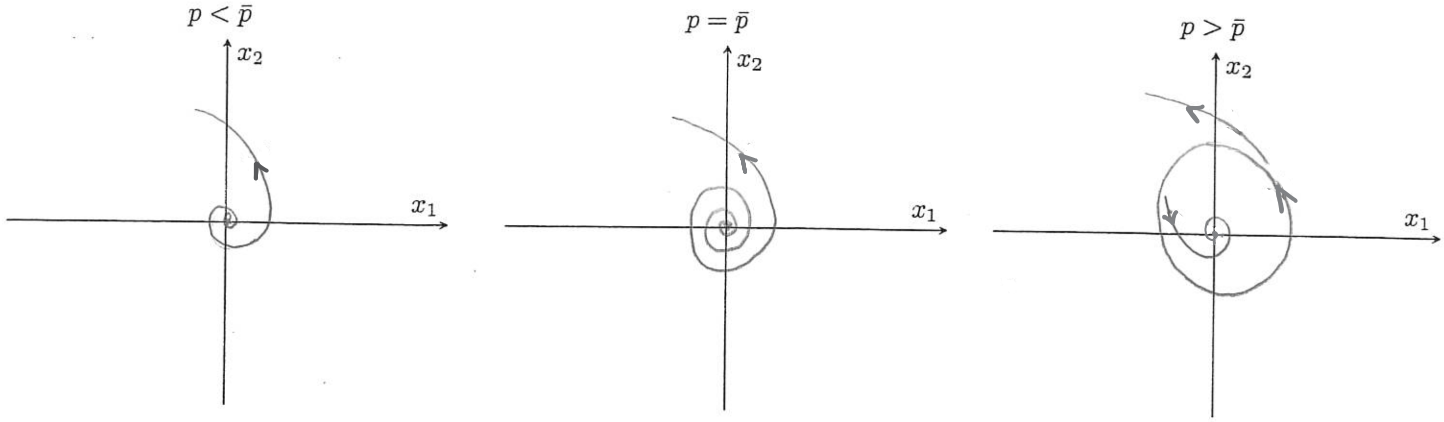
(c) per $p = \bar{p}$ il sistema ha una biforcazione tangente di cicli.



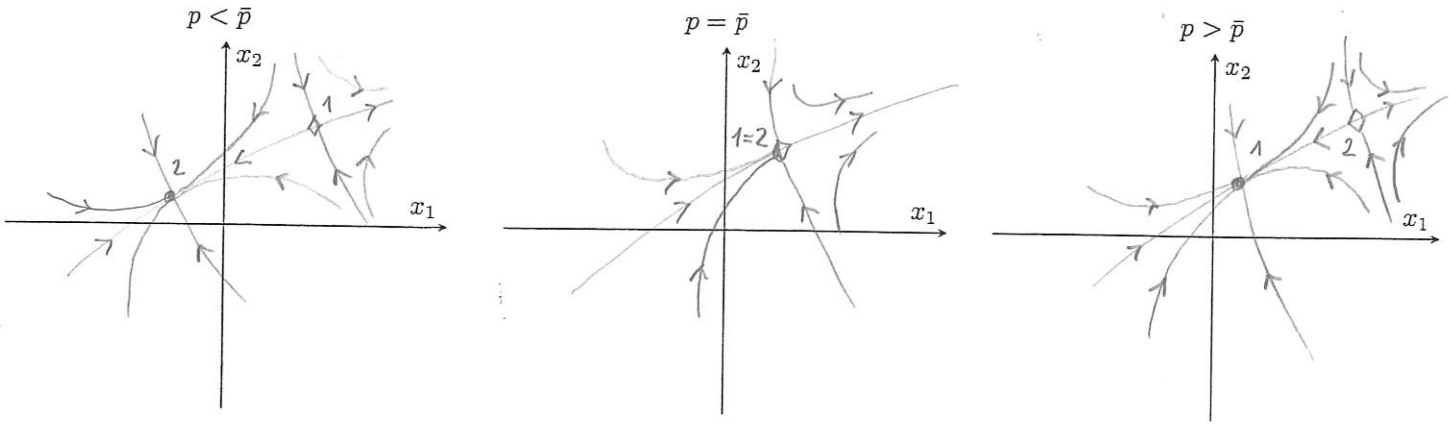
Una famiglia di sistemi del second'ordine a tempo continuo dipendenti da un parametro p ha, per un certo valore $\bar{p}$ del parametro, una biforcazione. Disegnare i possibili quadri di stato corrispondenti ai diversi scenari di biforcazione.

SVOLGIMENTO

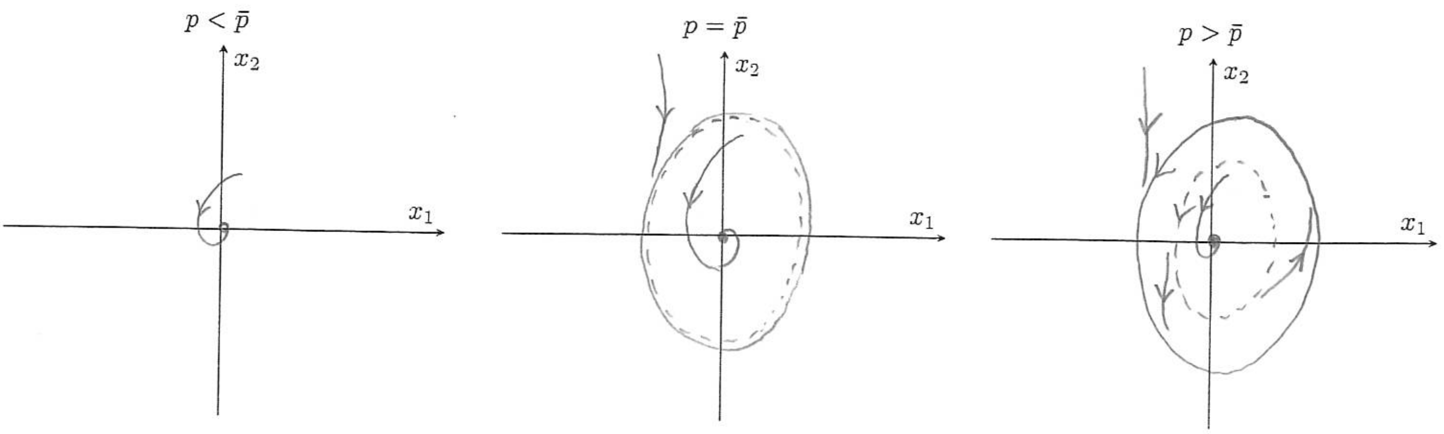
(a) per $p = \bar{p}$ il sistema ha una biforcazione di Hopf subcritica.



(b) per $p = \bar{p}$ il sistema ha una biforcazione transcritica.



(c) per $p = \bar{p}$ il sistema ha una biforcazione tangente di cicli.



Una famiglia di sistemi a tempo continuo del II ordine

$$\dot{x} = f(x, p)$$

ha uno e un solo equilibrio per ogni valore del parametro p. Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere e quali false

a) • Il sistema può avere biforcazioni nodo-sella

b) • Il sistema non può avere cicli

c) • Il sistema non può avere biforcazioni di Hopf

d) • Il sistema non può avere biforcazioni omocline

Una famiglia di sistemi a tempo continuo del II ordine

$$\dot{x} = f(x, p)$$

ha uno e un solo equilibrio per ogni valore del parametro p. Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere. e quali false

a) • Il sistema può avere biforcazioni nodo-sella

b) • Il sistema non può avere cicli

c) • Il sistema non può avere biforcazioni di Hopf

d) • Il sistema non può avere biforcazioni omocline

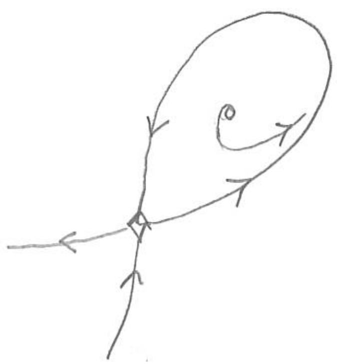
---

a) FALSA In caso di biforcazione nodo-sella devono esistere almeno due equilibri ↳(si intende di equilibri)

b) FALSA Si potrebbe infatti avere:

c) FALSA Con la Hopf si "parte" da un equilibrio e si "resta" (dopo la biforcazione) con un equilibrio

d) VERA Per avere tale biforcazione occorre avere almeno due equilibri. La situazione deve, ad esempio, essere



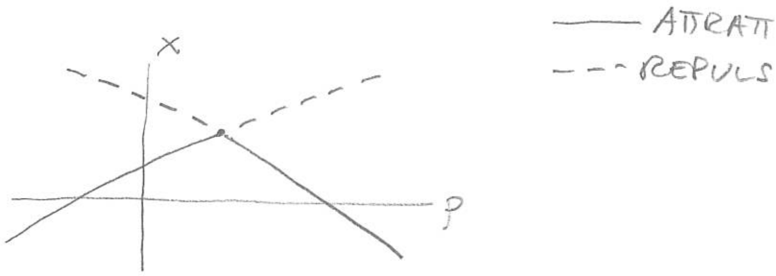
Cancella tutte le biforcazioni che non ti aspetti di trovare in un sistema del prim'ordine a tempo continuo.

