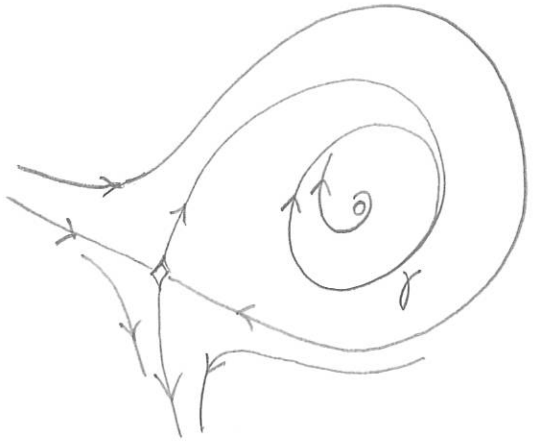
9/2/16

Disegnare un possibile quadro delle traiettorie di un sistema del II ordine che abbia 2 equilibri e 1 ciclo

---

Per il teorema di Poincaré, un ciclo deve contenere un numero dispari di equilibri (iperbolici)
Pertanto, nel ciclo ci sarà 1 solo dei 2 equilibri e sarà una non sella ($S=0$).
Un possibile quadro è:



Il ciclo γ è stabile
o fuoco instabile
◇ sella

Teorema di Poincaré (con equilibri iperbolici)
Un ciclo contiene $2S+1$ equilibri, di cui S sono selle e $(S+1)$ sono non selle.

24/2/16

Disegnare un possibile quadro delle traiettorie di un sistema del II ordine che ha 3 equilibri e 1 ciclo

---

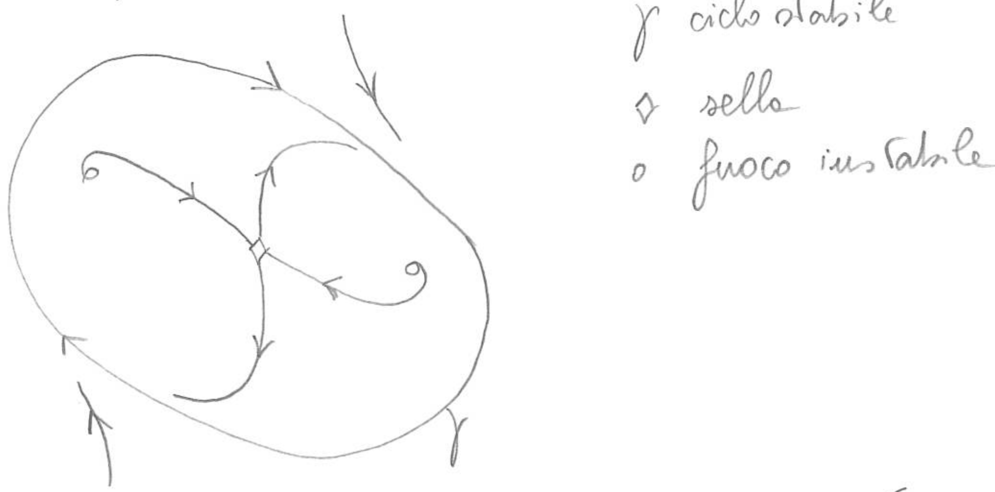
Per il teorema di Poincaré, un ciclo deve contenere un numero dispari di equilibri (se iperbolici)

