

# Fondamenti di automatica

---

Testo per allievi fisici e matematici  
Il anno, I semestre, 5 crediti

---

A cura di Fabio Dercole, Carlo Piccardi e Sergio Rinaldi

### Premessa

La riforma degli studi universitari in atto in questi anni ha puntato, nelle facoltà di ingegneria, su due caratteristiche fondamentali: lo snellimento dei corsi (oggi per lo più di durata dimezzata rispetto a quelli di un tempo) e l'irrobustimento del legame tra teoria e applicazioni.

La risposta a minimo sforzo a questi mutati requisiti consiste nel limitare il programma del corso, nell'adottare ancora i vecchi testi e nello svolgere a lezione un maggior numero di esempi a carattere applicativo. Questa risposta non è tuttavia soddisfacente perché impone allo studente l'acquisto di testi sovradimensionati e una perdita di tempo inaccettabile legata all'oggettiva difficoltà di leggere testi a passo zoppo.

D'altra parte, la polverizzazione dei piani di studio e la loro quasi sistematica revisione annuale fanno sì che ogni corso debba, o per lo meno possa, essere ritarato ogni anno sulle esigenze specifiche di un limitato numero di studenti. Ciò scoraggia indubbiamente i docenti a intraprendere la scrittura di nuovi testi, che potrebbero risultare già obsoleti poco dopo la prima stampa. Ma al di là delle titubanze dei docenti, la produzione di nuovi testi universitari è resa praticamente impossibile dalle giuste esigenze delle case editrici che non possono intraprendere avventure editoriali che non abbiano garanzie di mercato vasto e duraturo.

Di fronte a queste difficoltà, l'unica risposta che ci è parsa accettabile e a costi e rischi contenuti è stata quella di passare a testi virtuali in forma elettronica che possono essere facilmente messi a disposizione degli studenti e adattati di anno in anno alle nuove esigenze didattiche. Quello che qui proponiamo è un nostro primo tentativo in tal senso, adattato al corso di Fondamenti di automatica impartito al primo semestre del secondo anno dei nuovi corsi di laurea in ingegneria fisica e matematica.

Questo testo è il primo risultato concreto di un vero e proprio progetto di ricerca finalizzato alla scrittura di testi virtuali a partire da una Banca della Didattica (costituita da schede "lezione", schede "esercitazione" e schede "applicazioni") messa a punto da un certo numero di docenti che hanno insegnato negli anni passati corsi di Analisi dei sistemi, Controlli automatici, Fondamenti di automatica, Modellistica e simulazione e Teoria dei sistemi in varie sedi e in vari corsi di laurea e di diploma. Per facilitare la lettura del testo, le dimostrazioni dei teoremi e gli esempi sono stati tipograficamente evidenziati, così come i 75 problemi proposti di cui è annunciato il carattere

(T= teorico, N= numerico, A= applicativo) e il livello di difficoltà (I, II, III). In alcuni paragrafi è mostrato con un certo dettaglio come le metodologie descritte possano essere usate per risolvere importanti problemi applicativi nel settore dell'automazione (controllo del movimento di un convoglio, controllo della posizione di un'antenna, controllo dell'alimentazione di un impianto chimico, regolazione di un satellite su orbita circolare, controllo della velocità di un carico rotante). Infine, sono anche proposti quattro problemi a carattere professionale la cui soluzione richiede l'uso di software specialistico.