Neimark-Sacker	Transcritica	Tangente di cicli
Hopf	Omoclina	Forcone
Eteroclina	Nodo sella	Flip

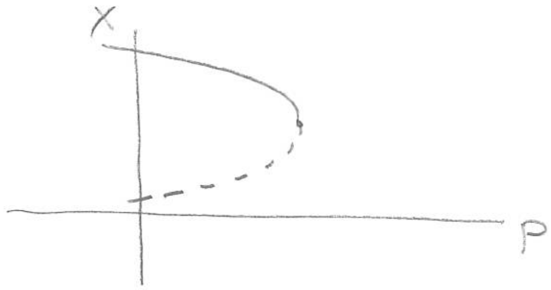
$\dot{x} = f(x,p)$ $n=1$

Posso trovare

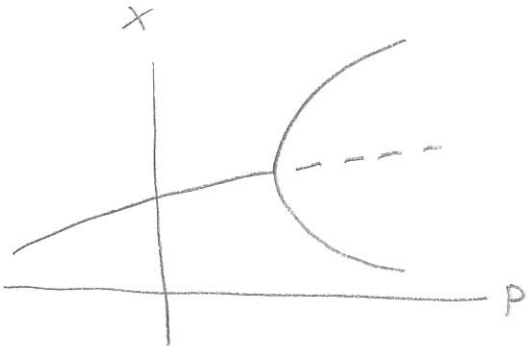
- Transcritica



- Nodo sella



- Forcone



Tutte le altre sono da cancellare!

Neimark-Sacker e Flip necessitano di $n \geq 3$

Hopf, Eteroclina, Omoclina, Tangente di cicli necessitano di $n \geq 2$

Con riferimento ai sistemi a tempo continuo

$$\dot{x} = f(x, p) \qquad x \in \mathbb{R}^n$$

si riempia la tabella seguente, indicando nell'ultima colonna il minimo valore di n a cui si può presentare la biforcazione indicata.

BIFORCAZIONE	n_{min}
flip	
nodo-sella	
transcritica	
tangente di cicli	
forcone	
omoclina	
Neimark-Sacker	
Hopf	

Con riferimento ai sistemi a tempo continuo

$$\dot{x} = f(x, p) \qquad x \in \mathbb{R}^n$$

si riempia la tabella seguente, indicando nell'ultima colonna il minimo valore di n a cui si può presentare la biforcazione indicata.

BIFORCAZIONE	n_{min}
flip	3
nodo-sella	1
transcritica	1
tangente di cicli	2
forcone	1
omoclina	2
Neimark-Sacker	3
Hopf	2

Una famiglia di sistemi del secondo ordine

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= f_1(x_1, x_2, p)\\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2, p)\end{aligned}$$

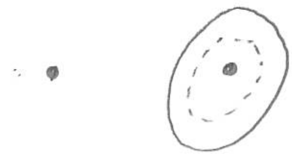
ha un unico equilibrio per ogni valore del parametro p. Cancella (senza spiegare perchè) tutte le biforcazioni che puoi escludere per questo sistema.

- Nodo-sella di equilibri
- Transcritica di equilibri
- Hopf subcritica
- Hopf supercritica
- Tangente di cicli
- Flip
- Neimark-Sacker
- Omoclina

Una famiglia di sistemi del secondo ordine

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= f_1(x_1, x_2, p)\\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2, p)\end{aligned}$$

ha un unico equilibrio per ogni valore del parametro p. Cancella (senza spiegare perchè) tutte le biforcazioni che puoi escludere per questo sistema.

- ~~Nodo-sella di equilibri~~ → richiede 2 equilibri
- ~~Transcritica di equilibri~~ → richiede 2 equilibri
- Hopf subcritica → 
- Hopf supercritica → 
- Tangente di cicli → 
- ~~Flip~~ → richiede $n \geq 3$
- ~~Neimark-Sacker~~ → richiede $n \geq 3$
- ~~Omoclina~~ → richiede 2 equilibri 

VERO O FALSO ?

- un sistema lineare a tempo discreto $x(k+1) = Ax(k)$ è stabile se tutti gli autovalori di A hanno parte reale negativa.
- la biforcazione tangente di cicli esiste solo in sistemi di dimensione $n > 2$.
- un sistema del II ordine a tempo continuo può avere solo un numero pari di equilibri stabili.
- in un sistema del II ordine a tempo continuo con due soli equilibri, entrambi gli equilibri possono essere selle.
- la biforcazione omoclina può non coinvolgere un ciclo.
- non esistono equilibri instabili.
- se la divergenza di un sistema a tempo continuo è positiva ovunque il sistema non ammette comportamento caotico.
- non esistono sistemi senza attrattori.
- un sistema a tempo discreto del prim'ordine non può avere cicli instabili.
- Un sistema non-lineare del terz'ordine può avere uno strano attrattore
- Un sistema non-lineare del second'ordine può avere un equilibrio stabile, una sella e un ciclo
- Un sistema non-lineare del prim'ordine può avere due equilibri stabili e nessun equilibrio instabile
- Un sistema non-lineare può avere più di un equilibrio
- Un sistema lineare può avere più di un equilibrio
- esistono biforcazioni nodo-sella non catastrofiche.
- un sistema del II ordine a tempo continuo può avere solo due equilibri entrambi stabili.
- la biforcazione Neimark-Sacker può essere presente anche nei sistemi a tempo discreto del I ordine.
- la biforcazione di Hopf esiste solo nei sistemi del II ordine.
- la biforcazione di Hopf non può essere non catastrofica.

- un sistema con un unico equilibrio può avere biforcazioni forcone.
- nei sistemi del quarto ordine non possono esistere cicli sella.
- la mappa di Poincarè di un sistema di ordine n è un sistema a tempo discreto di ordine n
- un nodo stabile e un fuoco stabile non sono topologicamente equivalenti
- un sistema del second'ordine in cui tutti gli equilibri sono di tipo sella non può avere biforcazioni omocline
- se la divergenza di un sistema di ordine 3 non cambia mai segno possono esserci biforcazioni Neimark-Sacker
- la somma degli esponenti di Lyapunov di un attrattore caotico è negativa
- nei sistemi lineari un equilibrio asintoticamente stabile può non essere globalmente stabile

VERO O FALSO?

- F — un sistema lineare a tempo discreto $x(k+1) = Ax(k)$ è stabile se tutti gli autovalori di A hanno parte reale negativa.
- F — la biforcazione tangente di cicli esiste solo in sistemi di dimensione $n > 2$.
- F — un sistema del II ordine a tempo continuo può avere solo un numero pari di equilibri stabili.
- V — in un sistema del II ordine a tempo continuo con due soli equilibri, entrambi gli equilibri possono essere selle.

- F — la biforcazione omoclina può non coinvolgere un ciclo.
- F — non esistono equilibri instabili.
- V — se la divergenza di un sistema a tempo continuo è positiva ovunque il sistema non ammette comportamento caotico.
- F — non esistono sistemi senza attrattori.
- F — un sistema a tempo discreto del prim'ordine non può avere cicli instabili.
- V — Un sistema non-lineare del terz'ordine può avere uno strano attrattore
- V — Un sistema non-lineare del second'ordine può avere un equilibrio stabile, una sella e un ciclo
- F — Un sistema non-lineare del prim'ordine può avere due equilibri stabili e nessun equilibrio instabile
- V — Un sistema non-lineare può avere più di un equilibrio
- F — Un sistema lineare può avere più di un equilibrio
- F — esistono biforcazioni nodo-sella non catastrofiche.
- F — un sistema del II ordine a tempo continuo può avere solo due equilibri entrambi stabili.
- F — la biforcazione Neimark-Sacker può essere presente anche nei sistemi a tempo discreto del I ordine.
- F — la biforcazione di Hopf esiste solo nei sistemi del II ordine.
- F — la biforcazione di Hopf non può essere non catastrofica.

- F — un sistema con un unico equilibrio può avere biforcazioni forcone.
- F — nei sistemi del quarto ordine non possono esistere cicli sella.
- F — la mappa di Poincarè di un sistema di ordine n è un sistema a tempo discreto di ordine n
- F — un nodo stabile e un fuoco stabile non sono topologicamente equivalenti
- V — un sistema del second'ordine in cui tutti gli equilibri sono di tipo sella non può avere biforcazioni omocline
- F — se la divergenza di un sistema di ordine 3 non cambia mai segno possono esserci biforcazioni Neimark-Sacker
- V — la somma degli esponenti di Lyapunov di un attrattore caotico è negativa
- F — nei sistemi lineari un equilibrio asintoticamente stabile può non essere globalmente stabile

Dire perchè i seguenti sistemi non ammettono comportamento caotico.

(1)

$$x(t+1) = x(t)(1 - x(t))$$

(2)

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= 5x_1 + 3x_2(x_1 + 2x_2) \\ \dot{x}_2 &= -3x_1x_2 + x_2^2 \end{cases}$$

(3)

$$\begin{cases} x_1(t+1) &= 5x_1(t) + 3x_2(t) - x_3(t) \\ x_2(t+1) &= -3x_1(t) + x_2(t) \\ x_3(t+1) &= x_1(t) - x_3(t) \end{cases}$$

(4)

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= (x_2 - x_1)^2 + x_3 \\ \dot{x}_2 &= x_1(28 - x_3) - x_2 \\ \dot{x}_3 &= -3x_3^2 + 2x_3 + 1 \end{cases}$$

Il sistema (1) non ammette comportamento caotico perchè ...

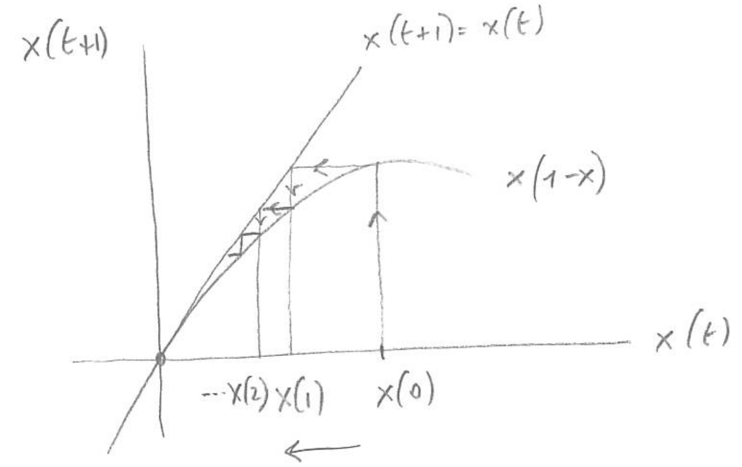
Il sistema (2) non ammette comportamento caotico perchè ...

