18/7/19

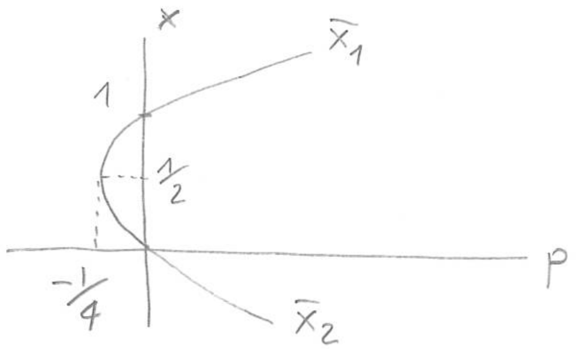
Si consideri il sistema del I ordine

$$\dot{x} = x - x^2 + p$$

dove p è un parametro costante e reale.
Si traccino nel piano (p, x) gli stati di equilibrio e si mostri quali sono stabili e quali instabili.
Infine, si dica se c'è una biforcazione rispetto a p e di che tipo di biforcazione si tratta. Per quale valore di p si verifica?

Equilibri

$\dot{x} = 0 \rightarrow p = x^2 - x$



$\bar{x}_1 > \frac{1}{2}$

$\bar{x}_2 < \frac{1}{2}$

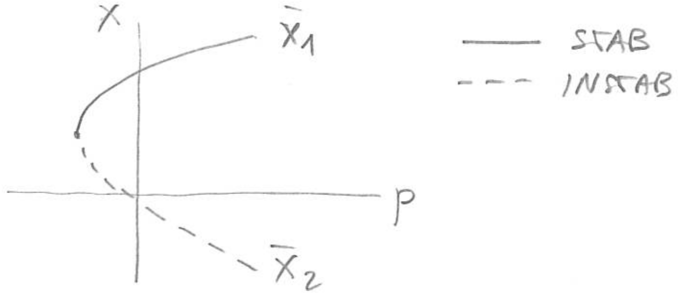
$\bar{x}_1 = \bar{x}_2 = \frac{1}{2}$ in: $\bar{p} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}$

Stabilità

$J = 1 - 2x \rightarrow J_{\bar{x}_1} = 1 - 2\bar{x}_1 < 0 \rightarrow \bar{x}_1$ è loc. A.S.
$(\bar{x}_1 > \frac{1}{2})$

$\rightarrow J_{\bar{x}_2} = 1 - 2\bar{x}_2 > 0 \rightarrow \bar{x}_2$ è INST
$(\bar{x}_2 < \frac{1}{2})$

Pertanto



$\bar{p} = -\frac{1}{4} \rightsquigarrow$ biforcazione nodo/sella o tangente di equilibri
($\bar{x}_1$ e $\bar{x}_2$ collidono in $\bar{p}$ e scompaiono)

9/2/16

Si consideri la famiglia di sistemi

$$\dot{x} = x - x^3 - p \qquad (p \in \mathbb{R})$$

1) Tracciare nel piano (p, x) gli stati di equilibrio del sistema, rappresentandoli con linee continue se stabili e con linee a tratti se instabili.

2) Dire se ci sono biforcazioni rispetto a p e, in caso affermativo, determinare i valori del parametro di biforcazione. Dire di che tipo di biforcazione si tratta.

3) Dire se esistono cicli

4) Dire se esiste un'isteresi

Si supponga infine che il parametro p non sia fissato ma segua una dinamica del tipo

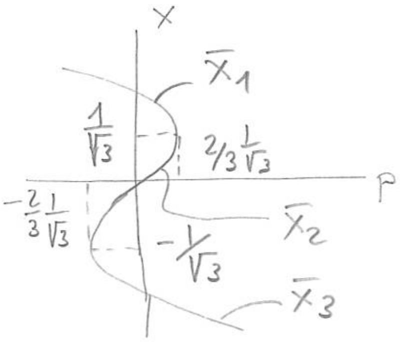
$$\dot{p} = \varepsilon g(x,p)$$

con $\varepsilon > 0$ e molto piccolo.

5) Si dica se è possibile che il sistema del II ordine così costruito abbia un ciclo e, in caso affermativo, si proponga una funzione g per cui il funzionamento asintotico del sistema sia periodico.

---

1) $\dot{x} = 0 \to p = -x^3 + x$



$-3x^2 + 1 = 0 \to x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$

per $p = -\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{2}{3}\frac{1}{\sqrt{3}}$ $\qquad p = \frac{1}{3}\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{2}{3}\frac{1}{\sqrt{3}}$

$\bar{x}_1 > \frac{1}{\sqrt{3}}$ per $p < \frac{2}{3}\frac{1}{\sqrt{3}}$

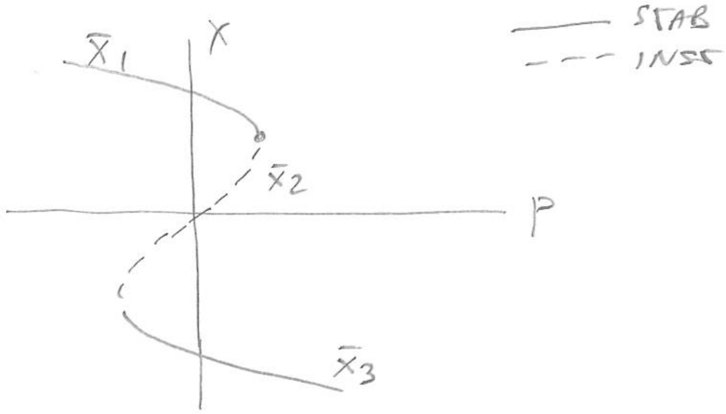
$-\frac{1}{\sqrt{3}} < \bar{x}_2 < \frac{1}{\sqrt{3}}$ per $-\frac{2}{3}\frac{1}{\sqrt{3}} < p < \frac{2}{3}\frac{1}{\sqrt{3}}$

$\bar{x}_3 < -\frac{1}{\sqrt{3}}$ per $p > -\frac{2}{3}\frac{1}{\sqrt{3}}$

$J = \frac{\partial f}{\partial x} = 1 - 3x^2$

$J\big|_{\bar{x}_1} = \underset{\substack{\downarrow \\ \bar{x}_1 > \frac{1}{\sqrt{3}}}}{1 - 3\bar{x}_1^2 < 0} \rightarrow \bar{x}_1$ loc A.S. Analogamente $\bar{x}_3$ loc. A.S.

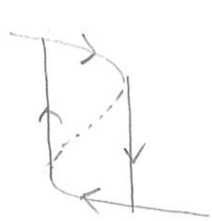
$J\big|_{\bar{x}_2} = \underset{\substack{\downarrow \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} < \bar{x}_2 < \frac{1}{\sqrt{3}}}}{1 - 3\bar{x}_2 > 0} \rightarrow \bar{x}_2$ è INST



2) nodo sella : collisione $\bar{x}_1, \bar{x}_2 \rightarrow p = \frac{2}{3}\frac{1}{\sqrt{3}}$
nodo sella : collisione $\bar{x}_2, \bar{x}_3 \rightarrow p = -\frac{2}{3}\frac{1}{\sqrt{3}}$

3) $n = 1$, tempo continuo $\Rightarrow \nexists$ cicli

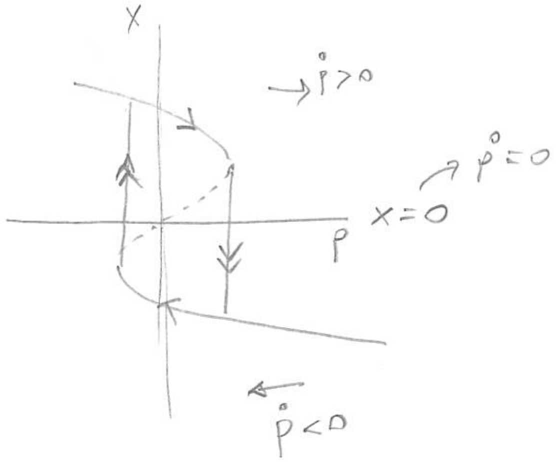
4) $\exists$ isteresi rispetto a p se p "supera" i valori di biforcazione nodo-sella



5) Può esistere un ciclo (lento-veloce) purchè la linea $\dot{p}=0$ separi i due rami stabili degli equilibri

Esempio $\quad \dot{p} = \varepsilon x \quad (g = x) \quad$ con $\varepsilon > 0$

$\dot{p} = 0 \rightarrow x = 0$



CICLO DI ISTERESI

$\dot{p} > 0$ per $x > 0$
$\dot{p} < 0$ per $x < 0$

$\rightarrow$ transizioni lente
$\twoheadrightarrow$ transizioni veloci

Principio di separazione

Se la varietà $\dot{p} = 0 \rightarrow g(x,p) = 0$ del "sistema lento" separa due "rami" di attrattori del "sistema veloce" $\dot{x} = f(x,p) \Rightarrow$ può nascere un ciclo lento-veloce.

