25/6/19

Si consideri il sistema del II ordine

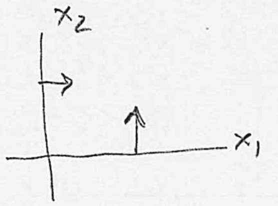
$$\dot{x}_1 = -x_1^3 + x_2$$

$$\dot{x}_2 = x_1 - x_2$$

1) Si dica se il sistema è positivo
2) Si determinino gli stati di equilibrio
3) Si studi la stabilità degli stati di equilibrio
4) Tracciare le traiettorie nell'intorno degli stati di equilibrio.
5) Si dica se esistono cicli.
6) Disegnare un possibile quadro delle traiettorie
7) Evidenziare graficamente il bacino di attrazione degli equilibri stabili

---

1) $\begin{matrix} x_1(0) \geq 0 \\ x_2(0) = 0 \end{matrix} \Big| \rightarrow \dot{x}_2(0) = x_1(0) \geq 0$



È positivo

$\begin{matrix} x_1(0) = 0 \\ x_2(0) \geq 0 \end{matrix} \Big| \rightarrow \dot{x}_1(0) = x_2(0) \geq 0$

2) $\begin{matrix} \dot{x}_1 = 0 \\ \dot{x}_2 = 0 \end{matrix} \Big| \rightarrow \begin{matrix} -x_1^3 + x_2 = 0 \\ x_2 = x_1 \end{matrix} \rightarrow x_1(1 - x_1^2) = 0 \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_1 = +1 \\ x_1 = -1 \end{cases}$

$A = (0, 0) \qquad B = (1, 1) \qquad C = (-1, -1)$

3) e 4)

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3x_1^2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$$

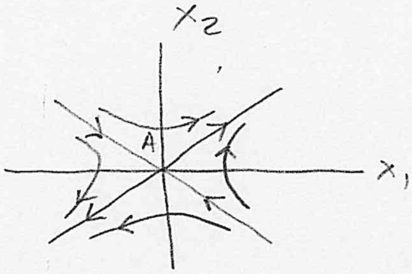
$$J_A = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \qquad \begin{array}{l} tr = -1 < 0 \\ det = -1 < 0 \rightarrow INST \rightarrow \text{sella} \end{array}$$

$$\lambda^2 + \lambda - 1 = 0 \qquad \lambda_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$J_A w = \lambda w \rightarrow \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} w_1 \\ w_2 \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} w_1 \\ w_2 \end{vmatrix} \qquad w_2 = \lambda w_1$$

$$\lambda_1 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \qquad w_2 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2} w_1$$

$$\lambda_2 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \qquad w_2 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} w_1$$



$$J_B = J_C = \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \qquad \begin{array}{l} tr = -4 < 0 \\ det = 2 > 0 \end{array} \rightarrow \text{loc. A.S.}$$

$$\lambda^2 + 4\lambda + 2 = 0 \qquad \lambda_{1,2} = -2 \pm \sqrt{2} \qquad \text{NODI STABILI}$$

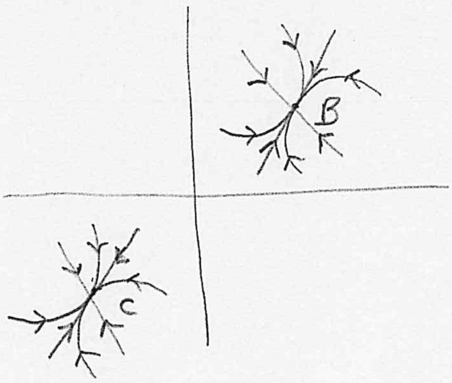
$$J_{B,C} w = \lambda w \rightarrow \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} w_1 \\ w_2 \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} w_1 \\ w_2 \end{vmatrix} \qquad \begin{array}{l} -3w_1 + w_2 = \lambda w_1 \\ w_2 = (\lambda + 3) w_1 \end{array}$$

