10. <u>Modello di epidemie</u> SEIR

S = suscettibili, E = esposti, I = infetti, R = guariti → immuni alla malattia (varicella/rosolia)

(frazioni sul totale della popolazione)

$$R = 1-(S+E+I)$$

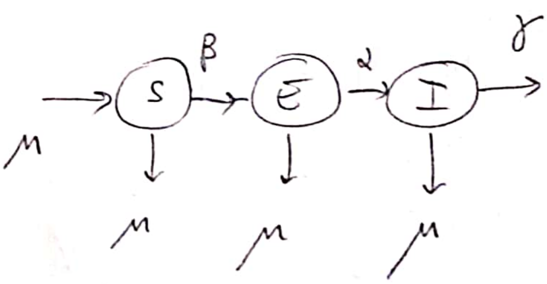
E → infettati non ancora infettivi (non trasmettono ancora la malattia)

I → infettivi (trasmettono la malattia)

$$\dot{S} = \mu - \mu S - \beta S I$$

$$\dot{E} = \beta S I - \mu E - \alpha E$$

$$\dot{I} = \alpha E - \mu I - \gamma I$$



μ = tasso di mortalità (la <u>stessa</u> ∀ classe)

$\mu - \mu S$ ⇒ in assenza di infetti ed esposti, $\dot{S} = \mu(1-S)$ e $S \to 1$ (tutti S)

$(I=0)$ $(E=0)$

↓ natalità = mortalità

β = prob. di contagio e di incontro S e I

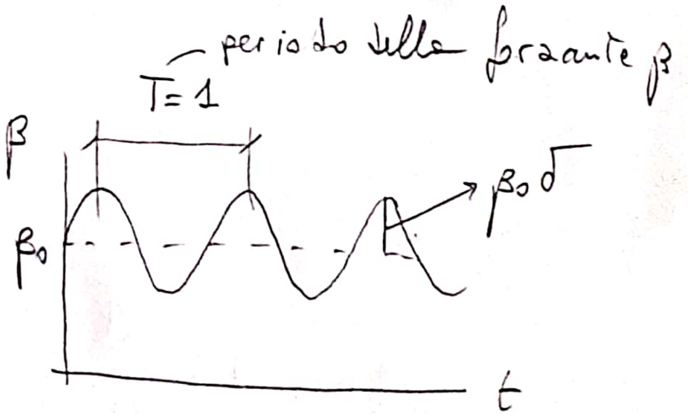
α = "velocità" di passaggio $E \to I$

γ = guarigione

$$\beta = \beta(t) = \beta_0(1 + \delta \sin 2\pi t)$$

↓ Variazione stagionale

esempio: le scuole



δ = grado di stagionalità $\delta \in [0, 1]$ $\begin{pmatrix}\delta = 0 \\ \beta = \beta_0\end{pmatrix}$

β_0 = valore medio di β

mortalità
$\mu = 0,02 \rightsquigarrow \frac{1}{\mu} \sim$ tempo di estinzione (anni [50]) della popolazione (se non si riproduce)

$\gamma = 100 \rightsquigarrow \frac{1}{\gamma} \sim$ " " guarigione (0,01 anni) $\sim$ 4 gg
guarigione

$\alpha = 35,842 \to$ morbillo $\rightsquigarrow \frac{1}{\alpha} \sim$ latenza $E \to I$
$\sim$ 10 gg

$\beta_0 = 1884.95$

$\delta = 0$ coesistenza stazionaria

$\delta = 0,02$ " ciclica di periodo $T = 1 \rightsquigarrow$ come il periodo della forzante

$\delta = 0,255$ " caotica

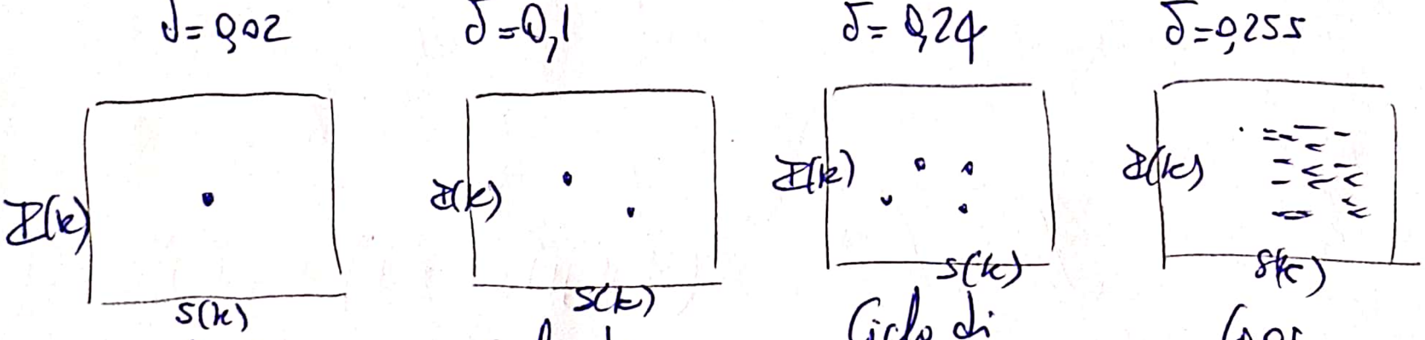
$\delta = 0,1$ Ciclo di periodo 2 $\rightsquigarrow$ doppio del periodo della forzante