7/9/16

Si dimostri che per il sistema

$$\mathring{x}_1 = -x_1 + x_1^3 + x_1 x_2^2 - x_2$$
$$\mathring{x}_2 = -x_2 + x_1$$

l'origine è un equilibrio localmente asintoticamente stabile.
Si determini una sottoregione del bacino di attrazione

$x_1 = 0$, $x_2 = 0$ $\longrightarrow$ $\mathring{x}_1 = 0$, $\mathring{x}_2 = 0$ $\rightarrow$ $\bar{x} = (0,0)$ è equilibrio

$$V(x_1, x_2) = \frac{1}{2} x_1^2 + \frac{1}{2} x_2^2 \; (*)$$

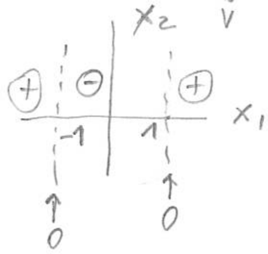
(1) V è definita positiva in $\bar{x}$
(2) V è continua con le derivate

$\longmapsto$ linee di livello $V = k$ chiuse e limitate

$$\mathring{V} = \frac{\partial V}{\partial x_1}\mathring{x}_1 + \frac{\partial V}{\partial x_2}\mathring{x}_2 = \frac{1}{2} 2x_1\left(-x_1 + x_1^3 + x_1 x_2^2 - x_2\right) + \frac{1}{2} 2x_2\left(-x_2 + x_1\right) =$$

$$= -x_1^2 + x_1^4 + x_1^2 x_2^2 - \cancel{x_1 x_2} - x_2^2 + \cancel{x_1 x_2} =$$

$$= x_1^2\left(x_1^2 + x_2^2\right) - \left(x_1^2 + x_2^2\right) = -\underbrace{\left(x_1^2 + x_2^2\right)}_{+}\left(1 - x_1^2\right)$$



(3) $\mathring{V}$ definita negativa in $\bar{x}$ (x_1 piccoli)

Metodo di Liapunov: (1)–(3) $\Rightarrow$ $\bar{x}$ è loc. as. stab.

Le condizioni (1)–(3) sono valide nella regione chiusa e limitata $\Omega = \{(x_1, x_2) / \; x_1^2 + x_2^2 = 1 - \varepsilon, \; \varepsilon > 0\}$

$\Rightarrow$ per La Salle $\Omega \subset \mathcal{B}_{\bar{x}}$

(*) le linee di livello $V = k$ sono ordinate

Dato il sistema

$$\dot{x}_1 = x_1(x_1^2 - x_2^2 - 1)$$

$$\dot{x}_2 = x_2(x_2^2 + 3x_1^2 - 1)$$

si dimostri, per mezzo della funzione di Liapunov $V(x_1, x_2) = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2$, che l'origine dello spazio di stato è un equilibrio asintoticamente stabile; si determini una sottoregione del suo bacino di attrazione. Infine, utilizzando la stessa funzione di Liapunov, si dica perché l'origine non è globalmente stabile.

$\left.\begin{array}{l} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{array}\right. \mapsto \begin{array}{l} \dot{x}_1 = 0 \\ \dot{x}_2 = 0 \end{array} \rightarrow$ l'origine è equilibrio

(*) le linee di livello di V sono ordinate

(1) V è definita positiva in $\bar{x} = (0,0)$ $\Big|\!\rightarrow$ linee di livello chiuse e limitate

(2) V è continua con le derivate

$$\dot{V} = \frac{\partial V}{\partial x_1}\dot{x}_1 + \frac{\partial V}{\partial x_2}\cdot\dot{x}_2 = \cancel{\tfrac{1}{2}}\cancel{2}x_1^2(x_1^2 - x_2^2 - 1) + \cancel{\tfrac{1}{2}}\cancel{2}x_2^2(x_2^2 + 3x_1^2 - 1) =$$

$$= x_1^4 - x_1^2x_2^2 - x_1^2 + x_2^4 + 3x_1^2x_2^2 - x_2^2 =$$

$$= x_1^4 + 2x_1^2x_2^2 + x_2^4 - (x_1^2 + x_2^2) =$$

$$= (x_1^2 + x_2^2)^2 - (x_1^2 + x_2^2) = (x_1^2 + x_2^2)(x_1^2 + x_2^2 - 1)$$

(3) $\dot{V}$ è definita negativa in $I_{\bar{x}}$ $\left((x_1, x_2) \text{ piccoli} \Rightarrow x_1^2 + x_2^2 - 1 < 0\right)$

Metodo di Liapunov: (1)-(3) $\Rightarrow \bar{x}$ è localmente asint. stabile

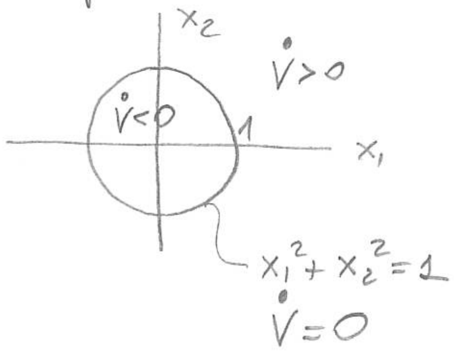
Le condizioni (1)-(3) sono valide nella regione chiusa e limitata $\Omega_{1-\varepsilon} = \{(x_1, x_2) / x_1^2 + x_2^2 = 1-\varepsilon,\ \varepsilon > 0\}$

$\Rightarrow$ per La Salle $\Omega_{1-\varepsilon} \subset B_{\bar{x}}$

$\downarrow$

vale anche la (*)

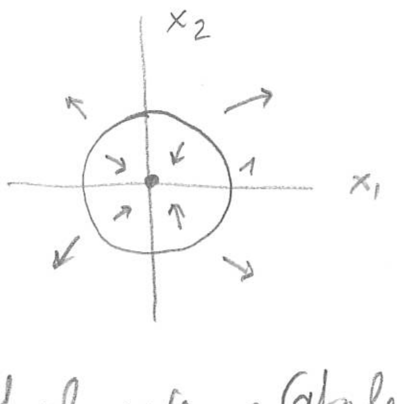
Verifichiamo ora che $\bar{x}$ non è globalmente stabile utilizzando la V proposta



$\Rightarrow$ Il luogo dei punti $x_1^2 + x_2^2 = 1$ è una particolare linea di livello di V ($V = k$ con $k = \frac{1}{2}$) sulla quale $\dot V = 0 \Longrightarrow$ V resta costante e pari a $\frac{1}{2}$

Tale linea è pertanto traiettoria per il sistema.

Non potendo essere attraversata si ha



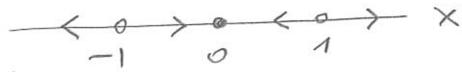
$\Rightarrow \bar{x}$ non è globalmente stabile

Senza utilizzare V (ma, attenzione, qui andava fatto così perché richiesto dal testo) si poteva arrivare allo stesso risultato anche in altro modo, per esempio, mediante lo studio delle isocline e il quadro delle traiettorie.