$$\lambda_1 = -2-\sqrt{2} \qquad w_2 = (1-\sqrt{2}) w_1$$

$$\lambda_1 = -2+\sqrt{2} \qquad w_2 = (1+\sqrt{2}) w_1$$

$\downarrow$

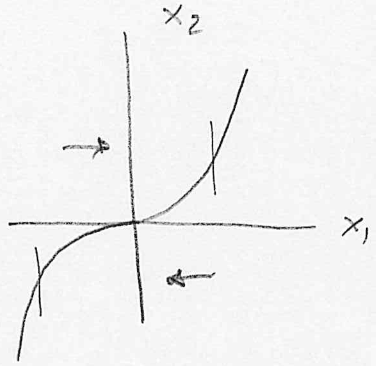
λ_D

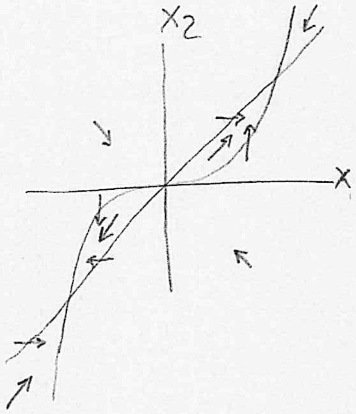


5) $\text{div} f = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} = -3x_1^2 - 1 < 0$

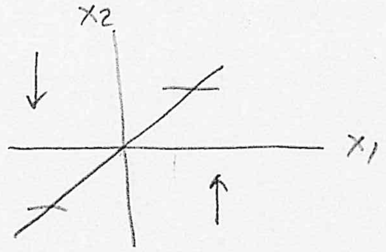
non cambia segno in $\mathbb{R}^2 \Rightarrow \nexists$ cicli in $\mathbb{R}^2$

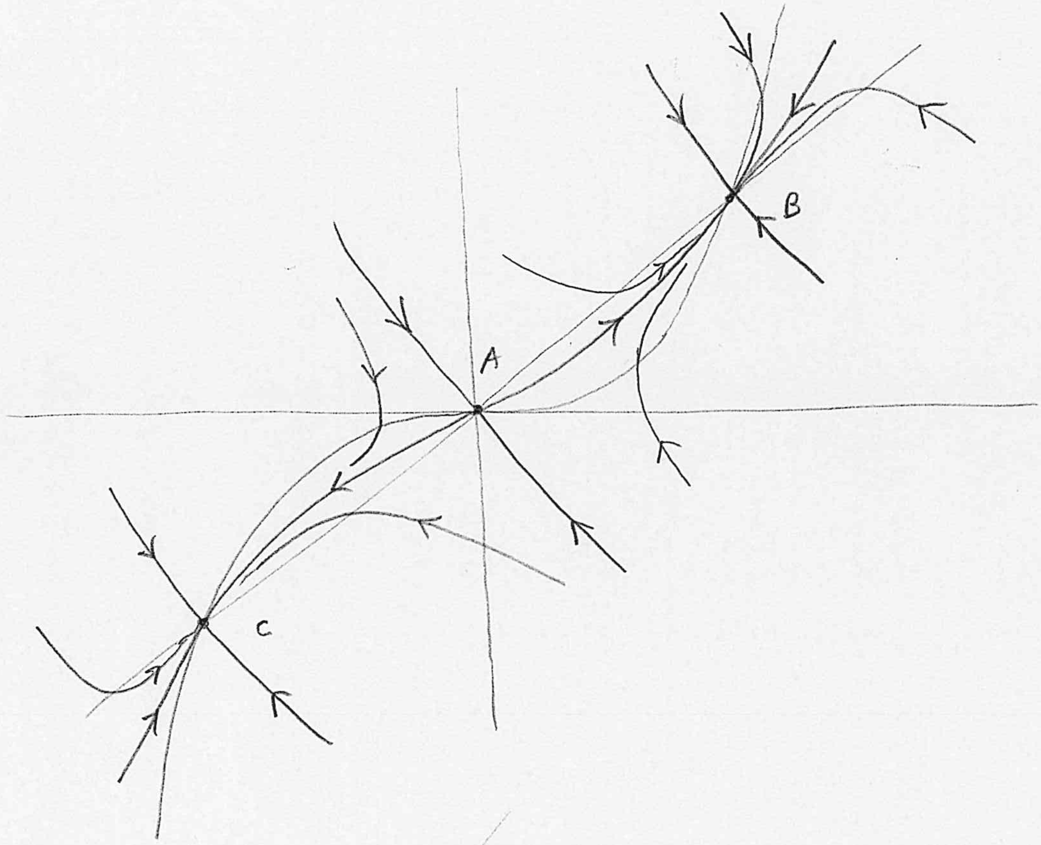
6) $\dot{x}_1 = 0 \rightarrow x_2 = x_1^3$