Il sistema (3) non ammette comportamento caotico perchè ...

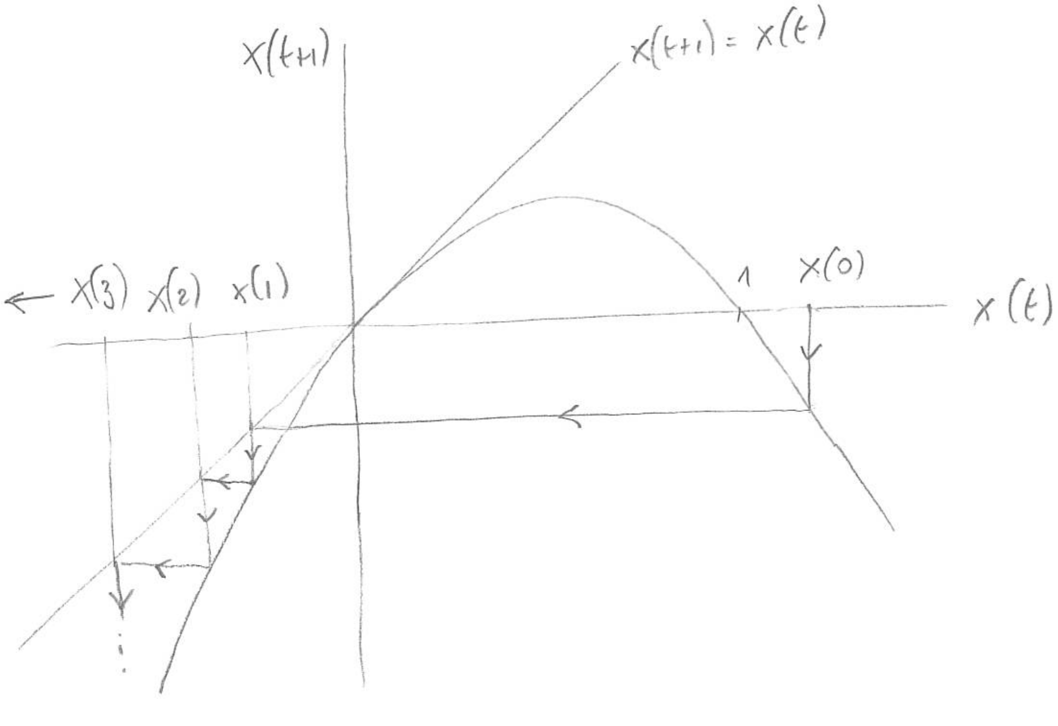
Il sistema (4) non ammette comportamento caotico perchè ...

---

1) $x(t) \to 0$ in modo monotono se $0<x(0)<1$



$x(t) \to -\infty$ in modo monotono se $x(0)<0$ oppure $x(0)>1$

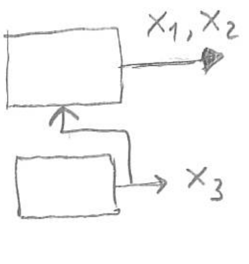


2) $n=2$ a tempo continuo

3) è lineare

4) la dinamica di x_3 non è influenzata da quella di x_1 e x_2

$n_3 = 1$ $\qquad$ $n_{12} = 2$



Una famiglia di sistemi del second'ordine a tempo continuo dipendenti da un parametro p ha l'origine che è sempre un equilibrio sella. Per un certo valore $\bar{p}$ del parametro, l'origine è coinvolta in una biforcazione omoclina, e lo Jacobiano valutato nell'origine è

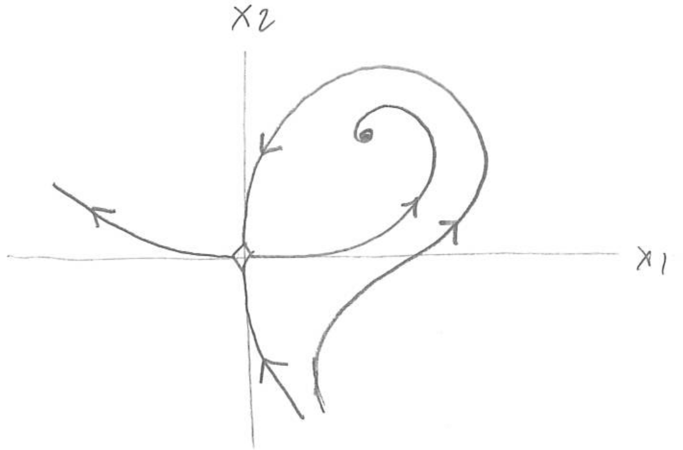
$$\begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}$$

Disegnare tre possibili quadri delle traiettorie, uno per $p < \bar{p}$, uno per $p = \bar{p}$ e uno per $p > \bar{p}$.

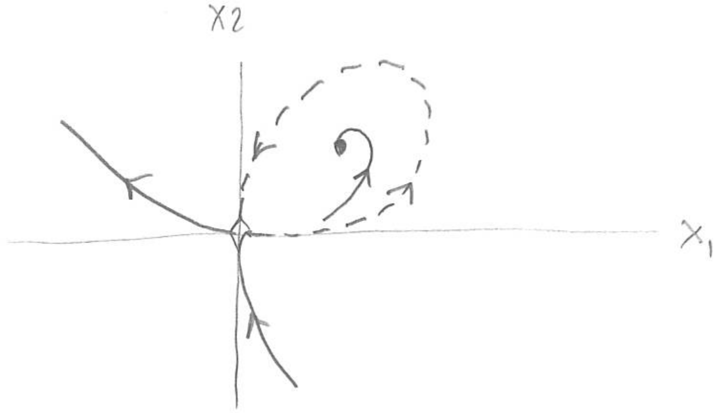
$\sigma = \lambda_1 + \lambda_2 = 7 - 5 = 2 > 0 \Rightarrow$ ciclo instabile

J è triangolare $\lambda_1 = 7 \rightarrow w: \ w_2 = 0 \rightsquigarrow$ asse x_1

$\lambda_2 = -5 \rightarrow w: \ w_1 = 0 \rightsquigarrow$ asse x_2

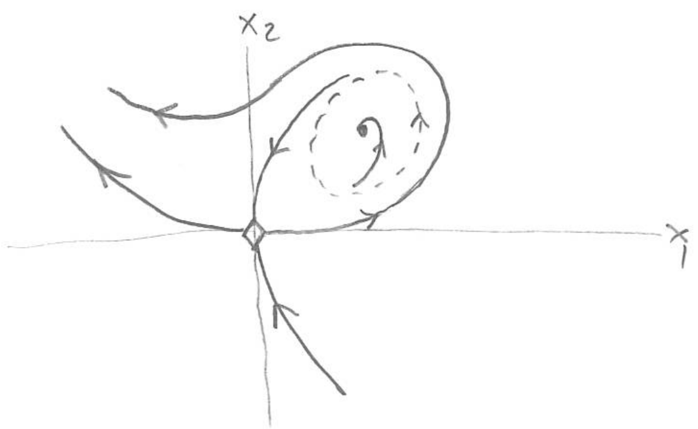


$p < \bar{p}$



$p = \bar{p}$

ciclo omoclino instabile



$p > \bar{p}$

ciclo instabile

Si consideri la famiglia di sistemi (p è un parametro, positivo, nullo o negativo)

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2(x_2-1)(x_2-2)-x_1\\ \dot{x}_2 &= -x_1-p\end{aligned}$$

1. Determinare gli equilibri del sistema
2. Analizzare la stabilità degli equilibri
3. Dire se esistono cicli
4. Disegnare un possibile quadro delle traiettorie

5. Determinare i valori del parametro per cui si hanno delle biforcazioni e dire di che biforcazioni si tratta
6. Disegnare gli equilibri del sistema nel piano (p, x_2), rappresentandoli con linee continue se stabili e con linee a puntini se instabili
7. Dire se esiste una isteresi

Si supponga infine che il parametro p non sia fissato ma abbia una sua dinamica del tipo

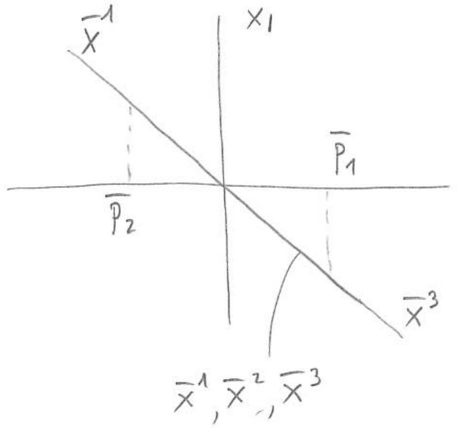
$$\dot{p} = \varepsilon g(x_1, x_2, p)$$

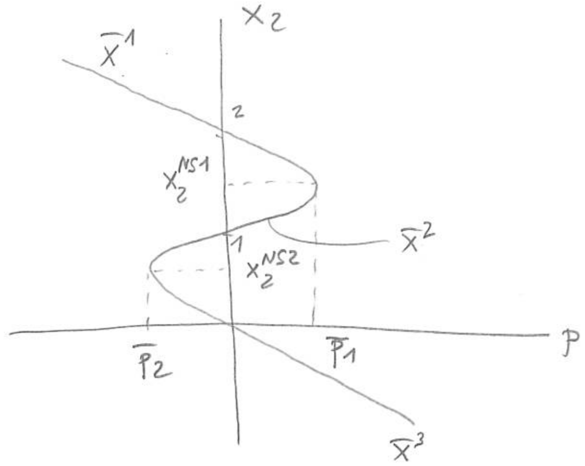
con $\varepsilon > 0$ molto piccolo. Si dica se è possibile che il sistema del terz'ordine così costruito abbia un ciclo e, in caso di risposta affermativa, si proponga una funzione g per cui il funzionamento asintotico del sistema sia periodico.