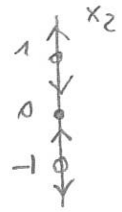
NOTA Gli assi sono traiettorie

$x_1(0) \neq 0$
$x_2(0) = 0 \rightarrow \dot{x}_2(0) = 0$

Se parto sull'asse x_1 resto sull'asse x_1
La dinamica su x_1 è $\dot{x}_1 = x_1(x_1^2 - 1)$

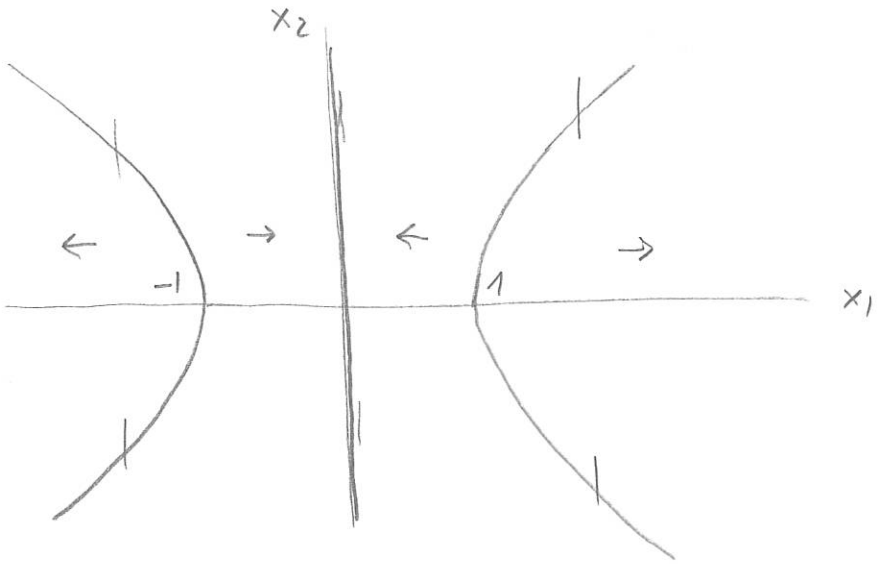


Analogamente, l'asse x_2 è traiettoria.
La dinamica su x_2 è $\dot{x}_2 = x_2(x^2 - 1)$



→ Isocline e quadro delle traiettorie

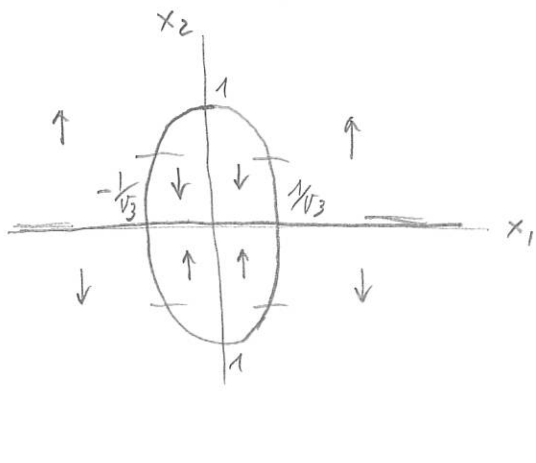
$$\dot{x}_1 = x_1(x_1^2 - x_2^2 - 1) = 0 \quad \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = \sqrt{x_1^2 - 1} \\ x_2 = -\sqrt{x_1^2 - 1} \end{cases}$$



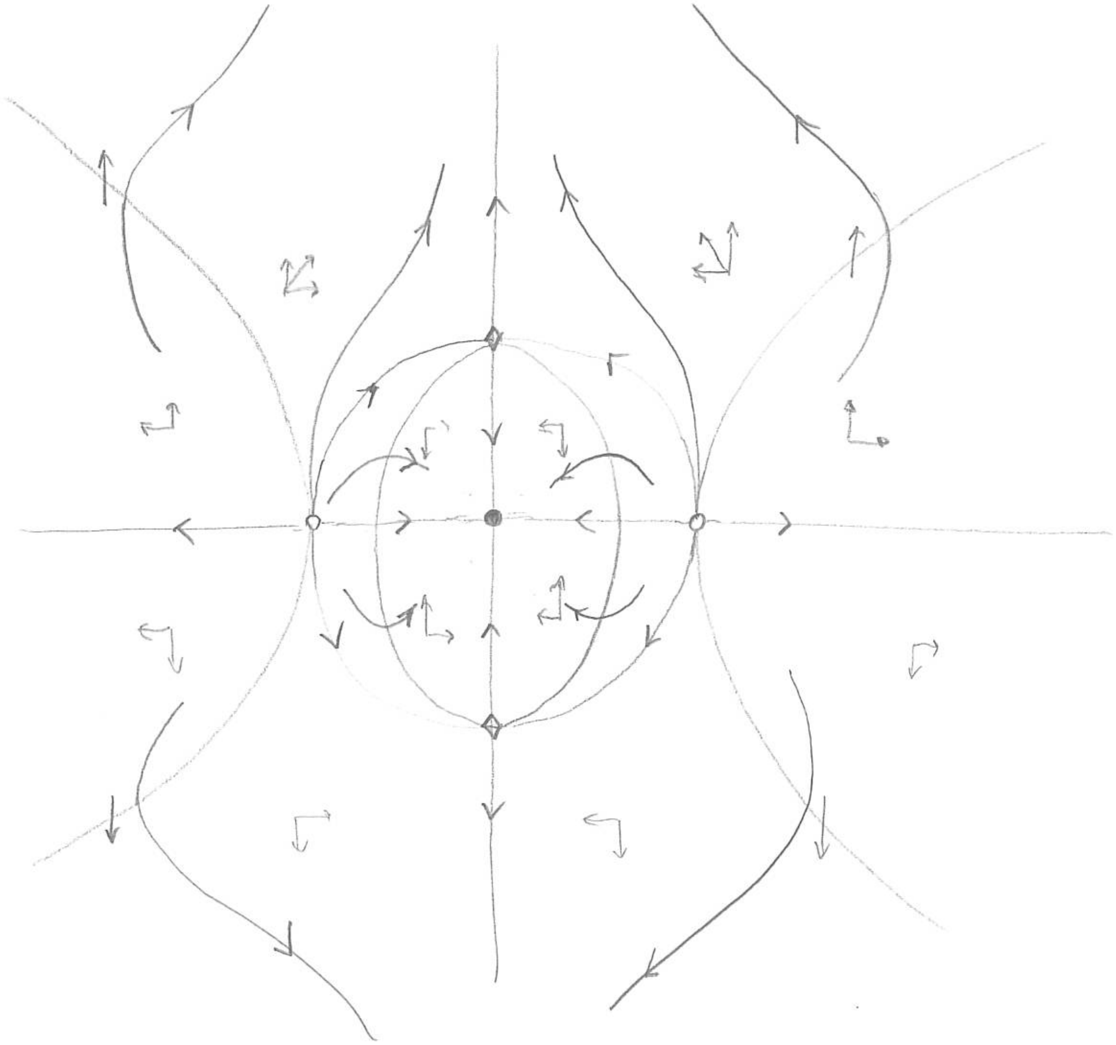
$\dot{x}_1 = 0$

$$\dot{x}_2 = x_2(3x_1^2 + x_2^2 - 1) = 0$$

$x_2 = 0$ $\qquad$ $3x_1^2 + x_2^2 = 1$



$\dot{x}_2 = 0$



$\Rightarrow \bar{x} = (0,0)$ non è globalmente stabile

25/11/16

Si consideri il sistema del II ordine

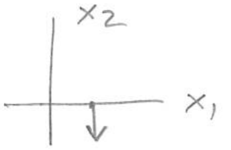
$$\dot{x}_1 = -x_1 + x_2$$

$$\dot{x}_2 = -2x_2 - x_1^2$$

1) Dire se il sistema è positivo
2) Determinare gli equilibri del sistema
3) Discutere la stabilità degli equilibri
4) Tracciare le traiettorie nell'intorno degli equilibri
5) Dire se il sistema può avere cicli
6) Disegnare un possibile quadro delle traiettorie
7) Evidenziare graficamente il bacino di attrazione degli equilibri stabili