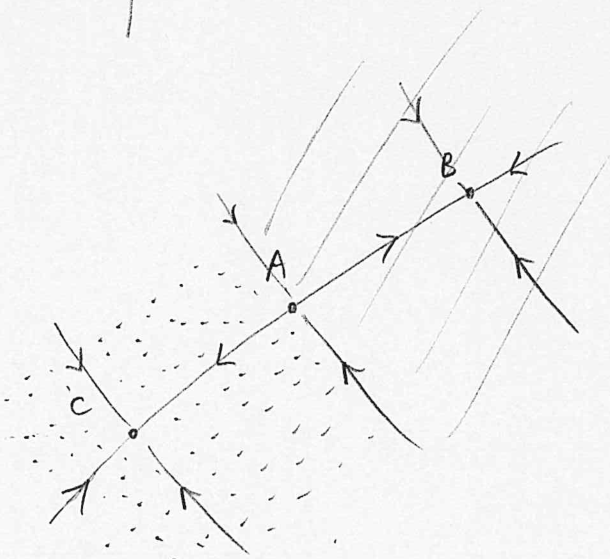


$\dot{x}_2 = 0 \rightarrow x_2 = x_1$





7)



:::: = $\mathcal{B}_C$

//// = $\mathcal{B}_B$

25/11/16

Sia data la famiglia di sistemi

$$\overset{\circ}{x} = x(x^2-2x-p+1) \qquad p \in \mathbb{R}$$

1) Determinare tutti gli equilibri al variare di p

2) Discutere la stabilità degli equilibri al variare di p

3) Tracciare nel piano (p,x) il luogo degli equilibri utilizzando il tratto continuo per gli equilibri asintoticamente stabili e quello a tratti per gli equilibri instabili

4) Dire se possono esistere cicli

5) Determinare i valori di p per i quali esiste un unico equilibrio globalmente stabile

6) Determinare le biforcazioni al variare di p

1) $\overset{\circ}{x} = 0$ $\begin{cases} \bar{x}_0 = 0 \\ x^2-2x-p+1 = 0 \rightsquigarrow p = x^2-2x+1 \end{cases}$

$$\downarrow$$

$$\bar{x}_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1+p-1} = 1 \pm \sqrt{p} \quad \text{per } p \geq 0$$

$$\Rightarrow \bar{x}_0 = 0 \qquad \underset{(p\geq 0)}{\bar{x}_1 = 1+\sqrt{p}} \qquad \underset{(p\geq 0)}{\bar{x}_2 = 1-\sqrt{p}}$$

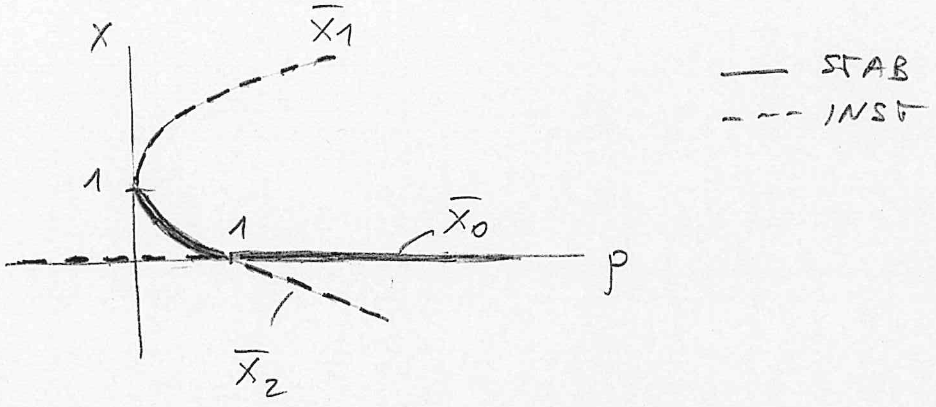
2) $J = \dfrac{\partial f}{\partial x} = (x^2-2x-p+1)+2x(x-1)$