SVOLGIMENTO

1) $\dot{x}_1 = 0 \qquad x_2(x_2-1)(x_2-2)+p=0 \rightarrow p = -x_2(x_2-1)(x_2-2)$

$\dot{x}_2 = 0 \qquad x_1 = -p$



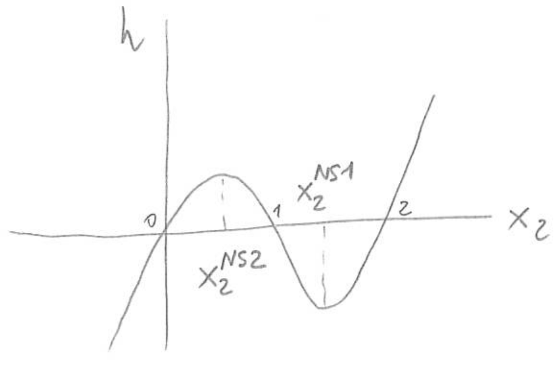


$p < \bar{p}_2 \rightarrow \bar{x}^1$

$\bar{p}_2 < p < \bar{p}_1 \rightarrow \bar{x}^1, \bar{x}^2, \bar{x}^3$

$p > \bar{p}_1 \rightarrow \bar{x}^3$

2) Posto $h(x_2) = x_2(x_2-1)(x_2-2)$



$\frac{dh}{dx_2} > 0 \qquad x_2 < x_2^{NS2} \Rightarrow \text{in } \bar{x}^3$

$\qquad\qquad x_2 > x_2^{NS1} \Rightarrow \text{in } \bar{x}^1$

$\frac{dh}{dx_2} < 0 \qquad x_2^{NS2} < x_2 < x_2^{NS1} \Rightarrow \text{in } \bar{x}^2$

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & \frac{dh}{dx_2} \\ -1 & 0 \end{vmatrix}$$

$\mathrm{tr} = -1 < 0$

$\det = \frac{dh}{dx_2}$

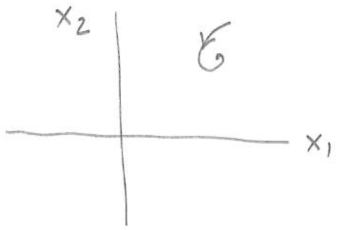
• $J\big|_{\bar{x}^1} \Rightarrow \left.\frac{dh}{dx_2}\right|_{\bar{x}^1} > 0 \rightarrow \det > 0 \Rightarrow \bar{x}^1$ è loc. A.S.

• $J\big|_{\bar{x}^3}$ idem $\Rightarrow$ $\bar{x}^3$ è loc. A.S.

• $J\big|_{\bar{x}^2} \Rightarrow \dfrac{dh}{dx_2}\Big|_{\bar{x}^2} < 0 \rightarrow \det < 0 \Rightarrow \bar{x}^2$ è INST (sella)

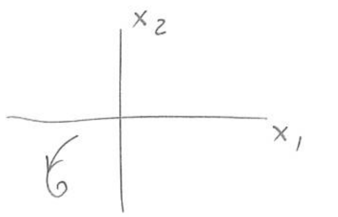
3) $\operatorname{div} f = \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} + \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2} = -1$ non cambia segno $\Rightarrow \nexists$ cicli

4) $p < \bar{p}_2$



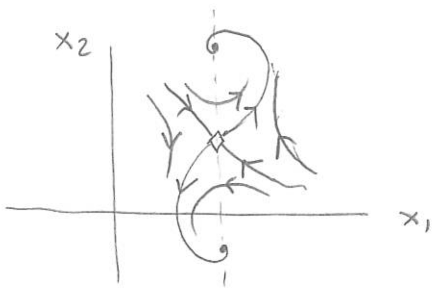
solo $\bar{x}^1$ con $\bar{x}^1_1 > 0$ e $\bar{x}^1_2 > 0$

$p > \bar{p}_1$



solo $\bar{x}^3$ con $\bar{x}^3_1 < 0$ e $\bar{x}^3_2 < 0$

$\bar{p}_2 < p < \bar{p}_1$



$\bar{x}^1$ e $\bar{x}^3$ stabili

$\bar{x}^2$ sella

con $\bar{x}^1_1 = \bar{x}^2_1 = \bar{x}^3_1$

5) Biforcazioni nodo-sella di equilibri in $\bar{p}_1$ e $\bar{p}_2$

collisione $\bar{x}^1$-$\bar{x}^2$

collisione $\bar{x}^2$-$\bar{x}^3$

Determiniamo $\bar{p}_1$ e $\bar{p}_2$

$$p = -x_2(x_2-1)(x_2-2) = -x_2^3 + 3x_2^2 - 2x_2$$

$$\frac{dp}{dx_2} = -3x_2^2 + 6x_2 - 2 = -(3x_2^2 - 6x_2 + 2)$$

$$\frac{dp}{dx_2} = 0 \rightarrow x_2 = \frac{3 \pm \sqrt{9-6}}{3} \quad \begin{cases} x_2^{NS1} = \dfrac{3+\sqrt{3}}{3} \\[2mm] x_2^{NS2} = \dfrac{3-\sqrt{3}}{3} \end{cases}$$

$$\bar{p}_1 = -\frac{3+\sqrt{3}}{3}\left(\frac{3+\sqrt{3}}{3}-1\right)\left(\frac{3+\sqrt{3}}{3}-2\right) = -\frac{3+\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}-3}{3} = \frac{\sqrt{3}}{\cancel{27}_{9}}\cdot\cancel{6}^{2}$$

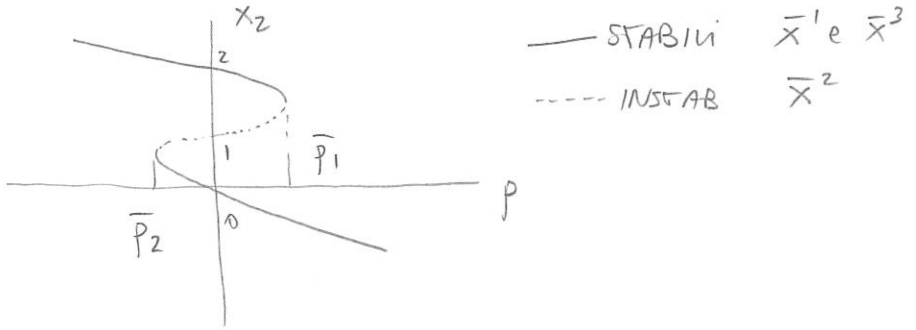
$$\Rightarrow \bar{p}_1 = \frac{2}{3\sqrt{3}}$$

$$\bar{p}_2 = -\frac{3-\sqrt{3}}{3}\left(\frac{3-\sqrt{3}}{3}-1\right)\left(\frac{3-\sqrt{3}}{3}-2\right) = -\frac{3-\sqrt{3}}{3}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\left(\frac{-3-\sqrt{3}}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{27}\left(3-\sqrt{3}\right)\left(3+\sqrt{3}\right) =$$

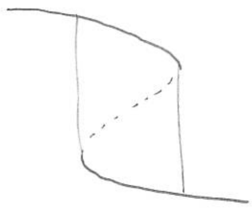
$$= -\frac{\sqrt{3}}{\cancel{27}_{9}}\cdot\cancel{6}^{2}$$

$$\Rightarrow \bar{p}_2 = -\frac{2}{3\sqrt{3}}$$

6)

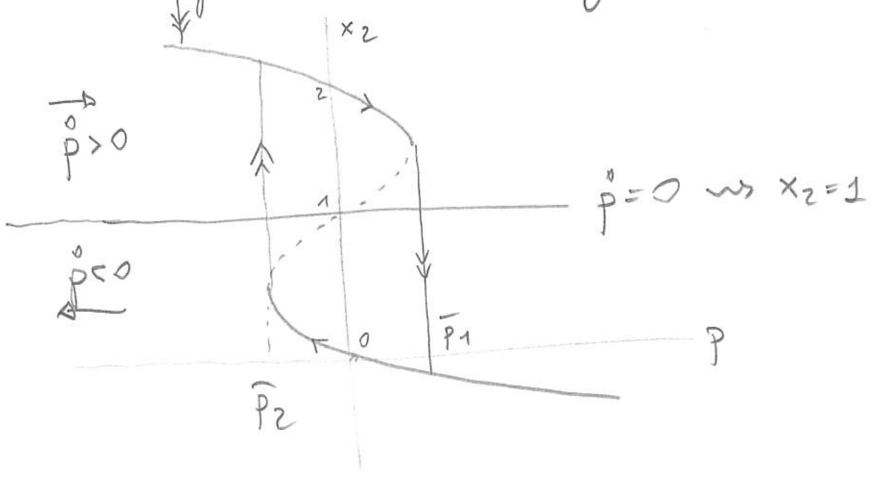


7) ∃ isteresi delimitata dalle due biforcazioni catastrofiche in $\bar{p}_1$ e $\bar{p}_2$



8) Può ∃ ciclo (lento - veloce), per esempio, ponendo

$$\mathring{p} = \varepsilon(1-x_2) \qquad g = 1-x_2$$



Si consideri il seguente sistema del secondo ordine:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 + x_1(x_1 - 2)\\ \dot{x}_2 &= x_2 - x_1(x_1 - 2) - p\end{aligned}$$

dove p è un parametro reale. Posto $p = 0$

1. Trovare gli equilibri del sistema.
2. Analizzare la dinamica e tracciare il quadro di stato nell'intorno degli equilibri.
3. Tracciare un possibile quadro di stato nel piano (x_1, x_2).

Si consideri ora $p > 0$.