---

1) $\begin{matrix} x_1(0) \geq 0 \\ x_2(0) = 0 \end{matrix} \rightarrow \dot{x}_2(0) = -x_1^2(0) \leq 0$



Il sistema non è positivo

2) $\begin{matrix} \dot{x}_1 = 0 \\ \dot{x}_2 = 0 \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} x_1 = x_2 \\ 2x_2 + x_1^2 = 0 \rightarrow 2x_1 + x_1^2 = 0 \rightarrow x_1(2 + x_1) = 0 \end{matrix}$

$\Rightarrow \begin{matrix} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{matrix}$ e $\begin{matrix} x_1 = -2 \\ x_2 = -2 \end{matrix} \Rightarrow A = (0,0)$ e $B = (-2,-2)$

3) $$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -2x_1 & -2 \end{vmatrix}$$

$$J|_A = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} \qquad \begin{matrix} \lambda_1 = -1 \\ \lambda_2 = -2 \end{matrix} \rightarrow A \text{ è loc. A.S. (nodo stabile)}$$

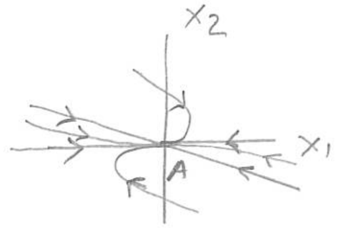
$$J|_B = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} \qquad \begin{matrix} tr = -3 \\ det = 2 - 4 = -2 \end{matrix} \rightarrow B \text{ è INST (sella)}$$

4) $J|_A w = \lambda w \qquad \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} w_1 \\ w_2 \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} w_1 \\ w_2 \end{vmatrix}$

$\lambda_1 = -1 \rightarrow w_2 = 0$

$\lambda_2 = -2 \rightarrow -w_1 + 2w_2 = -2w_1$

$w_2 = -\frac{1}{2} w_1$



Per l'equilibrio B:

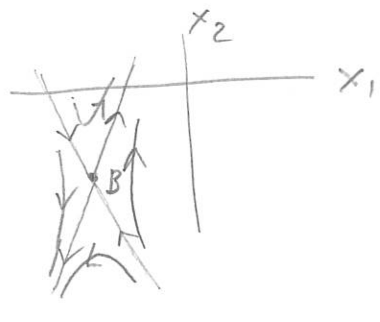
$\lambda^2 + 3\lambda - 2 = 0 \qquad \lambda_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9+8}}{2} = \frac{-3 \pm \sqrt{17}}{2}$

$J|_B w = \lambda w \qquad \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} w_1 \\ w_2 \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} w_1 \\ w_2 \end{vmatrix} \rightarrow -w_1 + w_2 = \lambda w_1$

$w_2 = (\lambda + 1) w_1$

$\lambda_1 = \frac{-3+\sqrt{17}}{2} \rightarrow w_2 = \frac{-1+\sqrt{17}}{2} w_1$

$\lambda_1 = \frac{-3-\sqrt{17}}{2} \rightarrow w_2 = \frac{-1-\sqrt{17}}{2} w_1$

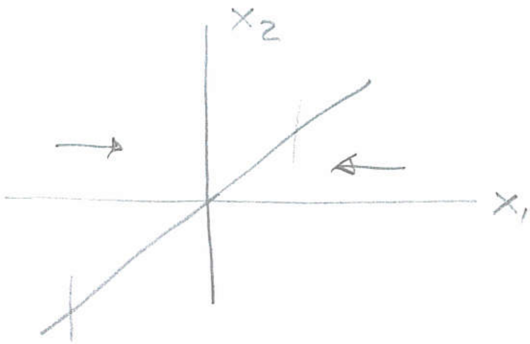


5) $\text{div} f = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} = -1 - 2 = -3$

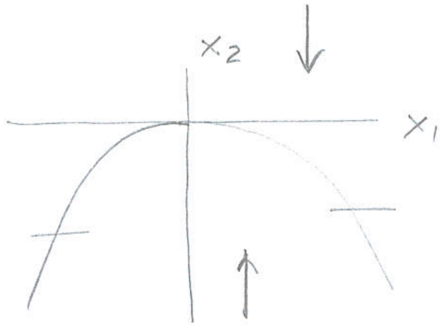
non cambia segno in $\mathbb{R}^2 \Rightarrow \nexists$ cicli in $\mathbb{R}^2$

6)

$\overset{\circ}{x}_1 = 0 \quad x_2 = x_1$



$\overset{\circ}{x}_2 = 0 \quad x_2 = -\frac{1}{2} x_1^{\,2}$



7)

9/9/19

Dato il sistema del II ordine

$$\dot{x}_1 = -2x_1 - x_2$$

$$\dot{x}_2 = -x_1^2 + x_2$$

1) Verificare che l'origine è un equilibrio di tipo sella. Se ne calcolino le varietà stabile e instabile e si disegni il quadro delle traiettorie in piccolo nell'intorno di tale equilibrio

2) Verificare che esiste un altro stato di equilibrio. Si disegni il quadro delle traiettorie in piccolo nell'intorno di tale equilibrio

3) Si dimostri che non esistono cicli nello spazio di stato.

4) Si verifichi che le isocline sono una retta e una parabola. Le si disegni nello spazio di stato.

5) Si disegni un quadro plausibile delle traiettorie

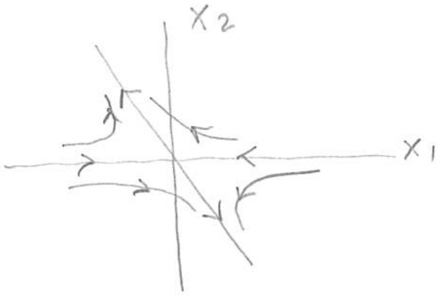
---

1) $\begin{matrix} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} \dot{x}_1 = 0 \\ \dot{x}_2 = 0 \end{matrix} \rightarrow (0,0)$ è un equilibrio

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -2x_1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$J_{(0,0)} = \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \qquad \begin{matrix} \lambda_1 = -2 \\ \lambda_2 = 1 \end{matrix} \rightarrow \text{INST} \rightarrow \text{SELLA}$$

$$Jw = \lambda w \rightarrow \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} w_1 \\ w_2 \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} w_1 \\ w_2 \end{vmatrix} \rightarrow \begin{matrix} \lambda_1 = -2 \rightarrow w_2 = 0 \\ \lambda_2 = 1 \rightarrow w_2 = -3w_1 \end{matrix}$$



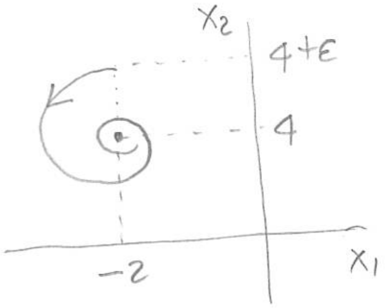
2) $\dot{x}_1=0$ $\quad\longrightarrow\quad$ $x_2=-2x_1$

$\dot{x}_2=0$ $\quad\quad\quad$ $+x_1^2+2x_1=0 \longrightarrow x_1(x_1+2)=0$ $\quad$ $x_1=0 \quad x_2=0$; $\quad$ $x_1=-2 \quad x_2=4$

$\Rightarrow \exists\, \bar{x}=(-2,4)$

$$J_{\bar{x}} = \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} \qquad \begin{array}{l} tr=-1<0 \\ det=2>0 \end{array} \longrightarrow \text{loc. A.S.}$$

$$\lambda^2+\lambda+2=0 \longrightarrow \lambda_{1,2}=\frac{-1\pm i\sqrt{7}}{2}$$ fuoco stabile