Gli autori: Fabio Dercole, Carlo Piccardi, Sergio Rinaldi

## Indice

Premessa .....	iii
1. Definizione di sistema lineare.....	1
2. Modello ARMA e funzione di trasferimento.....	5
3. Calcolo della funzione di trasferimento e realizzazione.....	8
4. Aggregati di sottosistemi e formula di Mason.....	13
5. Cambiamento di coordinate e sistemi equivalenti.....	19
6. Movimento, traiettoria ed equilibrio.....	20
7. Formula di Lagrange e matrice di transizione.....	24
8. Reversibilita'.....	28
9. Stabilita' interna: definizioni.....	30
10. Il metodo delle simulazioni.....	31
11. Autovalori e stabilita'.....	32
12. Esempio di applicazione: controllo del movimento di un convoglio.....	39
13. Test di asintotica stabilita'.....	42
14. Costante di tempo dominante.....	46
15. Esempio di applicazione: controllo della posizione di un'antenna.....	50
16. Stabilita' degli aggregati.....	51
17. Esempio di applicazione: controllo dell'alimentazione di un impianto chimico.....	53
18. Raggiungibilita' e legge di controllo.....	56
19. Osservabilita' e ricostruzione dello stato.....	61
20. Sintesi del regolatore.....	67
21. Esempio di applicazione: regolazione di un satellite su orbita circolare.....	71
22. Scomposizione in parti.....	76
23. Calcolo del modello ARMA di un sistema $(\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{c}^T, d)$ .....	78
24. Poli e zeri della funzione di trasferimento.....	81
25. Poli e stabilita' esterna.....	82
26. Zeri, ingressi nascosti e sistemi a sfasamento minimo.....	85
27. Ricostruzione degli ingressi.....	87
28. Poli e zeri di sistemi in cascata, parallelo e retroazione.....	89
29. Il luogo delle radici.....	91
30. Risposte canoniche e loro importanza.....	101
31. Risposta all'impulso.....	101
32. Equivalenza tra risposta all'impulso e funzione di trasferimento.....	105
33. Calcolo delle risposte all'impulso, allo scalino e alla rampa.....	108

34. Regime periodico.....	116
35. Regime sinusoidale e risposta in frequenza dei sistemi a tempo continuo.....	119
36. Poli complessi e risonanza.....	124
37. Rappresentazioni della risposta in frequenza: generalita'.....	126
38. Diagrammi di Bode.....	127
39. Diagramma di Bode di aggregati.....	138
40. Esempio di applicazione: controllo della velocita' di un carico rotante.....	142
41. Diagrammi polari.....	145
42. Il criterio di stabilita' di Nyquist.....	147
Problemi applicativi.....	150
Appendice.....	160

**1. Definizione di sistema lineare**

I sistemi lineari sono una classe particolare, ma molto importante, di sistemi dinamici. Come tali essi sono caratterizzati da variabili di *ingresso*, *stato* e *uscita*, nel seguito indicate con  $u$ ,  $x$  e  $y$ . Con  $t$  si indica, invece, il *tempo*, che può essere un intero (*sistema a tempo discreto*) o un reale (*sistema a tempo continuo*). Limitandoci al caso dei sistemi con *un solo ingresso e una sola uscita* e a *dimensioni finite* dobbiamo ulteriormente assumere che

$$u(t) \in R \quad \mathbf{x}(t) \in R^n \quad y(t) \in R$$

dove la dimensione  $n$  del vettore di stato si chiama *ordine* del sistema.

Fatte queste premesse, possiamo definire i sistemi lineari a tempo discreto come quei sistemi in cui lo stato si aggiorna secondo una equazione lineare, detta *equazione di stato*,

$$\mathbf{x}(t+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}u(t) \tag{1}$$

dove  $\mathbf{A}$  è una matrice  $n \times n$  e  $\mathbf{b}$  un vettore  $n \times 1$  e l'uscita dipende dallo stato e dall'ingresso secondo una equazione lineare, detta *trasformazione d'uscita*,

$$y(t) = \mathbf{c}^T \mathbf{x}(t) + du(t) \tag{2}$$

dove  $\mathbf{c}^T$  è un vettore riga  $1 \times n$  e  $d$  un reale. Scritta per ogni componente  $x_i$  del vettore di stato, la (1) corrisponde a

$$\begin{aligned} x_1(t+1) &= a_{11}x_1(t) + \dots + a_{1n}x_n(t) + b_1u(t) \\ x_2(t+1) &= a_{21}x_1(t) + \dots + a_{2n}x_n(t) + b_2u(t) \\ &\vdots \\ x_n(t+1) &= a_{n1}x_1(t) + \dots + a_{nn}x_n(t) + b_nu(t) \end{aligned}$$

mentre la (2) si specifica in

$$y(t) = c_1x_1(t) + \dots + c_nx_n(t) + du(t)$$

Nel seguito supporremo che  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}^T$  e  $d$  siano costanti nel tempo (sistemi *invarianti*).