4. Si dica se esistono biforcazioni al variare di p.
5. Si tracci un diagramma di biforcazione nello spazio (p, x_1).

$p=0$

1) $\dot{x}_1 = x_2 + x_1(x_1-2)$

$\dot{x}_2 = x_2 - x_1(x_1-2)$

$\left.\begin{array}{l}\dot{x}_1=0\\ \dot{x}_2=0\end{array}\right| \Rightarrow x_1(x_1-2)=0 \begin{cases} x_1=0 \\ x_1=2\end{cases}$

$\to x_2 = x_1(x_1-2) \begin{cases} x_2=0 \text{ (se } x_1=0) \\ x_2=0 \text{ (se } x_1=2)\end{cases}$

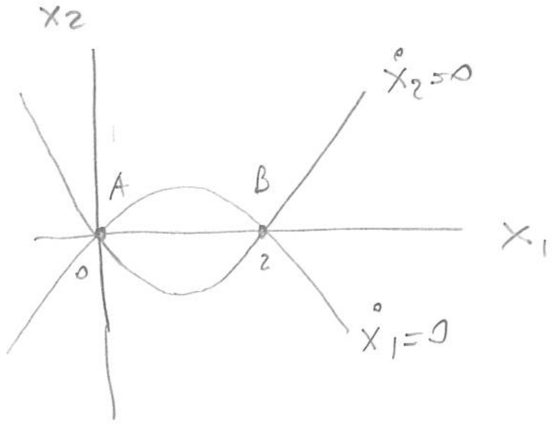
$A=(0,0)$

$B=(2,0)$

Vedendo gli equilibri come intersezione delle isocline

$\dot{x}_1=0 \to x_2 = -x_1(x_1-2)$

$\dot{x}_2=0 \to x_2 = x_1(x_1-2)$



2) $J = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2x_1-2 & 1 \\ -2x_1+2 & 1 \end{vmatrix}$

$J|_A = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$ $\quad tr = -1 < 0$
$\quad det = -2-2 = -4 < 0 \rightarrow$ INST (SELLA)

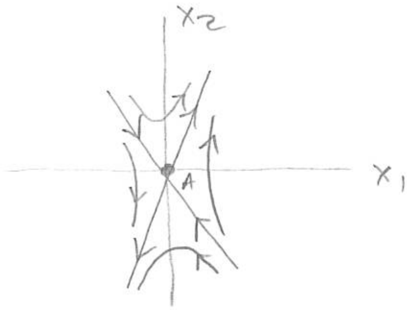
$\lambda^2 + \lambda - 4 = 0 \qquad \lambda_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+16}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}$

$\lambda_1 = \frac{-1+\sqrt{17}}{2} > 0 \rightarrow Jw = \lambda w \qquad \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} w_1 \\ w_2 \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} w_1 \\ w_2 \end{vmatrix}$

$-2w_1 + w_2 = \lambda w_1 \rightarrow w_2 = (2+\lambda) w_1$

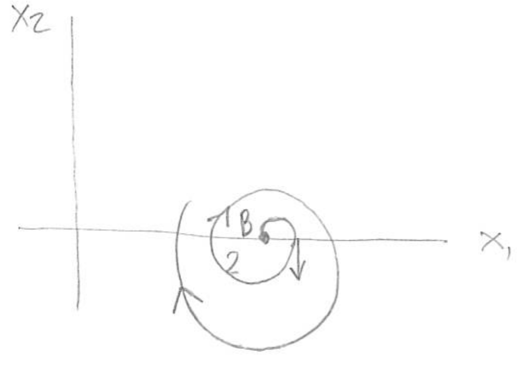
$w_2 = \left(2 + \frac{-1+\sqrt{17}}{2}\right) w_1 \rightarrow w_2 = \frac{3+\sqrt{17}}{2} w_1$

$\lambda_2 = \frac{-1-\sqrt{17}}{2} < 0 \rightarrow w_2 = 2 + \frac{-1-\sqrt{17}}{2} w_1 \rightarrow w_2 = \frac{3-\sqrt{17}}{2} w_1$



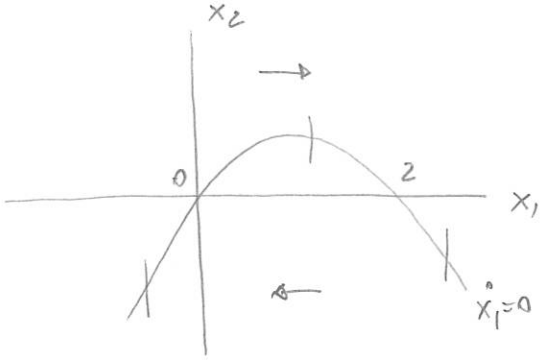
$J|_B = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}$ $\quad tr = 3 > 0 \longrightarrow$ INST
$\quad det = 2+2 = 4 > 0$

$\lambda^2 - 3\lambda + 4 = 0 \qquad \lambda_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9-16}}{2} = \frac{3 \pm i\sqrt{7}}{2} \rightarrow$ B è un fuoco instabile

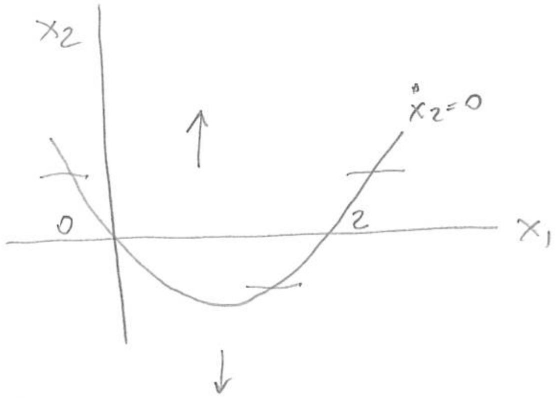


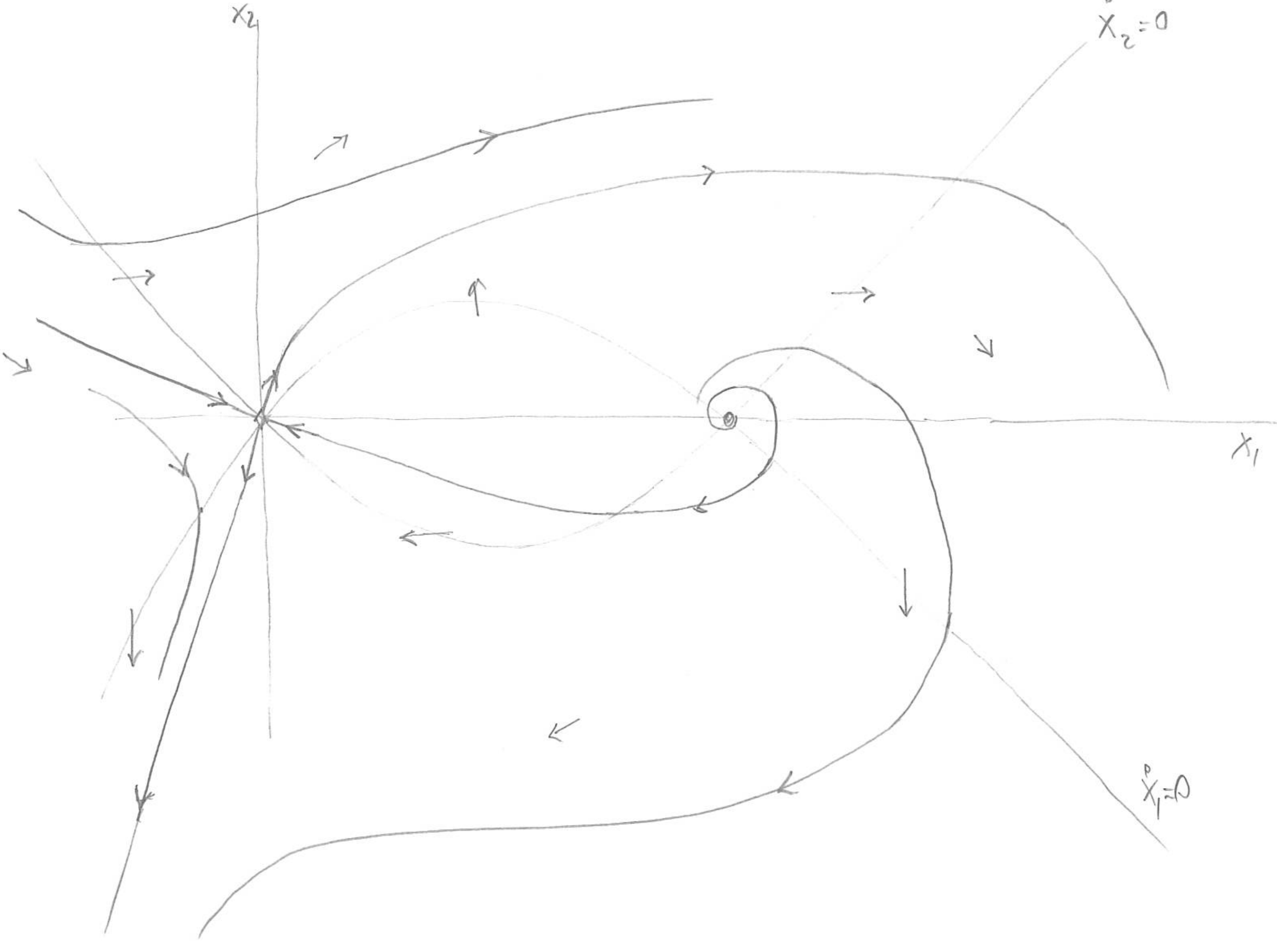
$x_1(0) = 2 + \varepsilon \quad (\varepsilon > 0)$
$x_2(0) = 0 \qquad \dot{x}_2(0) = -(2+\varepsilon)(\cancel{2}+\varepsilon\cancel{-2})$
$\dot{x}_2(0) < 0$
VERSO ORARIO