$x_1(0)=-2$

$x_2(0)=4+\varepsilon \quad (\varepsilon>0)$

$\dot{x}_1(0)=-2x_1(0)-x_2(0)=-\varepsilon<0$

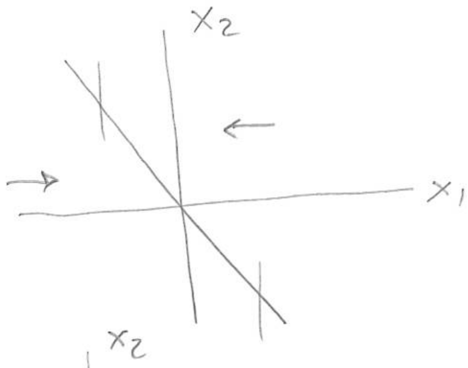
verso antiorario

3) $\operatorname{div} f=\dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}+\dfrac{\partial f_2}{\partial x_2}=-1$ $\quad$ Non cambia segno in $\mathbb{R}^2$

$\Rightarrow \nexists$ cicli in $\mathbb{R}^2$

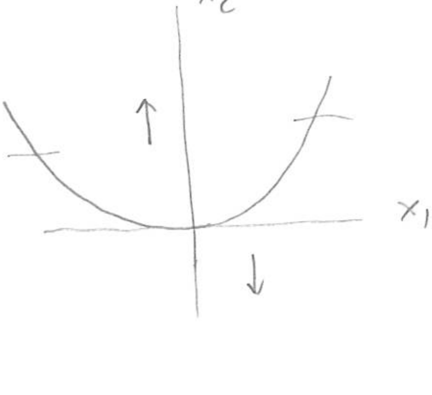
4) $\dot{x}_1=0$ $\quad$ $x_2=-2x_1$

RETTA

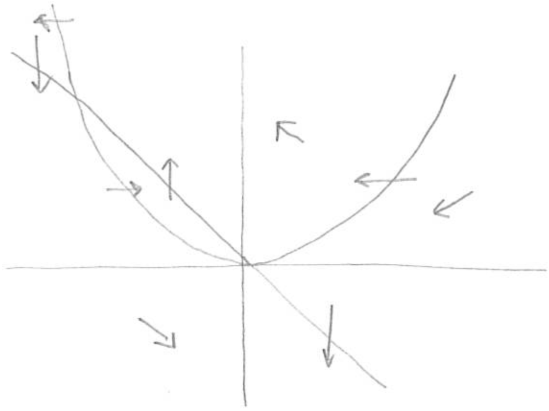


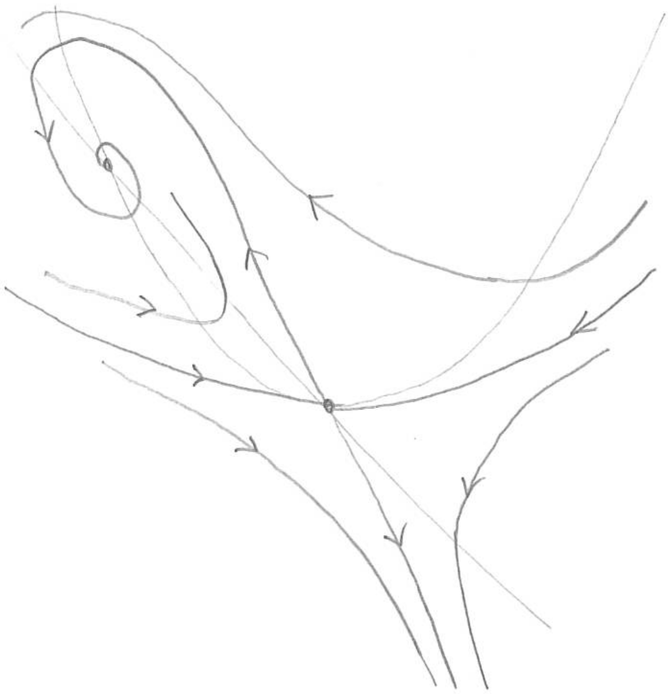
$\dot{x}_2=0$ $\quad$ $x_2=x_1^2$

PARABOLA



5)





7/9/16

Si consideri la famiglia di sistemi

$$\dot{x}_1 = -x_1 + x_2 + p \qquad (p \in \mathbb{R})$$
$$\dot{x}_2 = x_1 - x_2 - x_1^2$$

1) Determinare tutti i possibili equilibri del sistema al variare di p.

2) Discutere la stabilità degli equilibri al variare di p

3) Dire se il sistema può avere cicli

Fissato ora $p = 1$

4) tracciare le traiettorie nell'intorno degli stati di equilibrio.

5) Disegnare un possibile quadro delle traiettorie

---

1) $\dot{x}_1 = 0 \quad \rightarrow \quad x_1 - x_2 = p \rightsquigarrow x_2 = x_1 - p$

$\dot{x}_2 = 0 \qquad p - x_1^2 = 0 \rightarrow x_1 = \pm\sqrt{p}$ con $p \geq 0$

$A = (\sqrt{p}, \sqrt{p} - p) \qquad B = (-\sqrt{p}, -\sqrt{p} - p)$

2) $$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1-2x_1 & -1 \end{vmatrix}$$

$J_A = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1-2\sqrt{p} & -1 \end{vmatrix}$ $\quad$ tr $= -2 < 0$, det $= 2\sqrt{p} > 0$ $\rightarrow$ A è loc. A.S.

$J_B = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1+2\sqrt{p} & -1 \end{vmatrix}$ $\quad$ tr $= -2 < 0$, det $= -2\sqrt{p} < 0 \rightarrow$ B è INST $\rightarrow$ sella

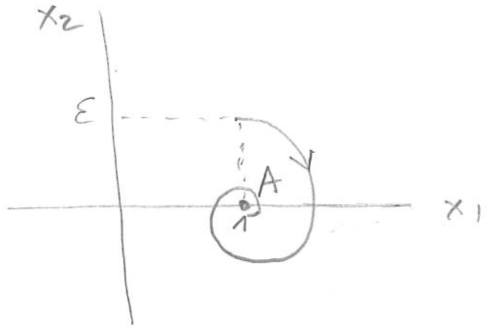
3) $\operatorname{div} f = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} = -2$ non cambia segno in $\mathbb{R}^2$
$\Rightarrow \nexists$ cicli in $\mathbb{R}^2$

4) $p=1$

$\dot{x}_1 = -x_1 + x_2 + 1$ $\quad A=(1,0)$ loc. A.S.

$\dot{x}_2 = x_1 - x_2 - x_1^2$ $\quad B=(-1,-2)$ INST $\to$ sella

$J_A = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}$ tr $=-2$, det $=2$ $\quad \lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0 \quad \lambda_{1,2} = -1 \pm i$ FUOCO STABILE



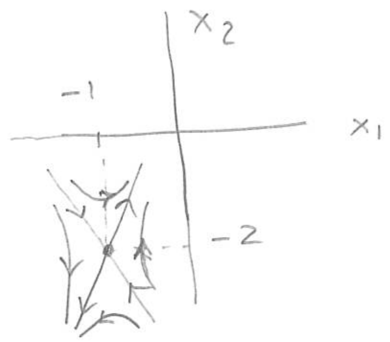
$x_1(0) = 1$
$x_2(0) = \varepsilon > 0$
$\dot{x}_1(0) = -x_1(0) + x_2(0) + 1 = \varepsilon > 0$
ORARIO

$J_B = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}$ tr $=-2$, det $=-2$ $\quad \lambda^2 + 2\lambda - 2 = 0 \quad \lambda_{1,2} = -1 \pm \sqrt{3}$

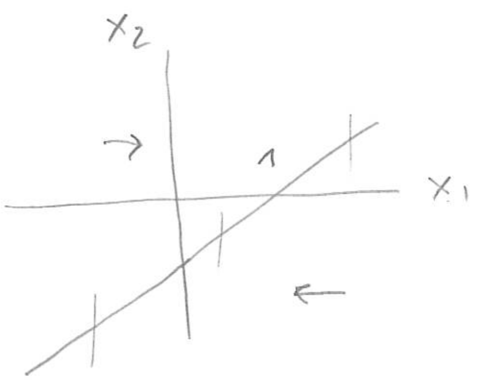
$J_B w = \lambda w \to \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} w_1 \\ w_2 \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} w_1 \\ w_2 \end{vmatrix} \to w_2 = (1+\lambda) w_1$