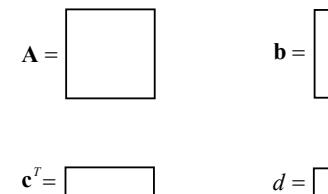
In modo del tutto analogo, indicata con  $\dot{\mathbf{x}}(t)$  la derivata di  $\mathbf{x}(t)$  rispetto al tempo, possiamo definire i sistemi lineari a tempo continuo come quei sistemi con equazione di stato

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}u(t) \tag{3}$$

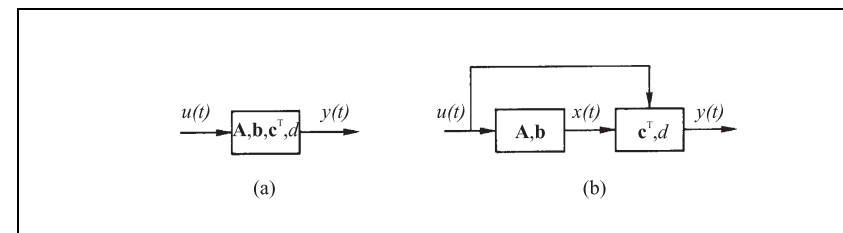
e trasformazione d'uscita

$$y(t) = \mathbf{c}^T \mathbf{x}(t) + du(t) \tag{4}$$

I sistemi lineari (sia a tempo discreto che a tempo continuo) sono così individuati dalla quaterna  $(\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{c}^T, d)$  che è conveniente ordinare nel modo seguente



Essi sono spesso rappresentati in una delle due forme mostrate in *Fig. 1*.



**Figura 1** Rappresentazioni di un sistema lineare: (a) forma compatta; (b) forma disaggregata in cui il primo blocco rappresenta l'equazione di stato e il secondo la trasformazione d'uscita

La prima forma mette in evidenza soltanto le variabili di ingresso e uscita, dette esterne perché sono quelle attraverso le quali ogni sistema interagisce con il resto del mondo. La seconda forma mette in evidenza anche le variabili di stato, dette interne.

In molti casi l'ingresso non influenza direttamente l'uscita, cioè  $d = 0$ . Tali sistemi, detti *propri*, sono individuati dalla terna  $(\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{c}^T)$  mentre quelli con  $d \neq 0$ , detti *impropri*, sono caratterizzati da una quaterna  $(\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{c}^T, d)$ . Sistemi senza ingresso ( $\mathbf{b} = 0$ ), o con ingresso identicamente nullo, si dicono *autonomi* e sono descritti, nel caso siano propri, dalla coppia  $(\mathbf{A}, \mathbf{c}^T)$ . Nel seguito discuteremo le principali proprietà dei sistemi lineari, iniziando da quelle che dipendono soltanto dalla matrice  $\mathbf{A}$  (reversibilità e stabilità interna), continuando con quelle caratterizzate dalla coppia  $(\mathbf{A}, \mathbf{b})$  (raggiungibilità) o dalla coppia  $(\mathbf{A}, \mathbf{c}^T)$  (osservabilità) e terminando con quelle

che dipendono dalla terna  $(\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{c}^T)$  o dalla quaterna  $(\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{c}^T, d)$  (stabilità esterna, sfasamento minimo, ...).