3) $\dot{x}_1 = 0$



$\dot{x}_2 = 0$



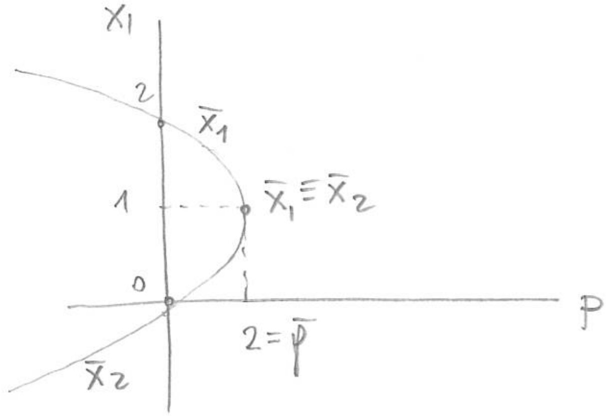


4es) $\dot{x}_1 = x_2 + x_1(x_1-2)$

$\dot{x}_2 = x_2 - x_1(x-2) - p$

$\dot{x}_1 = 0 \rightarrow x_2 = -x_1(x_1-2)$

$\dot{x}_2 = 0 \rightarrow -2x_1(x_1-2) - p = 0 \rightarrow p = -2x_1(x_1-2)$



$x_1 = 1 \rightarrow p = 2$

$\Rightarrow \bar{p} = 2$ biforcazione nodo - sella

Si consideri la famiglia di sistemi (p è un parametro, positivo, nullo o negativo)

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= -x_1^3 + x_2 \\
\dot{x}_2 &= p x_1 - x_2
\end{aligned}
$$

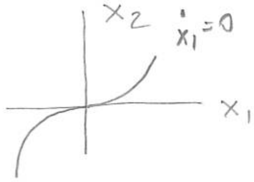
e si risponda a queste domande, giustificando sinteticamente la risposta:

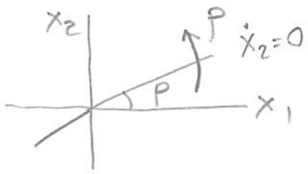
1. Il sistema ha equilibri? Quali? E per quali valori di p?
2. Per $p < 0$ com'è la stabilità degli stati di equilibrio?
3. Per $p > 0$ com'è la stabilità degli stati di equilibrio?
4. Esistono cicli nel sistema?
5. Come sono le isocline?
6. Com'è il quadro delle traiettorie per $p < 0$? E per $p = 0$? E per $p > 0$? (3 punti - rispondere con un disegno qualitativo)
7. Ci sono biforcazioni al variare del parametro p? Se sì, per che valori di p? Di che tipo di biforcazioni si tratta?

---

1) $\dot{x}_1 = -x_1^3 + x_2 = 0 \rightarrow x_2 = x_1^3$

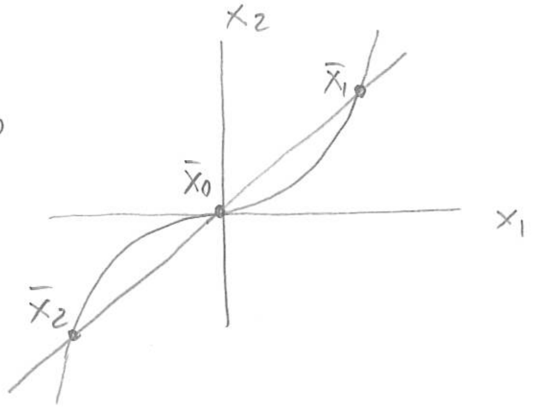
$\dot{x}_2 = p x_1 - x_2 = 0 \rightarrow x_2 = p x_1$



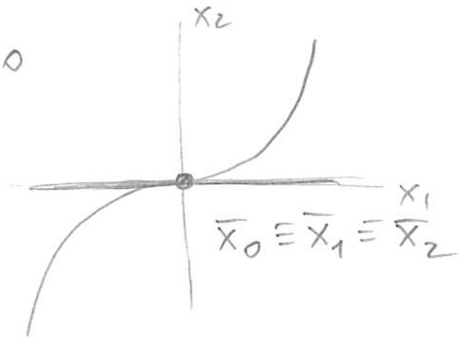


$p > 0$

$\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_0$

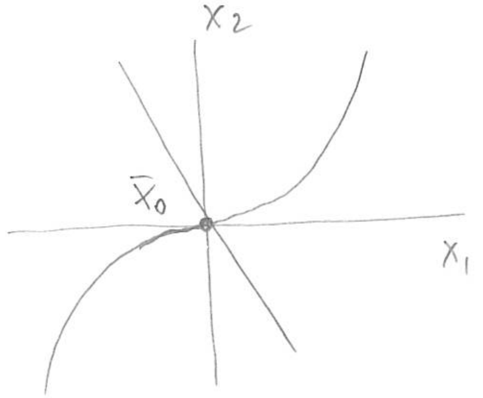


$p = 0$



$p < 0$

$\bar{x}_0$



Analiticamente

$$\begin{cases} x_2 = p x_1 \\ x_2 = x_1^3 \end{cases} \rightarrow x_1 (x_1^2 - p) = 0 \quad \begin{cases} x_1 = 0 \quad x_2 = 0 & \bar{x}_0 = (0,0) \\ x_1 = +\sqrt{p} \quad x_2 = +p\sqrt{p} & \bar{x}_1 (\sqrt{p}, p\sqrt{p}) \quad p \geq 0 \\ x_1 = -\sqrt{p} \quad x_2 = -p\sqrt{p} & \bar{x}_2 = (-\sqrt{p}, -p\sqrt{p}) \quad p \geq 0 \end{cases}$$

2) $p < 0 \quad \exists \, \bar{x}_0$

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3x_1^2 & 1 \\ p & -1 \end{vmatrix}$$

$$J_{\bar{x}_0} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ p & -1 \end{vmatrix} \qquad \begin{array}{l} tr = -1 \\ det = -p > 0 \Rightarrow \text{loc A.S.} \\ \quad (\text{se } p < 0) \end{array}$$

3) $p > 0 \quad \exists \, \bar{x}_0, \bar{x}_1, \bar{x}_2$

$J_{\bar{x}_0} \rightarrow det < 0 \Rightarrow$ INST (sella)

$$J_{\bar{x}_1} = J_{\bar{x}_2} = \begin{vmatrix} -3p & 1 \\ p & -1 \end{vmatrix} \qquad \begin{array}{l} tr = -3p - 1 \\ det = 3p - p = 2p \end{array}$$

p		$-1/3$		0	
tr	+	•	−		−
det	−		−	•	+
	INST sella		INST sella	$\downarrow$	A.S.

$\lambda_1 = 0 \rightsquigarrow$ biforcazione
$\lambda_2 < 0$

4) $\operatorname{div} f = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} = -3x_1^2 - 1 < 0$ non cambia segno
$\Rightarrow \nexists$ cicli

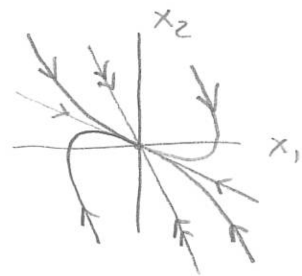
5) Isocline: vedi punto 1)

6) $\boxed{p<0}$ $\bar{x}_0$ loc. AS.

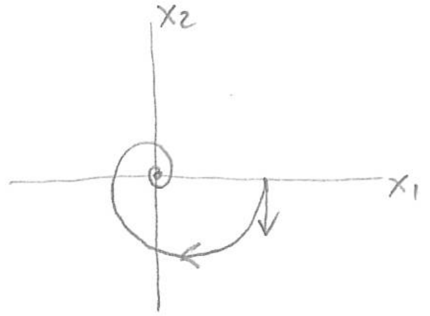
$$\lambda^2+\lambda-p=0 \qquad \lambda_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{1+4p}}{2}$$

$$\begin{cases}1+4p\geq 0\\ p<0\end{cases} \rightarrow \boxed{-\tfrac{1}{4}\leq p<0} \qquad \lambda_{1,2}\in\mathbb{R}^- \rightarrow \bar{x}_0 \text{ è un nodo stabile}$$

$$Jw=\lambda w \qquad \begin{vmatrix}0 & 1\\ p & -1\end{vmatrix}\begin{vmatrix}w_1\\ w_2\end{vmatrix}=\lambda\begin{vmatrix}w_1\\ w_2\end{vmatrix} \rightarrow w_2=\lambda w_1$$



$\boxed{p<-\tfrac{1}{4}}$ $\lambda_{1,2}\in\mathbb{C} \rightarrow \bar{x}_0$ è un fuoco stabile

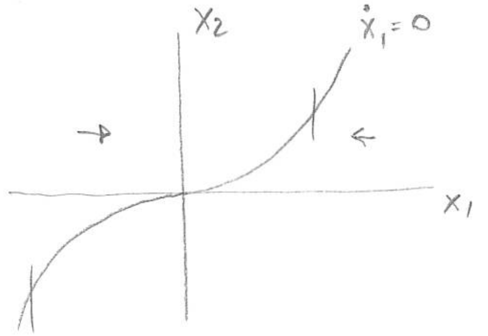


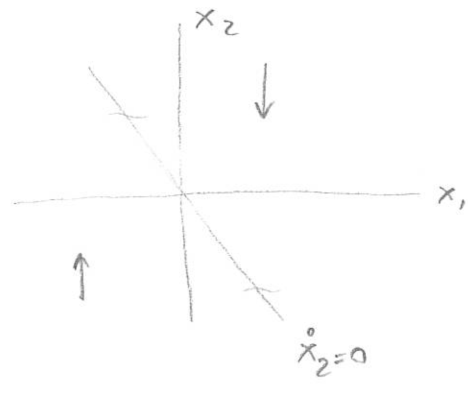
$x_1(0)=\varepsilon>0$

$x_2(0)=0 \rightarrow \dot{x}_2(0)=p\,x_1(0)=p\cdot\varepsilon<0$

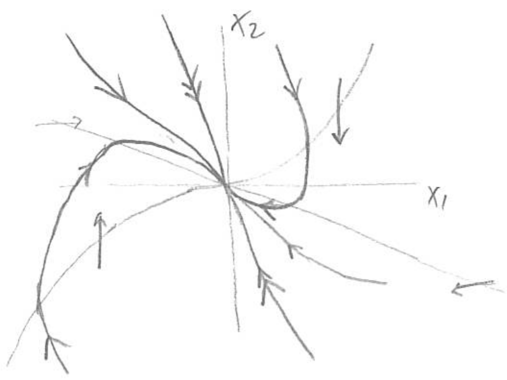
SENSO ORARIO

Con le isocline traccio il quadro in grande:

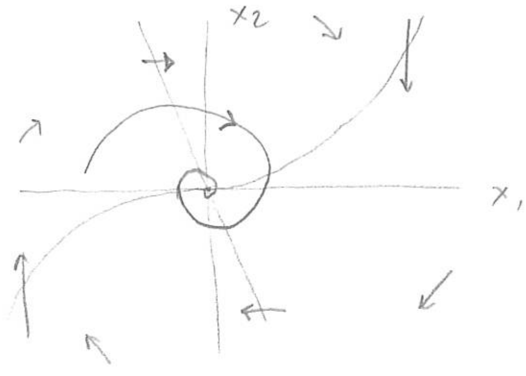




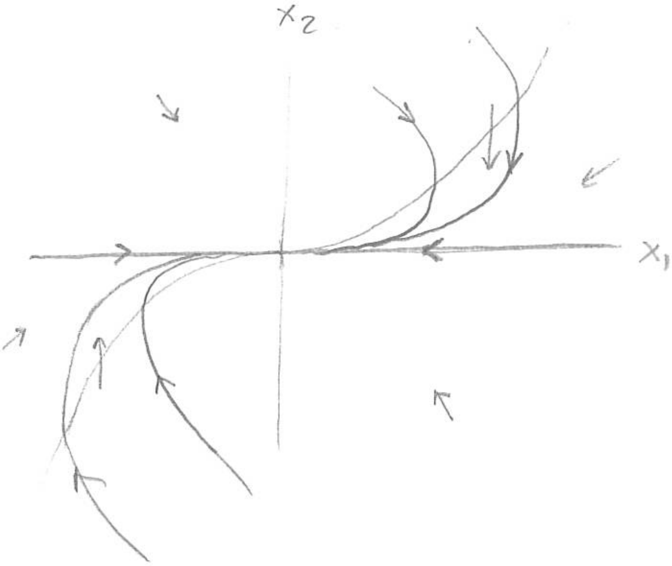
NODO STABILE



FUOCO STABILE



$\boxed{p=0}$

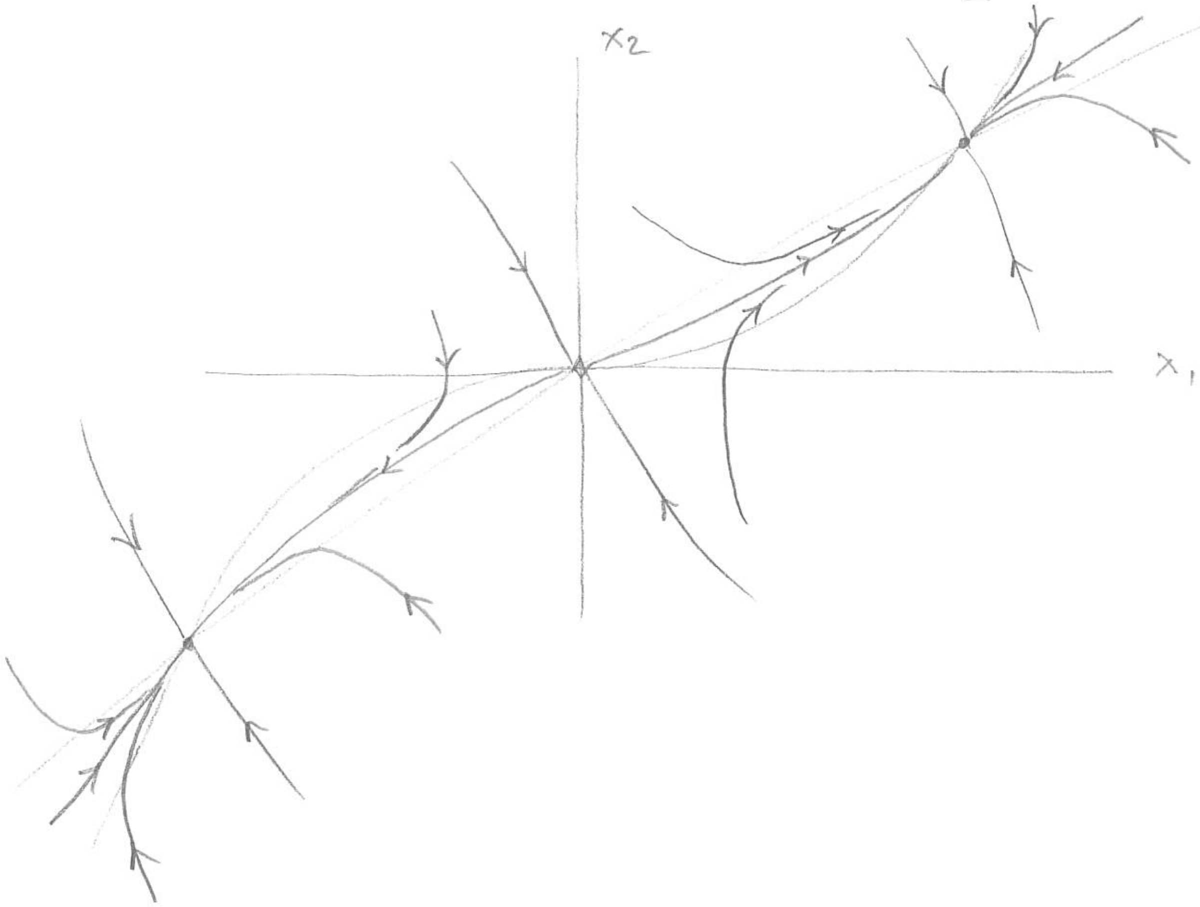


Asse x_1 è traiettoria
$(\mathring{x}_2 = -x_2)$
$x_2 = 0 \Rightarrow \mathring{x}_2 = 0 \Rightarrow x_2 = 0$

$\boxed{p>0}$ $\bar{x}_0$ sella
$\bar{x}_1$ e $\bar{x}_2$ loc. A.S. $\rightsquigarrow \lambda^2 + (3p+1)\lambda + 2p = 0$

sempre positivo $\forall p$

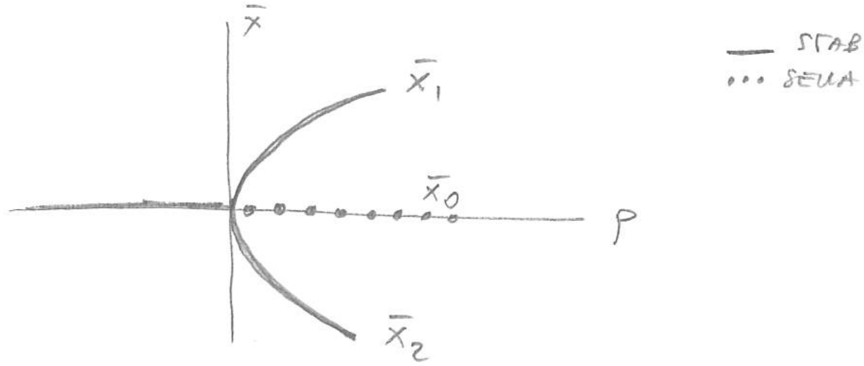
$$\lambda_{1,2} = \frac{-3p-1 \pm \sqrt{(3p+1)^2 - 8p}}{2} = -\frac{3p-1 \pm \sqrt{9p^2-2p+1}}{2} \in \mathbb{R}^-$$



7) $\bar{x}_0 = (0,0)$

$\bar{x}_1 \left(\sqrt{p}, p\sqrt{p}\right)$

$\bar{x}_2 \left(-\sqrt{p}, -p\sqrt{p}\right)$



in $\bar{p} = 0$ $\exists$ biforcazione forcone supercritica

Si consideri la famiglia di sistemi del second'ordine

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= (1-p)x_1 + x_2\\ \dot{x}_2 &= -x_2 - x_1^2.\end{aligned}$$

dove p è un parametro positivo ($p > 0$).

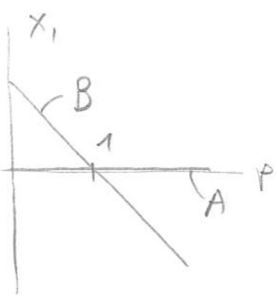
1. Determinare gli equilibri del sistema.
2. Discutere la stabilità degli equilibri trovati al variare di p, mostrando in particolare che ne esiste uno solo stabile.
3. Per $p = 3$, tracciare le traiettorie nell'intorno degli equilibri.
4. Dire se il sistema può avere cicli per qualche valore di p.
5. Disegnare un possibile quadro delle traiettorie per $p = 3$.
6. Evidenziare sul disegno ottenuto al punto precedente il bacino d'attrazione dell'equilibrio stabile.
7. Dire di che tipo sono le biforcazioni del sistema, spiegando perché l'analisi è completa.

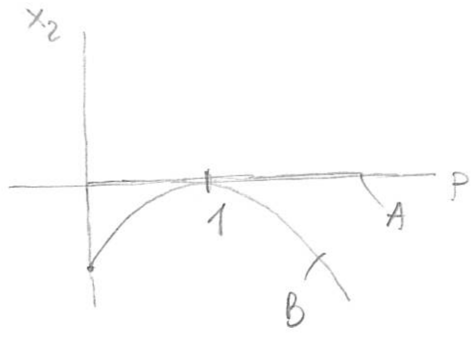
---

1) $\dot{x}_1 = 0 \to (1-p)x_1 + x_2 = 0 \to (1-p)x_1 - x_1^2 = 0 \begin{cases} x_1 = 0 & x_2 = 0 \\ x_1 = 1-p & x_2 = -(1-p)^2 \end{cases}$

$\dot{x}_2 = 0 \to x_2 = -x_1^2$

$A = (0,0) \qquad B = (1-p, -(1-p)^2)$





2) $J = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-p & 1 \\ -2x_1 & -1 \end{vmatrix}$

$J_A = \begin{vmatrix} 1-p & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}$ $\quad \lambda_1 = 1-p \quad \lambda_2 = -1$

$0 < p < 1$ A sella (INST)

$p > 1$ A loc. A.S.