$$J|_{\bar{x}_0} = 1-p \begin{cases} \rightarrow p>1 & \text{INST} \\ \rightarrow p<1 & \text{loc. A.S.} \end{cases}$$

$$J|_{\bar{x}_1} = (1+\sqrt{p})\,2(\cancel{1}+\sqrt{p}-\cancel{1}) = 2\sqrt{p}(1+\sqrt{p}) > 0 \Rightarrow \text{INST } \forall p > 0$$

$$J|_{\bar{x}_2} = (1-\sqrt{p})\,2(-\sqrt{p}) \begin{cases} \rightarrow p>1 \rightarrow J|_{\bar{x}_2} > 0 \rightarrow \text{INST} \\ \rightarrow p<1 \rightarrow J|_{\bar{x}_2} < 0 \rightarrow \text{loc. A.S.} \end{cases}$$

3)



4) $n=1$, tempo continuo $\Rightarrow \nexists$ cicli

5) $\nexists\, p$ / si abbia un unico equilibrio globalmente stabile

6) nodo-sella in $p=0$ $\rightsquigarrow$ $\bar{x}_1$ e $\bar{x}_2$ collidono e scompaiono

transcritica in $p=1$ $\rightsquigarrow$ $\bar{x}_0$ e $\bar{x}_2$ collidono scambiandosi le stabilità

3.

Si consideri una famiglia di sistemi a tempo discreto del terzo ordine del tipo $x(t+1) = f(x(t), p)$, in cui p è un parametro scalare. Al variare di p il sistema funziona su diversi attrattori, di cui sono sotto riportati gli esponenti di Lyapunov calcolati per quattro differenti valori di p.

i) $p = p_1$: $L_1 = -0.5$ $L_2 = -0.5$ $L_3 = -1$

ii) $p = p_2$: $L_1 = -1$ $L_2 = -2$ $L_3 = -2$

iii) $p = p_3$: $L_1 = 0$ $L_2 = -0.5$ $L_3 = -1$

iv) $p = p_4$: $L_1 = 1$ $L_2 = -2$ $L_3 = -2$

a) In ciascuno dei quattro casi sopra riportati, classificare il tipo di attrattore, tenendo conto che per $p = p_1$ il sistema non ha cicli, mentre per $p = p_2$ non ha equilibri stabili (e che in tutti i casi equilibri e cicli sono iperbolici).

b) Determinarne la dimensione (per dimensioni frattali si usi la dimensione di Lyapunov).

c) Per ciascuno dei quattro casi sopra riportati, tracciare la proiezione bidimensionale di una ipotetica traiettoria generica, a partire da condizioni iniziali sull'attrattore.

---

a) L_i = esponenti di Lyapunov $i = 1, 2, \dots, n$

$L_1 \geq L_2 \geq \dots \geq L_n$

↳ primo esponente di Lyapunov

pag 45 lec05

	$\dot{x} = f(x)$	$x(t+1) = f(x(t))$
Equilibria	$L_1 < 0$	$L_1 < 0$
Limit cycles	$L_1 = 0\ (L_2 < 0)$	$L_1 < 0$
Tori	$L_1 = 0\ (L_2 = 0)$	$L_1 = 0$
Chaos	$L_1 > 0$	$L_1 > 0$

p	tipo
p_1	equilibrio → per $p = p_1$ non ha cicli e $L_1 < 0$
p_2	ciclo → per $p = p_2$ non ha equilibri e $L_1 < 0$
p_3	toro → $L_1 = 0$
p_4	attr. caotico → $L_1 > 0$

b e c)