Pertanto, il ciclo potrà contenere tutti e tre gli equilibri

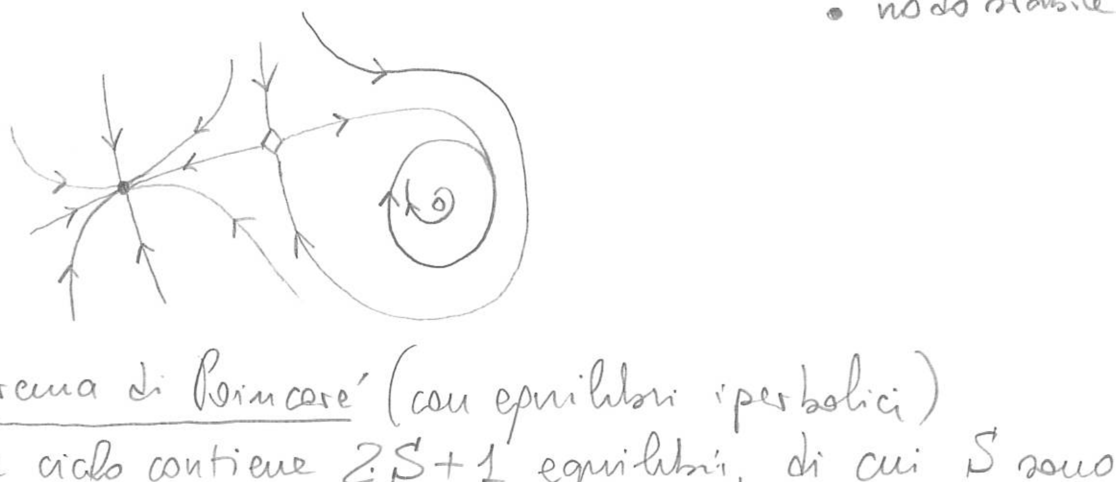
$$2 \cdot S + 1 = 3 \Rightarrow S = 1$$

1 sella
2 non selle

Un possibile quadro è:



In alternativa, se il ciclo contiene 1 solo equilibrio (non sella, $S=0$):



Teorema di Poincaré (con equilibri iperbolici)
Un ciclo contiene $2S+1$ equilibri, di cui S sono selle e $(S+1)$ sono non selle.

7/9/16

Si dica perché il seguente sistema del III ordine

$$\dot{x}_1 = x_2 - 3x_3 = f_1$$

$$\dot{x}_2 = 3x_2 - 3x_1^2 x_3 = f_2$$

$$\dot{x}_3 = -2x_1x_2 - 2x_3 + x_1^4 = f_3$$

non può avere comportamento quasi-periodico

$$\operatorname{div} f = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} + \frac{\partial f_3}{\partial x_3}$$

$$\operatorname{div} f = 0 + 3 - 2 = 1$$

$\downarrow$

non cambia segno in $\mathbb{R}^3 \Rightarrow \nexists$ tori in $\mathbb{R}^3$

Teorema (condizione sufficiente di non esistenza di tori)

Se $\operatorname{div} f = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} + \dots + \frac{\partial f_n}{\partial x_n}$ non cambia segno in un insieme chiuso e limitato $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ (o al più si annulla su una superficie di dimensione $n-1$) $\Rightarrow \nexists$ tori in Ω

9/9/19

Si consideri il sistema del II ordine

$$\dot{x}_1 = -x_1 x_2^2 - x_1^3$$

$$\dot{x}_2 = x_1^2 x_2 - x_2^3$$

Mediante un'opportuna funzione di Liapunov, si dimostri che l'origine dello spazio di stato è uno stato di equilibrio globalmente asintoticamente stabile.

$$\begin{aligned} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} \dot{x}_1 = 0 \\ \dot{x}_2 = 0 \end{aligned} \Rightarrow \bar{x} = (0,0) \text{ è equilibrio}$$

Considero $V(x_1, x_2) = \frac{1}{2} x_1^2 + \frac{1}{2} x_2^2$ (*) che è

(1) definita positiva in $\bar{x}$

(2) continua con le derivate

$\mapsto$ linee di livello $V(x) = k$ chiuse e limitate

$$\dot{V} = \frac{\partial V}{\partial x_1} \cdot \dot{x}_1 + \frac{\partial V}{\partial x_2} \cdot \dot{x}_2 = \frac{1}{2} 2 x_1 (-x_1 x_2^2 - x_1^3) + \frac{1}{2} 2 x_2 (x_1^2 x_2 - x_2^3) =$$

$$= \cancel{-x_1^2 x_2^2} - x_1^4 + \cancel{x_1^2 x_2^2} - x_2^4 = -x_1^4 - x_2^4$$

(3) $\dot{V}$ definita negativa in $\bar{x}$

Per il metodo di Liapunov: (1), (2), (3) $\Rightarrow \bar{x}$ è loc. as. stab.