$\lambda_1 = -1 + \sqrt{3} \to w_2 = \sqrt{3}\, w_1$

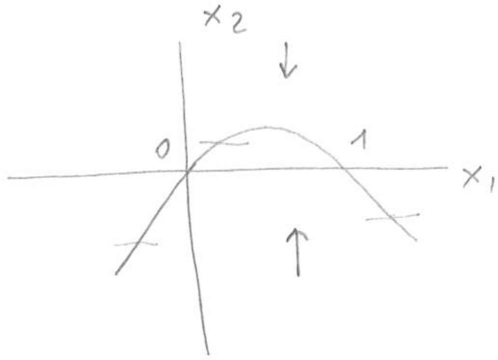
$\lambda_2 = -1 - \sqrt{3} \to w_2 = -\sqrt{3}\, w_1$

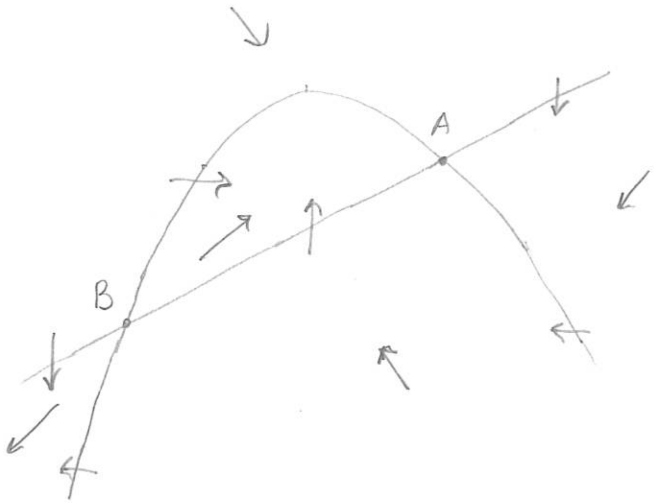


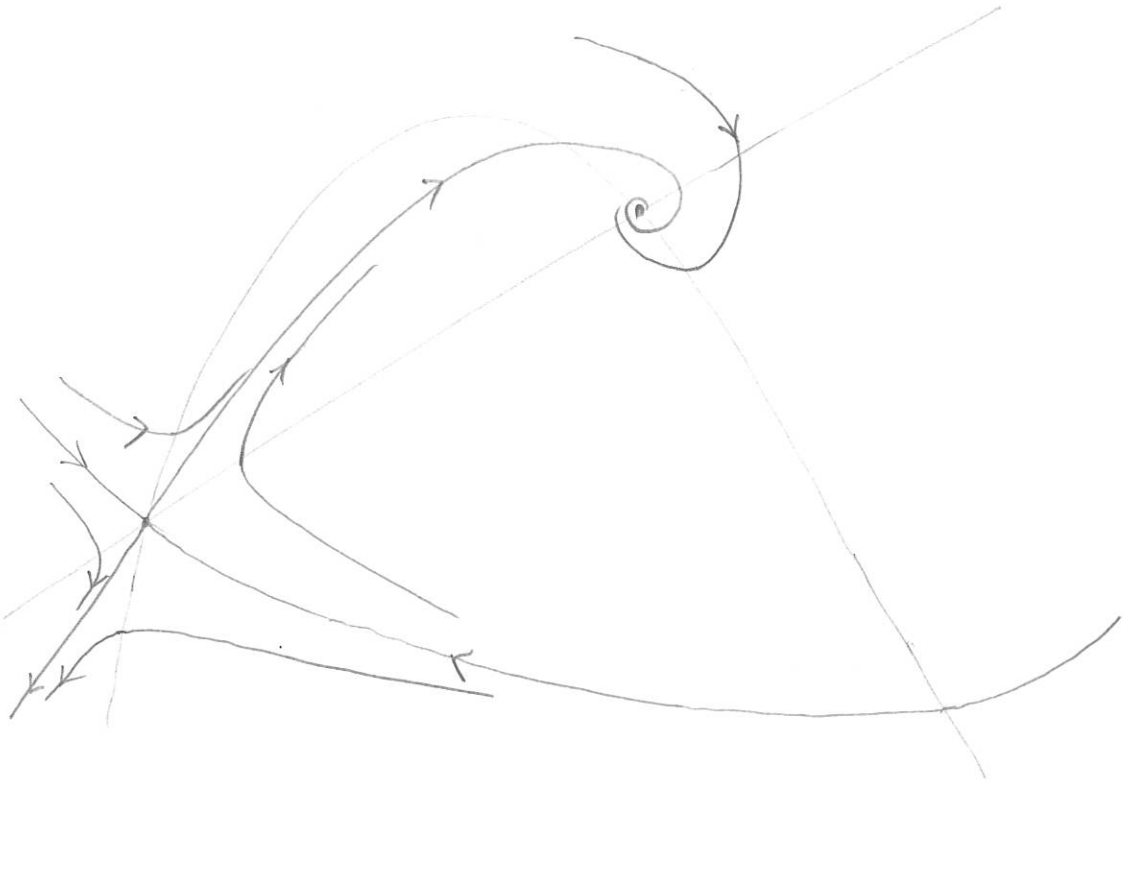
5) $\dot{x}_1 = 0 \to x_2 = x_1 - 1$



$\dot{x}_2 = 0 \rightarrow x_2 = x_1 - x_1^2$







Si consideri la famiglia di sistemi

$$\dot{x}_1 = x_1 - 2x_2 - x_1^2$$
$$\dot{x}_2 = x_1 - p x_2 \qquad p \geq 0$$

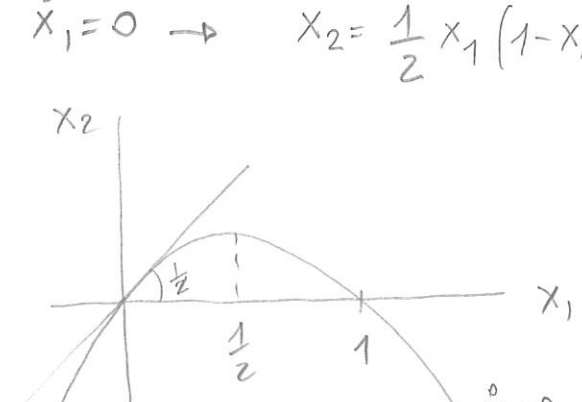
Sapendo che non ci può essere comportamento periodico per $p < 1$:

1) Si determinino gli stati di equilibrio del sistema al variare di p
2) Si studi la stabilità degli equilibri al variare di p
3) Si determinino le biforcazioni locali al variare di p. Per quali valori di p si verificano? Che biforcazioni sono?
4) Valutare se il sistema ammette cicli per qualche valore di p
5) Valutare se si possono avere biforcazioni globali
6) Disegnare equilibri e cicli del sistema nei piani (p, x_1) e (p, x_2) rappresentandoli con linee continue se stabili e con il tratteggio (repulsori) o i puntini (selle) se instabili

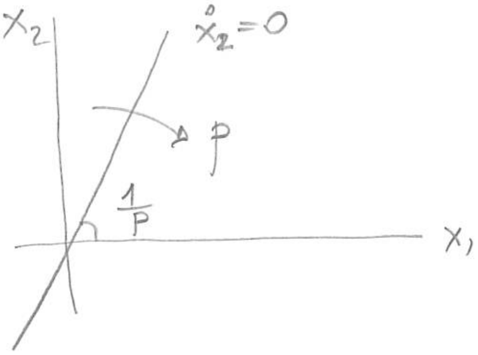
---

1) $\dot{x}_1 = 0 \rightarrow \quad x_2 = \frac{1}{2} x_1 (1 - x_1)$

$$\left.\frac{dx_2}{dx_1}\right|_{x_1=0} = \left.\frac{1}{2} - \frac{1}{2} 2x_1\right|_{x_1=0} = \frac{1}{2}$$