$J_B = \begin{vmatrix} 1-p & 1 \\ -2(1-p) & -1 \end{vmatrix}$ $\quad$ tr $= -p < 0$

det $= -1 + p + 2 - 2p = 1-p$

$0 < p < 1$ B loc. A.S.

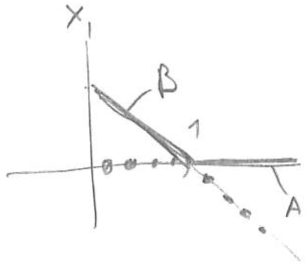
$p > 1$ B sella (INST)

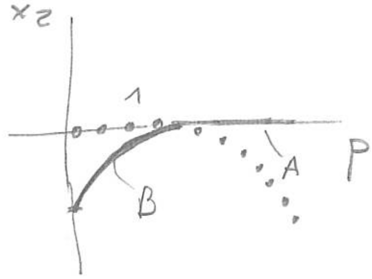
$\Rightarrow \forall p \; \exists! \; \bar{x}$ loc. A.S.

$0 < p < 1$ è B

$p > 1$ è A

$p = 1$ biforcazione transcritica





3) $p = 3$

$$\dot{x}_1 = -2x_1 + x_2$$
$$\dot{x}_2 = -x_2 - x_1^2$$

$A = (0,0)$ loc A.S. $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = -1$

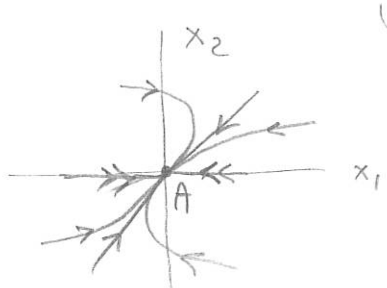
$$J_A = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}$$

$J_A w = \lambda w$ $\quad \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} w_1 \\ w_2 \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} w_1 \\ w_2 \end{vmatrix}$

$\lambda_1 = -2 \rightarrow w_2 = 0$

$\lambda_2 = -1 \rightarrow w_2 = w_1$

$\hookrightarrow \lambda_D$



$B = (-2, -4)$

$$J_B = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 4 & -1 \end{vmatrix}$$

$tr = -3$

$det = 2 - 4 = -2$

B è una sella

$\lambda^2 + 3\lambda - 2 = 0 \qquad \lambda_{1,2} = \dfrac{-3 \pm \sqrt{9+8}}{2} = \dfrac{-3 \pm \sqrt{17}}{2}$

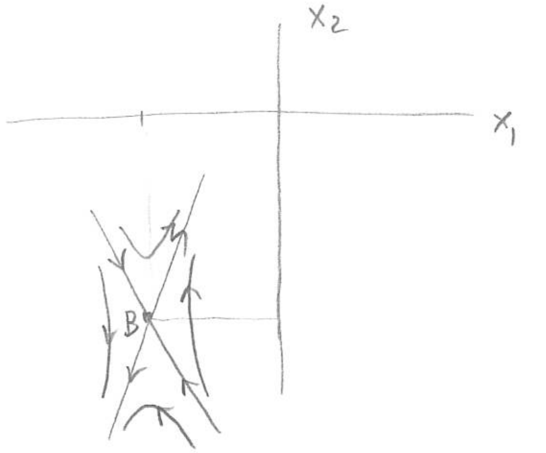
$J_B w = \lambda w$ $\quad \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} w_1 \\ w_2 \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} w_1 \\ w_2 \end{vmatrix}$

$-2w_1 + w_2 = \lambda w_1$

$w_2 = (\lambda + 2) w_1$

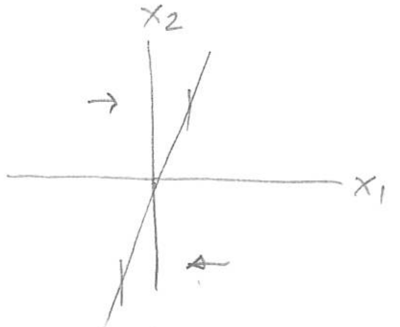
$\lambda_1 = \dfrac{-3+\sqrt{17}}{2} > 0 \qquad w_2 = \dfrac{1+\sqrt{17}}{2} w_1$

$\lambda_2 = \dfrac{-3-\sqrt{17}}{2} \qquad w_2 = \dfrac{1-\sqrt{17}}{2} w_1$

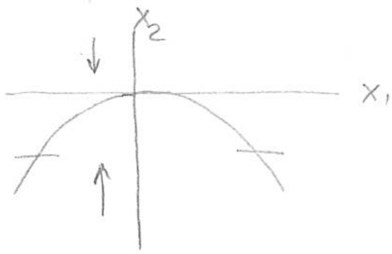


4) $\operatorname{div} f = 1 - p - 1 = -p$ non cambia segno $(p > 0) \Rightarrow \nexists$ cicli

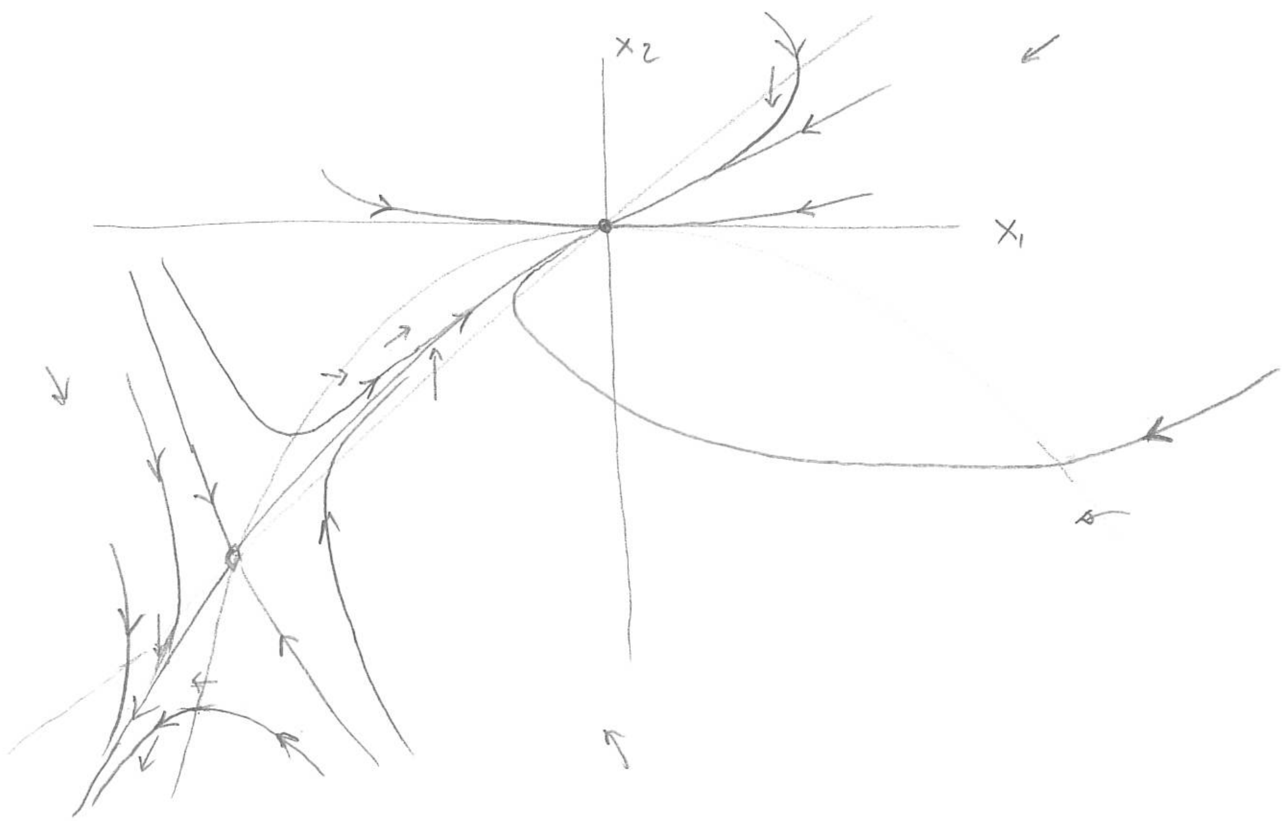
5) $p = 3$



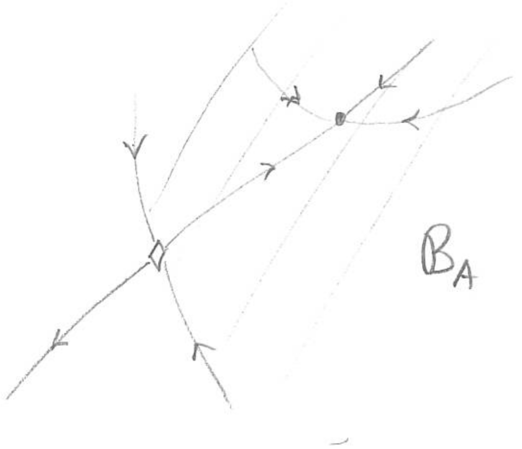
$\dot{x}_1 = 0 \quad x_2 = 2x_1$



$\dot{x}_2 = 0 \quad x_2 = -x_1^2$



6)



7) $\exists$ solo biforcazione transcritica in $p=1$
Sono escluse biforcazioni di cicli (Hopf, tangente, omoclina)
perché per $p>0$ $\nexists$ cicli
$\Rightarrow$ l'analisi è completa