### Esempio 1 (legge di Newton)

Si supponga che ad una massa puntiforme  $m$ , vincolata a scorrere senza attrito lungo una retta, sia applicata una forza  $u(t)$  nella direzione della retta. Detta  $y(t)$  la posizione della massa, misurata rispetto ad un punto fisso, la legge di Newton afferma che

$$m\ddot{y}(t) = u(t)$$

La stessa legge può tuttavia essere posta nella forma di un sistema lineare a tempo continuo. Per questo basta indicare con  $x_1(t)$  la posizione della massa e con  $x_2(t)$  la sua velocità per ottenere le equazioni di stato

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= \frac{1}{m}u(t)\end{aligned}$$

e la trasformazione di uscita

$$y(t) = x_1(t)$$

In conclusione, la legge di Newton è descritta da un sistema proprio individuato dalla terna

$$\begin{aligned}\mathbf{A} &= \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & \mathbf{b} &= \begin{vmatrix} 0 \\ 1/m \end{vmatrix} \\ \mathbf{c}^T &= \begin{vmatrix} 1 & 0 \end{vmatrix}\end{aligned}$$

♣

### Esempio 2 (allevamento di Fibonacci)

L'esempio forse più antico di sistema lineare a tempo discreto è quello suggerito dal matematico pisano *Leonardo Fibonacci* nel 1200 per descrivere la crescita di una popolazione di conigli in un allevamento. Indicato con  $t$  l'anno, con  $x_1(t)$  il numero di coppie di conigli giovani presenti nell'allevamento all'inizio dell'anno  $t$ , con  $x_2(t)$  l'analogo numero di coppie adulte, con  $u(t)$  il numero di coppie di conigli adulti

prelevati dall'allevamento alla fine dell'anno  $t$  (dopo la riproduzione) e con  $y(t)$  il numero totale di coppie di conigli presenti nell'allevamento all'inizio dell'anno  $t$ , si ipotizzi che

- i conigli giovani non riproducano
- i conigli giovani diventino adulti dopo un anno
- i conigli adulti riproducano una volta l'anno
- ogni coppia di conigli adulti generi una coppia di conigli giovani
- i conigli siano immortali

Il semplice bilancio di conigli giovani e adulti porta allora a scrivere le equazioni di stato

$$\begin{aligned}x_1(t+1) &= x_2(t) \\ x_2(t+1) &= x_1(t) + x_2(t) - u(t)\end{aligned}$$

mentre la trasformazione di uscita è

$$y(t) = x_1(t) + x_2(t)$$

Il sistema (che risulta essere proprio) è pertanto individuato dalla terna

$$\begin{aligned}\mathbf{A} &= \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \mathbf{b} &= \begin{vmatrix} 0 \\ -1 \end{vmatrix} \\ \mathbf{c}^T &= \begin{vmatrix} 1 & 1 \end{vmatrix}\end{aligned}$$

Supponendo che all'istante  $t = 0$  lo stato del sistema sia

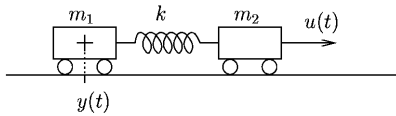
$$\mathbf{x}(0) = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \end{vmatrix}$$

e l'ingresso  $u(t)$  sia identicamente nullo, usando ricorsivamente l'equazione di stato e la trasformazione d'uscita si può determinare la sequenza di uscita  $y(0), y(1), y(2), \dots$  e verificare che ogni elemento della sequenza è uguale alla somma dei due elementi precedenti (numeri di Fibonacci).

♣

**Problema 1 (A, II)**

Si descriva il sistema meccanico riportato in figura con una quaterna  $(\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{c}^T, d)$ , supponendo che le due masse  $m_1$  e  $m_2$  non siano soggette ad attrito e che la molla abbia coefficiente di elasticità  $k$ .