Le condizioni (1)-(3) valgono in ogni regione delimitata da una linea di livello $V(x) = k$ $\Rightarrow$ per il criterio di La Salle $\bar{x} = (0,0)$ è globalm. as. stab.

(*) le linee di livello $V = k$ sono ~~ordinate~~

18/7/19

Si dimostri che il sistema

$$\dot{x}_1 = -x_1$$

$$\dot{x}_2 = -x_1^2 x_2 - x_2 - x_2^3$$

ha un unico stato di equilibrio globalmente asintot. stabile

$\dot{x}_1 = 0 \rightarrow \bar{x}_1 = 0$

$\dot{x}_2 = 0 \rightarrow -x_1^2 x_2 - x_2 - x_2^3 = 0 \rightarrow -x_2(1+x_2^2) = 0 \rightarrow \bar{x}_2 = 0$

Pertanto, $\bar{x} = (0,0)$ è l'unico stato di equilibrio

Considero $V(x_1,x_2) = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2$ (*) che è:

(1) definita positiva in $\bar{x}$

(2) continua con le derivate

→ linee di livello $V(x)=k$ chiuse e limitate

$$\dot{V} = \frac{\partial V}{\partial x_1}\dot{x}_1 + \frac{\partial V}{\partial x_2}\cdot\dot{x}_2 = \frac{1}{2}2x_1(-x_1) + \frac{1}{2}2x_2(-x_1^2x_2 - x_2 - x_2^3) =$$

$$= -x_1^2 - x_1^2x_2^2 - x_2^2 - x_2^4 = -x_1^2(1+x_2^2) - x_2^2(1+x_2^2) =$$

$$= -(x_1^2 + x_2^2)(1+x_2^2)$$

(3) $\dot{V}$ è definita negativa in $\bar{x}$

Per il metodo di Liapunov (1), (2), (3) $\Rightarrow$ $\bar{x}$ è loc. as. stab.

le condizioni (1)–(3) valgono per ogni regione delimitata da una linea di livello $V(x)=k$ $\Rightarrow$ per il criterio di La Salle $\bar{x}=(0,0)$ è glob. as. stab.

(*) le linee di livello $V=k$ sono ordinate

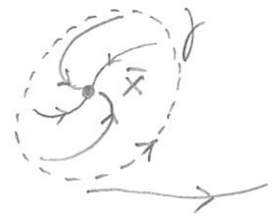
NOTA

Studiando la stabilità via linearizzazione si ottiene

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -2x_1x_2 & -x_1^2-1-3x_2^2 \end{vmatrix}$$

$$J\big|_{\bar{x}} = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \qquad \lambda_{1,2} = -1 \Rightarrow \bar{x} \text{ è loc. as. stab.}$$

Pur essendo l'equilibrio unico, non si può concludere la sua globale stabilità. Infatti si potrebbe avere un quadro delle traiettorie del tipo:



γ è un ciclo instabile ⇒ le traiettorie che partono da condizioni iniziali esterne al ciclo non tendono a $\bar{x}$ che quindi non è globalmente stabile

25/6/19

Mediante un'opportuna funzione di Liapunov V, si dimostri che per il sistema

$$\mathring{x}_1 = -x_1 + x_1^2 - 2x_2$$

$$\mathring{x}_2 = 2x_1 - x_2$$

l'origine dello spazio di stato è un equilibrio localmente asintoticamente stabile.
A partire dalla V scelta, si determini una sottoregione del suo bacino di attrazione.
Facoltativo: si dimostri che l'origine dello spazio di stato non è un equilibrio globalmente stabile.