$\delta = 0,24$ " 4 $\rightsquigarrow$ quadruplo "

Sezione di Poincaré e mappa di Poincaré
$\downarrow$

$$P : (S(k), E(k), I(k)) \mapsto (S(k+1), E(k+1), I(k+1))$$

Campiono S, E, I ogni anno
$\downarrow$
periodo della forzante β

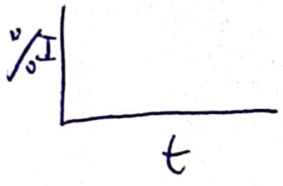


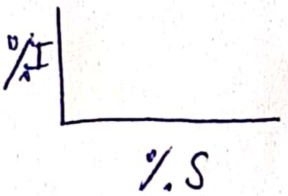
ciclo di periodo 1 — Ciclo di periodo 2 — Ciclo di periodo 4 — Caos

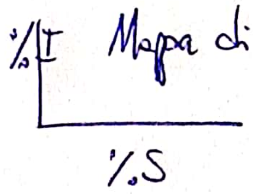
bifo flip — bifo flip — cascata di flip

file: simula_SEIR/caos.fig

- $\delta = 0{,}02$ → coesistenza ciclica di periodo 1







Mappa di Poincaré → mappa stroboscopica

$\%S(t_k) / \%I(t_k)$

con $t_k = k \cdot 1$ → periodo della forzante

- $\delta = 0{,}1$ → ciclo di periodo 2
  come sopra

- $\delta = 0{,}24$ → ciclo di periodo 4
  come sopra

- $\delta = 0{,}255$ → caos
  ↳ caos.fig per vedere la mappa stroboscopica su un numero maggiore di punti

OSSERVAZIONE

La variabile I varia da valori molto piccoli ($\sim 10^{-9}$) a valori più elevati ($\sim 0{,}5$). Ciò pone qualche problema per l'integrazione numerica.

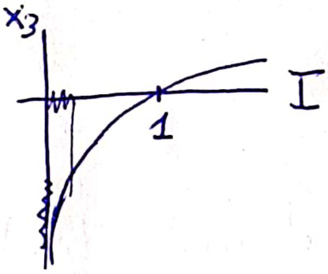
Tuttavia si può risolvere il tutto mediante un cambio di variabili:

$$\dot{S} = f_1(S, I)$$
$$\dot{E} = f_2(S, E, I)$$
$$\dot{I} = f_3(E, I)$$

$x_1 = \log S$

$x_2 = \log E$

$x_3 = \log I \rightsquigarrow$



valori piccoli di I corrispondono a valori negativi (e non così piccoli) di x_3

$\downarrow$

$$S = e^{x_1} \qquad \dot{S} = e^{x_1}\dot{x}_1 \qquad \dot{x}_1 = \dot{S}/S$$
$$E = e^{x_2} \quad \longrightarrow \quad \dot{E} = e^{x_2}\dot{x}_2 \quad \longrightarrow \quad \dot{x}_2 = \dot{E}/E$$
$$I = e^{x_3} \qquad \dot{I} = e^{x_3}\dot{x}_3 \qquad \dot{x}_3 = \dot{I}/I$$

Basterà quindi integrare le seguenti eq.ni

$$\dot{x}_1 = f_1(S, I)/S$$
$$\dot{x}_2 = f_2(S, E, I)/E$$
$$\dot{x}_3 = f_3(E, I)/I$$

con

$S = e^{x_1}$, $E = e^{x_2}$, $I = e^{x_3}$ e $x_1(0) = \log S(0)$, $x_2(0) = \log E(0)$, $x_3(0) = \log I(0)$

Ottenute $x_1(t)$, $x_2(t)$, $x_3(t)$

si avrà
$$S(t) = e^{x_1(t)}$$
$$E(t) = e^{x_2(t)}$$
$$I(t) = e^{x_3(t)}$$