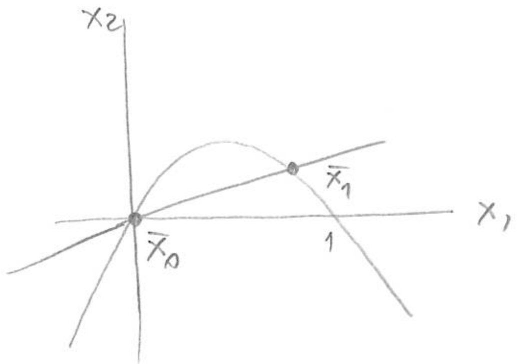
$\dot{x}_2=0 \rightarrow x_2=\frac{1}{p}x_1$



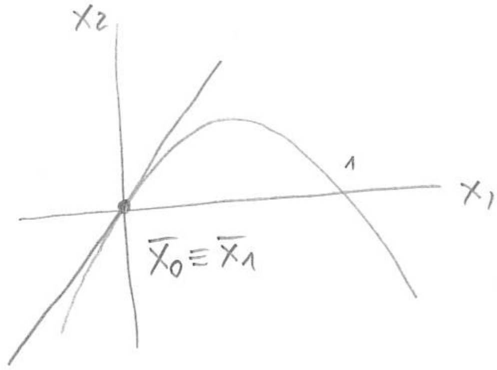
Pertanto

NOTA: Gli equilibri si trovano all'$\cap$ di $\dot{x}_1=0$ con $\dot{x}_2=0$

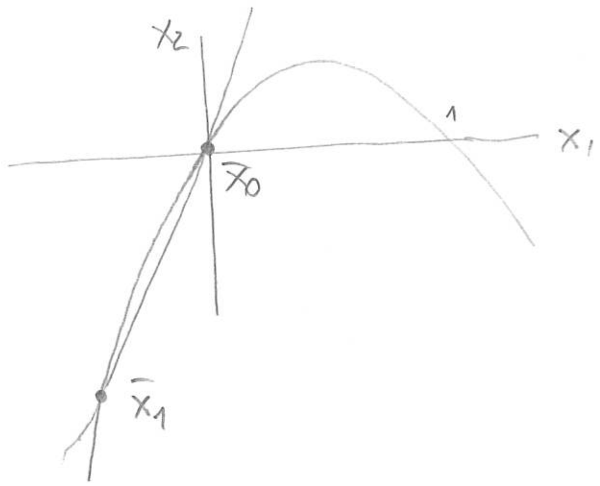
$\boxed{p>2}$



$\boxed{p=2}$



$\boxed{0 \le p < 2}$



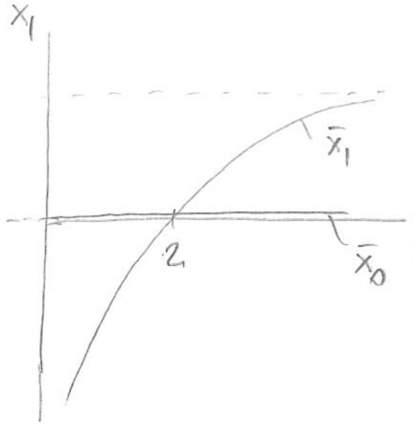
Analiticamente:

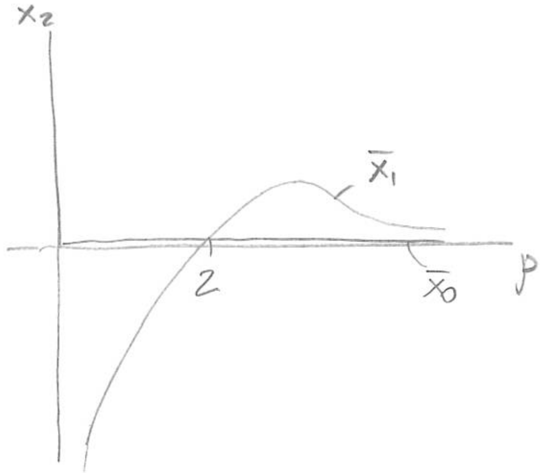
$\dot{x}_2=0 \rightarrow x_1=p x_2$

$\dot{x}_1=0 \rightarrow x_1-2x_2-x_1^2=0 \rightarrow p x_2-2x_2-p^2x_2^2=0$

$$x_2(p-2) - p^2 x_2^2 = 0$$

$$\bar{x}_0 \begin{cases} x_2 = 0 \\ x_1 = 0 \end{cases} \qquad \bar{x}_1 \begin{cases} x_2 = \dfrac{p-2}{p^2} \\ x_1 = \dfrac{p-2}{p} \end{cases} \quad p \neq 0$$

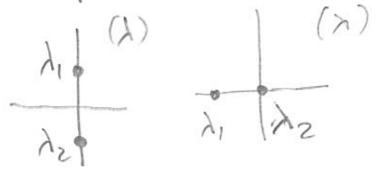




2) $$J = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-2x_1 & -2 \\ 1 & -p \end{vmatrix}$$

$$J_{\bar{x}_0} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -p \end{vmatrix} \qquad \begin{aligned} tr &= 1-p \\ det &= -p+2 \end{aligned}$$

p	<1	$1<p<2$	>2
tr	+	−	−
det	+	+	−
	REP.	ATTR.	SELLA (det<0)



HOPF TRANSCR o NODO/SELLA

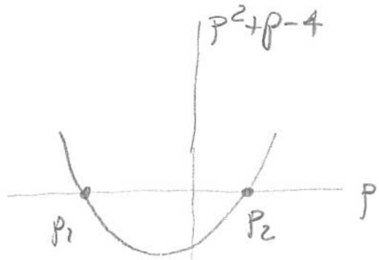
$\Rightarrow$ $0 \leq p < 1$ INSTAB (NODO/FUOCO)

$1 < p < 2$ LOC. A.S.

$p > 2$ INSTAB (SELLA)

$$J_{\bar{x}_1} = \begin{vmatrix} 1-2\dfrac{p-2}{p} & -2 \\ 1 & -p \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dfrac{p-2p+4}{p} & -2 \\ 1 & -p \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dfrac{4-p}{p} & -2 \\ 1 & -p \end{vmatrix}$$

$$tr = \frac{4-p}{p} - p = \frac{4-p-p^2}{p} = -\frac{p^2+p-4}{p}$$



$$tr = 0 \qquad p_{1,2} = \frac{-1\pm\sqrt{1+16}}{2} = \frac{-1\pm\sqrt{17}}{2}$$

$$det = -\cancel{p}\,\frac{4-p}{\cancel{p}} + 2 = -4+p+2 = p-2$$

p	0 … $\frac{-1+\sqrt{17}}{2}$	$\frac{-1+\sqrt{17}}{2}$ … 2	> 2
tr	+	−	−
det	−	−	+
	SELLA	SELLA	ATTR.