$$\begin{array}{l} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} \mathring{x}_1 = 0 \\ \mathring{x}_2 = 0 \end{array} \Rightarrow \bar{x} = (0,0) \text{ è equilibrio}$$

$$V = \frac{1}{2} x_1^2 + \frac{1}{2} x_2^2 \ (*)$$

(1) V è definita positiva in $\bar{x}$
(2) V è continua con le sue derivate

$\mapsto$ linee di livello $V = k$ chiuse e limitate

$$\mathring{V} = \frac{\partial V}{\partial x_1} \cdot \dot{x}_1 + \frac{\partial V}{\partial x_2} \dot{x}_2 = \cancel{\frac{1}{2}} \cancel{2} x_1 (-x_1 + x_1^2 - 2x_2) + \cancel{\frac{1}{2}} \cancel{2} x_2 (2x_1 - x_2) =$$

$$= -x_1^2 + x_1^3 - x_2^2$$

(3) $\mathring{V}$ è definita negativa in $\bar{x}$ (in particolare, x_1 "piccolo" $\Rightarrow \mathring{V} < 0$)

(*) Le linee di livello $V(x) = k$ sono ordinate

Metodo di Liapunov (1) (2) (3) $\Rightarrow \bar{x}$ è localmente asintoticamente stabile

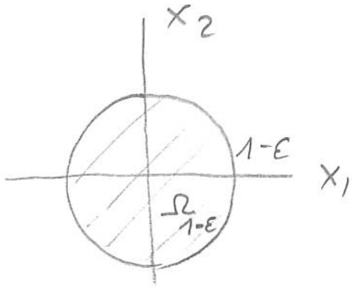
Nella regione chiusa e limitata $\Omega_{1-\varepsilon}$ definita dalla linea di livello $x_1^2 + x_2^2 = 1-\varepsilon$ ($\varepsilon > 0$ e piccolo)

$\hookrightarrow V = 2(1-\varepsilon)$

$$\Omega_{1-\varepsilon} = \{(x_1, x_2) / x_1^2 + x_2^2 = 1-\varepsilon\}$$

si ha $x_1^2 > x_1^3$, da cui $\mathring{V} < 0$ in Ω

Pertanto, per il criterio di La Salle, $\Omega_{1-\varepsilon} \subset \mathcal{B}_{\bar{x}}$



Facoltativo

La funzione V scelta permette di concludere che $\bar{x} = (0,0)$ è localmente asintoticamente stabile e che $\Omega_{1-\varepsilon} \subset \mathcal{B}_{\bar{x}}$.

Una diversa scelta di V potrebbe portare a una diversa stima del bacino di attrazione di $\bar{x}$.

Tuttavia, nessuna V potrebbe dimostrare che $\mathcal{B}_{\bar{x}} \equiv \mathbb{R}^2$, cioè che $\bar{x}$ è globalmente stabile. Infatti il sistema presenta un ulteriore equilibrio

$\mathring{x}_1 = 0 \quad -x_1 + x_1^2 - 4x_1 = 0 \rightarrow x_1(x_1 - 5) = 0$

$\rightarrow \qquad \Rightarrow \bar{\bar{x}}_1 = 5 \quad \bar{\bar{x}}_2 = 10$

$\mathring{x}_2 = 0 \quad x_2 = 2x_1$

Tale equilibrio è una sella. Via linearizzazione si ha:

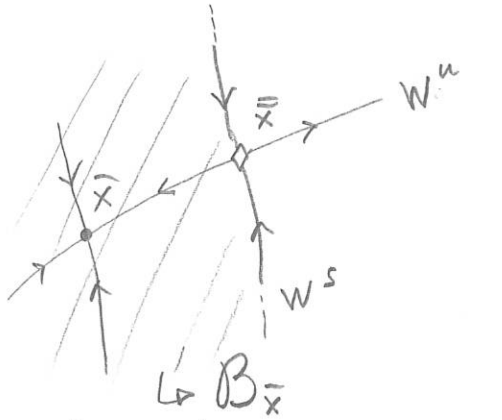
$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1+2x_1 & -2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \qquad J|_{\bar{\bar{x}}} = \begin{vmatrix} 9 & -2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$$