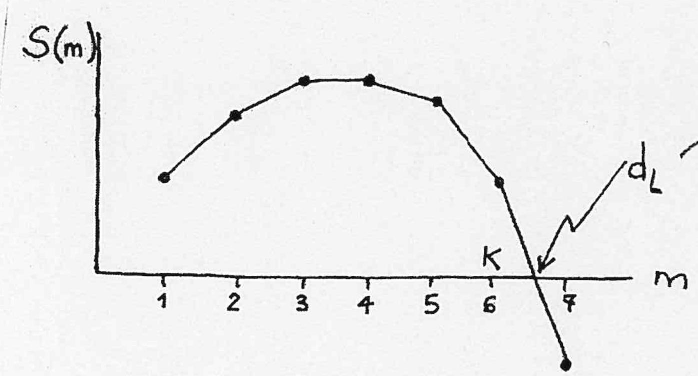
p	tipo	dimensione	traiettoria
p_1	equil	0	
p_2	ciclo	0	
p_3	toro	1	
p_4	attr. caotico	1,5	

⇝ ciclo di periodo 3

Dimensione di Lyapunov d_L

$S_m = L_1 + L_2 + \dots + L_m$ ⇝ somma dei primi m esponenti di Lyapunov

se l'attrattore è caotico $\Rightarrow L_1 > 0$ e S_m è del tipo



dimensione di Lyapunov

pag 66 lec05

Valuto d_L con la formula di Kaplan-Yorke

$$d_L = k + \frac{S_k}{|L_{k+1}|}$$

where $k = \max\{m \mid S_m > 0\}$

$L_1 = 1 \quad L_2 = -2 \quad L_3 = -2$

$S_1 = L_1 = 1 \quad S_2 = L_1 + L_2 = -1 \quad S_3 = L_1 + L_2 + L_3 = -3$

$\rightarrow k = 1$

$$d_L = 1 + \frac{S_1}{|L_2|} = 1 + \frac{1}{|-2|} = 1,5$$

3.

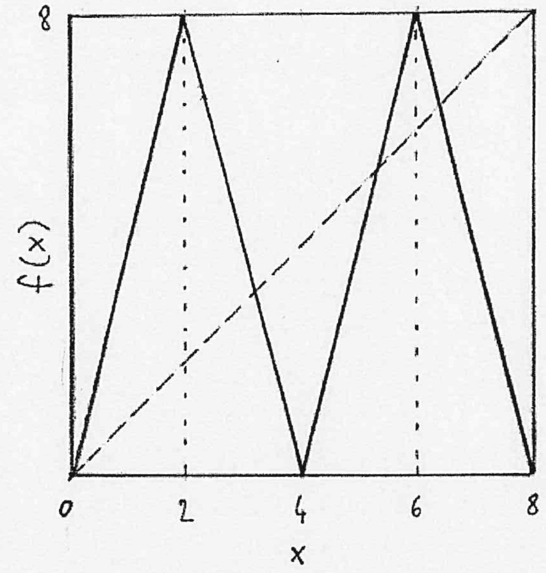
Con riferimento al sistema del primo ordine a tempo-discreto $x(t+1) = f(x(t))$ descritto in figura:

a) Si dica, motivando la risposta, se sia possibile calcolare l'esponente di Lyapunov associato ad una generica traiettoria, senza conoscere la traiettoria in oggetto.

b) In caso affermativo, calcolare l'esponente di Lyapunov associato ad una generica traiettoria.

c) Determinare gli equilibri del sistema (o identificarli sul grafico in figura) e discutere la loro stabilità.

d) Si dica, motivando la risposta, se sia plausibile aspettarsi dinamica caotica.



---

a) pag 21 lec05

$$L_{x(0)} = \lim_{t\to\infty} \frac{\ln|f'(x(t-1))| + \ln|f'(x(t-2))| + \ldots + \ln|f'(x(0))|}{t} =$$