$\hookrightarrow$ det $= 0 \Rightarrow \lambda = 0$
TRANSCR. O NODO/SELLA

$\Rightarrow \quad 0 < p < 2 \qquad$ INST (SELLA)
$ p > 2 \qquad$ LOC. A.S. (NODO/FUOCO)

3) Dai diagrammi (p, x_1) e (p, x_2) si ha:

$p = 2$ biforcazione transcritica
$\bar{x}_0$ e $\bar{x}_1$ collidono scambiandosi la stabilità
ed esistono sia prima che dopo la biforcazione

Dal $J_{\bar{x}_0}$ si ha:

$p = 1$ biforcazione di Hopf
Dato che $\nexists$ cicli per $p < 1$, il ciclo $\exists$ per $p > 1$
ed è instabile poiché per $1 < p < 2$ l'equilibrio
$\bar{x}_0$ è loc. as. stab. $\Rightarrow$ Hopf subcritica

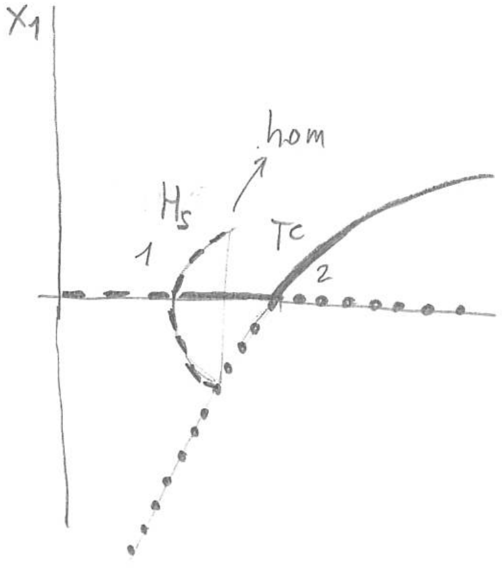
4) $\operatorname{div} f = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} = 1 - 2x_1 - p \qquad$ Può cambiare segno $\Rightarrow$ non posso dedurre niente. Tuttavia,

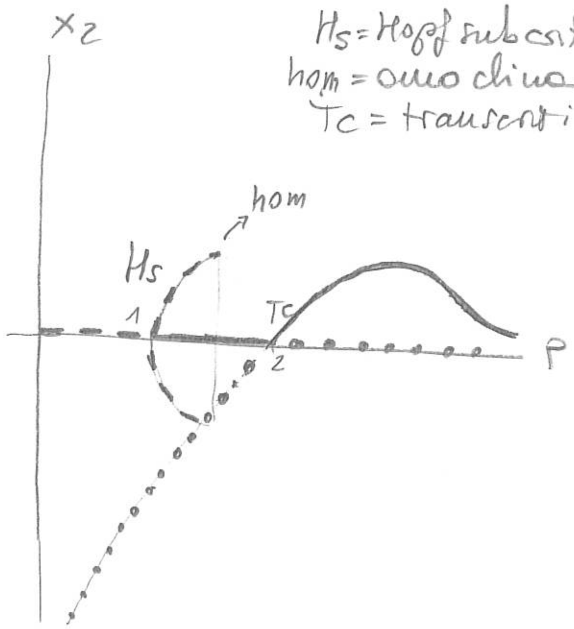
la Hopf subcritica in $p=1$ genera un ciclo instabile.

Se σ) La situazione potrebbe essere:

— ATTR
- - - REP
• • • SELLE

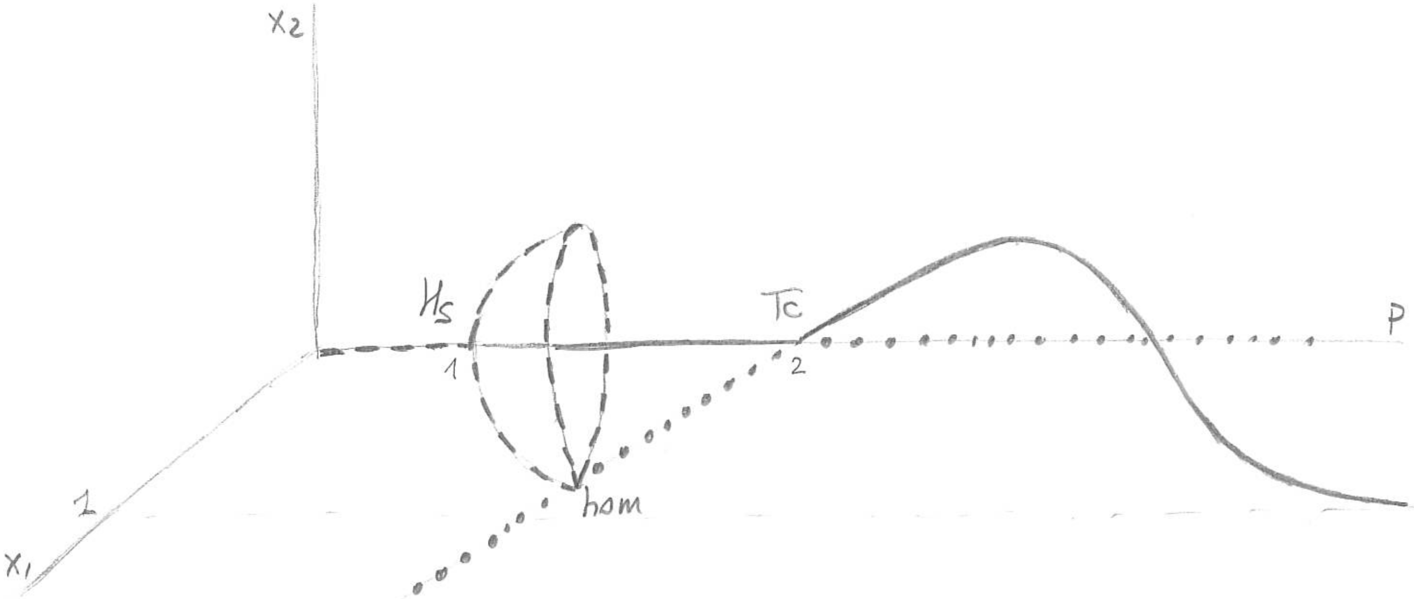
H_S = Hopf subcritica
hom = omoclina
T_C = transcritica





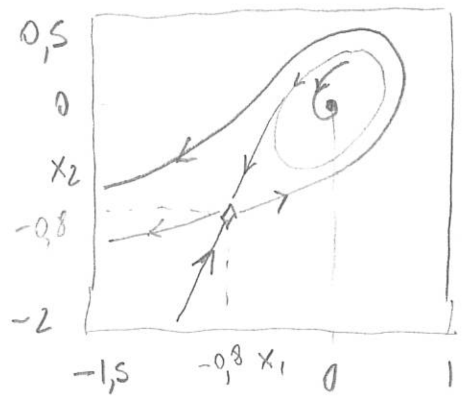
Si può pertanto supporre che vi sia una biforcazione globale di tipo omoclino (collisione ciclo - sella) per $1 < p < 2$

Nello spazio (p, x_1, x_2) si ha:



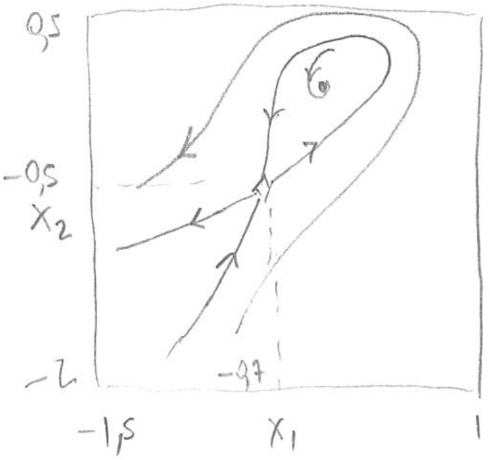
Vediamo qualche simulazione con pplane

$p = 1{,}1$



$p = 1{,}11$ il ciclo si avvicina alla sella

$p = 1{,}17601$

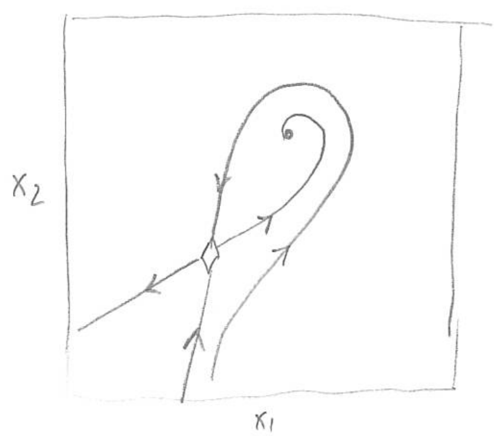


il ciclo tocca la sella

$(W_s \equiv W_u) \rightarrow$ ciclo omoclino (instabile)

homi

$p = 1{,}3$



superata la transcritica

$p = 2{,}5$