$tr = 8$

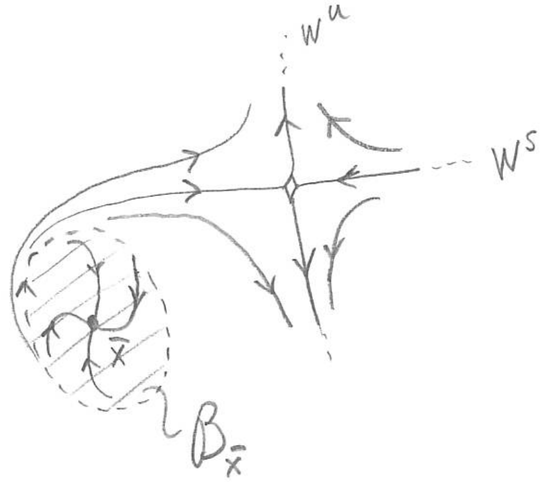
$det = -9+4 = -5 < 0 \Rightarrow \lambda_1 < 0$ e $\lambda_2 > 0 \Rightarrow$ sella

Tale sella avrà una sua varietà stabile W^s che andrà a suddividere lo spazio di stato in due regioni, ad una delle quali apparterrà $B_{\bar{x}}$.

Ad esempio,



E se ci fossero anche cicli? La situazione potrebbe essere:



E così via!

$\Rightarrow \bar{x}$ non è globalmente stabile

24/2/16

Si dimostri che il sistema

$$\dot{x}_1 = -x_1 + x_2 - x_1^3 - x_1 x_2^2$$

$$\dot{x}_2 = -x_1 - x_1^2 x_2$$

ha un equilibrio <u>globalmente stabile</u>

$$\begin{matrix} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} \dot{x}_1 = 0 \\ \dot{x}_2 = 0 \end{matrix} \Rightarrow \bar{x} = (0,0) \text{ è un equilibrio}$$

$$V(x_1, x_2) = \frac{1}{2} x_1^2 + \frac{1}{2} x_2^2 \quad (*)$$

(1) V è definita positiva in $\bar{x}$

(2) V è continua con le derivate

$\to$ linee di livello $V=k$ chiuse e limitate

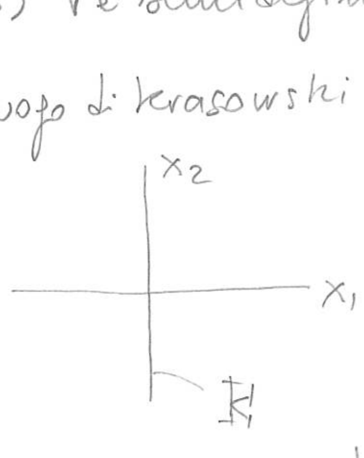
$$\dot{V} = \frac{\partial V}{\partial x_1}\dot{x}_1 + \frac{\partial V}{\partial x_2}\dot{x}_2 = \frac{1}{2} 2x_1(-x_1 + x_2 - x_1^3 - x_1 x_2^2) + \frac{1}{2} 2x_2(-x_1 - x_1^2 x_2) =$$

$$= -x_1^2 + \cancel{x_1 x_2} - x_1^4 - x_1^2 x_2^2 - \cancel{x_1 x_2} - x_1^2 x_2^2 =$$

$$= -x_1^2 \underbrace{(1 + x_1^2 + 2x_2^2)}_{+}$$

(3) $\dot{V}$ è semidefinita negativa

luogo di Krasowski $K_1 = \{(x_1, x_2) / \dot{V} = 0\} \Rightarrow x_1 = 0$



$$\begin{matrix} x_1(0) = 0 \\ x_2(0) \neq 0 \end{matrix} \to \dot{x}_1(0) = x_2(0) \neq 0$$

(4) Non esistono traiettorie perturbate in K_1

Per il Metodo di Krasowski (1)-(4) $\Rightarrow \bar{x}$ è loc. as. stabile

Le condizioni (1)-(4) valgono per ogni insieme chiuso e limitato

Ω_k definito dalla curva di livello $V=k \Rightarrow$ per La Salle $\bar{x}$ è glob. stab

---

(*) le linee di livello $V=k$ sono ordinate