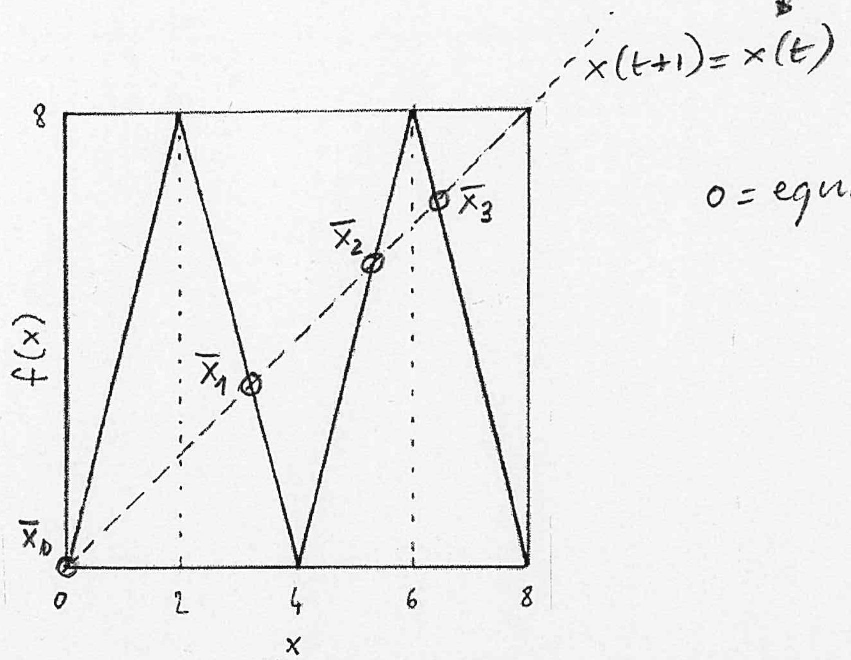
$$= \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \cdot \sum_{k=0}^{t-1} \ln|f'(x(k))| \qquad (*)$$

Poiché $|f'(x)| = 4$ (è ricavabile dalla figura!) quasi ovunque in $[0,8]$ $\Rightarrow$ è possibile calcolare L con $(*)$

b) $$L = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \sum_{k=0}^{t-1} \ln|f'(x(k))| =$$

$$= \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \underbrace{\sum_{k=0}^{t-1} \ln 4}_{\text{sono } t \text{ termini, tutti pari a } \ln 4} = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{\cancel{t}} \cdot \cancel{t} \ln 4 = \ln 4$$

c) Equilibri $x(t+1) = f(x(t))$ → si trovano intersecando
$x(t+1) = x(t)$ $f(x)$ con la bisettrice



o = equilibri

Uso la linearizzazione per studiarne la stabilità

$$J\big|_{\bar{x}_i} = \frac{\partial f}{\partial x}\bigg|_{\bar{x}_i} = \begin{cases} +4 \text{ in } \bar{x}_0 \text{ e } \bar{x}_2 \\ -4 \text{ in } \bar{x}_1 \text{ e } \bar{x}_3 \end{cases}$$

$\forall \bar{x}_i \rightarrow |\lambda| = 4 > 1 \rightarrow$ tutti gli equilibri sono instabili

Valuto $\bar{x}_i$ analiticamente

$$f(x) = \begin{cases} 4x & 0 \leq x \leq 2 \\ 16 - 4x & 2 \leq x \leq 4 \\ -16 + 4x & 4 \leq x \leq 6 \\ 32 - 4x & 6 \leq x \leq 8 \end{cases}$$

All'equilibrio $x = f(x)$

$x = 4x \rightarrow \bar{x}_0 = 0$

$x = 16 - 4x \rightarrow \bar{x}_1 = 16/5$

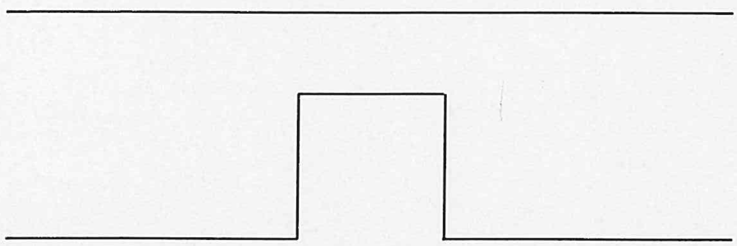
$x = -16 + 4x \rightarrow \bar{x}_2 = 16/3$

$x = 32 - 4x \rightarrow \bar{x}_3 = 32/5$

d) Sì, perché $[0,8]$ è invariante e la generica traiettoria ha $L = \ln 4 > 0$

3.