$u(t)$  = forza applicata alla massa  $m_2$   
 $y(t)$  = posizione della massa  $m_1$

**Problema 2 (A, I)**

Per la creazione di borse di studio l'Università dispone di un proprio conto corrente. Il 2 gennaio di ogni anno  $t$  una Fondazione versa su tale conto il 20% del proprio capitale e lo stesso giorno il Ministero effettua un versamento di  $u(t)$  milioni per l'intero anno. Il giorno seguente, l'Università versa metà del proprio capitale all'Opera Universitaria per la creazione di borse di studio. Il capitale rimanente viene impiegato dall'Università al tasso di interesse annuo del 10%. Supponendo che anche la Fondazione fruisca dello stesso tasso di interesse, si determini la quaterna  $(\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{c}^T, d)$  che descrive il sistema, considerando come uscita  $y(t)$  la cifra spesa per le borse di studio e come variabili di stato  $x_1(t)$  e  $x_2(t)$  il capitale dell'Università e della Fondazione all'inizio dell'anno  $t$ .

**2. Modello ARMA e funzione di trasferimento**

La definizione di sistema lineare data nel precedente paragrafo si chiama, in gergo, definizione "interna", perché fa riferimento esplicito allo stato del sistema. Una definizione alternativa è quella "esterna", che coinvolge, invece, soltanto ingresso e uscita. Secondo questa definizione, in un sistema lineare a tempo discreto di ordine  $n$ , una somma pesata degli ultimi  $(n+1)$  valori di ingresso uguaglia, in ogni istante di tempo  $t$ , una somma pesata dei corrispondenti valori di uscita, cioè

$$y(t+n) + \alpha_1 y(t+n-1) + \dots + \alpha_n y(t) = \beta_0 u(t+n) + \beta_1 u(t+n-1) + \dots + \beta_n u(t) \quad (5)$$

Se  $\beta_0 \neq 0$  l'ingresso  $u(t)$  influenza direttamente l'uscita  $y(t)$  e, pertanto, il sistema è improprio. Se, invece,  $\beta_0 = 0$  il sistema è proprio. La (5) viene spesso usata nella forma

$$y(t) = \sum_{i=1}^n (-\alpha_i) y(t-i) + \sum_{i=0}^n \beta_i u(t-i)$$

in cui la prima sommatoria viene chiamata *autoregressione* e la seconda *media mobile*. Per questo motivo la (5) è universalmente nota come modello autoregressivo a media mobile o, più sinteticamente, come *modello ARMA* (dall'inglese Auto Regressive-Moving Average). L'analogo della (5) a tempo continuo è l'equazione differenziale di ordine  $n$

$$y^{(n)}(t) + \alpha_1 y^{(n-1)}(t) + \dots + \alpha_n y^{(0)}(t) = \beta_0 u^{(n)}(t) + \beta_1 u^{(n-1)}(t) + \dots + \beta_n u^{(0)}(t) \quad (6)$$

dove  $u^{(i)}(t)$  e  $y^{(i)}(t)$  sono la derivata  $i$ -esima di ingresso e uscita. Anche questo modello è chiamato (per abuso di linguaggio) modello ARMA. L'interpretazione della legge di Newton vista nell'*Esempio 1* può così essere completata notando che la relazione

$$\ddot{y}(t) = \frac{1}{m} u(t)$$

è un caso particolare della (6) (modello MA, cioè modello ARMA senza termine autoregressivo). La dinamica dell'allevamento di Fibonacci (*Esempio 2*) è, invece, descritta (facile da verificare) dal modello ARMA

$$y(t+2) - y(t+1) - y(t) = -u(t+1) - u(t)$$

Questa è la relazione che viene normalmente usata per generare ricorsivamente i numeri di Fibonacci (annullando l'ingresso e ponendo  $y(0) = y(1) = 1$ ).