Si consideri l'insieme C ottenuto partendo dal segmento [0,1] dell'asse reale (passo $k = 0$) e applicando infinite volte ($k \to +\infty$) la seguente procedura: ogni segmento esistente al passo k sia diviso in 5 parti uguali e si sostituisca il segmento centrale con tre uguali segmenti come mostrato in figura.



$k = 0$

$k = 1$

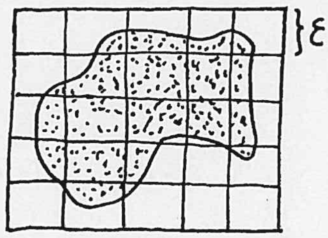
Determinare la dimensione di box-counting dell'insieme C.

---

pag 57 lec05

"Box-counting" dimension

Consider a set $S \subset R^n$ contained in an n-dimensional "cube" H, and partition H in "boxes" whose side is ε.



The total number of boxes $T(\varepsilon)$ is proportional to $(1/\varepsilon)^n$.

Now denote by $N(\varepsilon)$ the number of boxes containing at least one point of S.

S has dimension d_B if, for small ε, $N(\varepsilon)$ obeys the power law

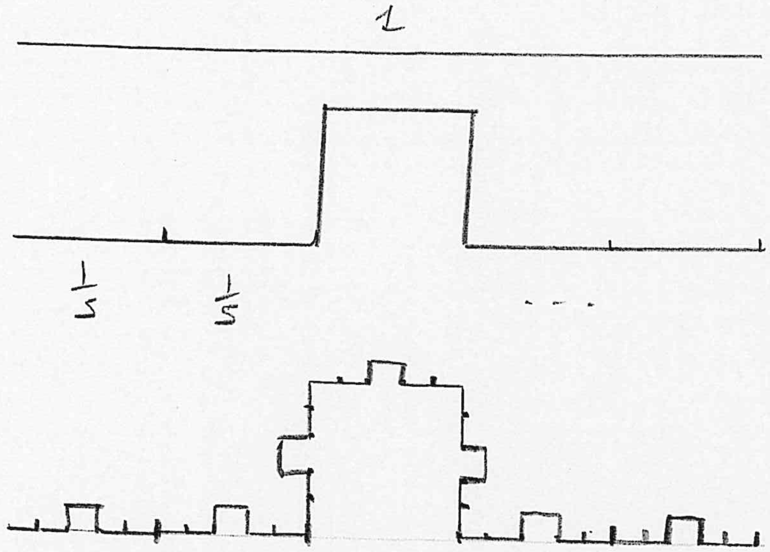
$$N(\varepsilon) = \gamma \left(\frac{1}{\varepsilon} \right)^{d_B} \quad \text{or equivalently} \quad \log N(\varepsilon) = \log \gamma + d_B \log(1/\varepsilon)$$

Letting $\varepsilon \to 0$, we have the definition of "box-counting" dimension

$$\boxed{d_B = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\log N(\varepsilon)}{\log(1/\varepsilon)}}$$

ε = lato del box → lunghezza del segmento usato al passo k per coprire il set ottenuto al passo k

$N(\varepsilon)$ = # box necessari per coprire tutto il set al passo k



$k=0 \qquad \varepsilon = 1 \qquad N = 1$

$k=1 \qquad \varepsilon = \frac{1}{5} \qquad N = 7$

$k=2 \qquad \varepsilon = \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{5} = \frac{1}{5^2}$

$N = \underbrace{7}_{\text{erano 7 elementi}} \cdot \underbrace{7}_{\text{∀ elemento servono 7 segmenti}} = 7^2$

k	0	1	2	...	k
ε	1	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5^2}$	...	$\frac{1}{5^k}$
$N(\varepsilon)$	1	7	7^2	...	7^k

$$d_B = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\ln N(\varepsilon)}{\ln \frac{1}{\varepsilon}} = \lim_{k \to \infty} \frac{\ln 7^k}{\ln 5^k} = \lim_{k \to \infty} \frac{\cancel{k} \ln 7}{\cancel{k} \ln 5} = \frac{\ln 7}{\ln 5}$$