Le (5) e (6) possono essere scritte nella forma generale

$$D(p)y(t) = N(p)u(t) \quad (7)$$

dove  $D(\cdot)$  e  $N(\cdot)$  sono due polinomi di grado  $n$

$$D(p) = p^n + \alpha_1 p^{n-1} + \dots + \alpha_n$$

$$N(p) = \beta_0 p^n + \beta_1 p^{n-1} + \dots + \beta_n$$

e  $p$  è un operatore di "anticipo" nel caso di tempo discreto, (cioè  $py(t) = y(t+1)$ ,  $p^2 y(t) = y(t+2)$ , ...) e di "derivazione" nel caso di tempo continuo (cioè  $py(t) = \dot{y}(t)$ ,  $p^2 y(t) = \ddot{y}(t)$ , ...). Assegnare un modello ARMA significa, quindi, assegnare i due

polinomi  $D(\cdot)$  e  $N(\cdot)$  o, equivalentemente, i  $2n+1$  parametri  $\{\alpha_i\}$ ,  $i=1,\dots,n$  e  $\{\beta_i\}$ ,  $i=0,\dots,n$ . Spesso il simbolo  $p$  nella (7) viene sostituito da  $z$  o da  $s$  a seconda che il tempo sia discreto o continuo. Così, ad esempio, la legge di Newton (*Esempio 1*) è individuata da

$$D(s) = s^2 \quad N(s) = \frac{1}{m}$$

e l'allevamento di Fibonacci (*Esempio 2*) da

$$D(z) = z^2 - z - 1 \quad N(z) = -z - 1$$

Nel caso che i due polinomi  $D(\cdot)$  e  $N(\cdot)$  siano primi tra loro (cioè non abbiano zeri in comune), il modello ARMA si dice di *trasferimento*. In questi casi, dato che il polinomio  $D(\cdot)$  è monico, la coppia  $(D(\cdot), N(\cdot))$  è ricavabile dal rapporto  $N(\cdot)/D(\cdot)$ , noto come *funzione di trasferimento* e indicato nel seguito con  $G(\cdot)$ , cioè

$$G(p) = \frac{N(p)}{D(p)} \quad (8)$$

Se, invece, il modello ARMA non è di trasferimento, cioè se

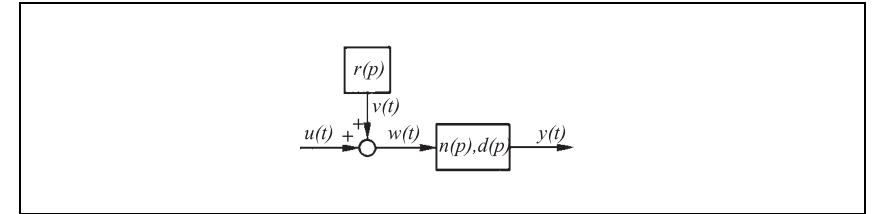
$$\begin{aligned} N(p) &= r(p)n(p) \\ D(p) &= r(p)d(p) \end{aligned} \quad (9)$$

con  $n(\cdot)$  e  $d(\cdot)$  primi, la funzione di trasferimento (8) risulta uguale a  $n(p)/d(p)$ . Gli zeri di  $n(\cdot)$  e  $d(\cdot)$  si chiamano, rispettivamente *zeri* e *poli* della funzione di trasferimento. Tenendo conto delle (7) e (9) si può verificare che un modello ARMA può essere scomposto, come mostrato in *Fig. 2*, in un modello ARMA di trasferimento individuato dalla coppia di polinomi primi  $(n(\cdot), d(\cdot))$

$$d(p)y(t) = n(p)w(t) \quad (10)$$

e in un modello AR individuato dai polinomi  $(0, r(\cdot))$ ,

$$r(p)v(t) = 0 \quad (11)$$



**Figura 2** Scomposizione di un modello ARMA  $(D(p), N(p))$  in un modello ARMA di trasferimento  $(n(p), d(p))$  e in un modello AR  $(0, r(p))$

Infatti, moltiplicando la (10) per  $r(p)$  e tenendo conto della (11) e del fatto che

$$w(t) = v(t) + u(t)$$

si ottiene la (7) con  $N(p)$  e  $D(p)$  dati dalla (9). Lo schema di *Fig. 2* mette in evidenza che la funzione di trasferimento  $G(p) = n(p)/d(p)$  identifica esclusivamente una parte del modello ARMA. In altre parole, la conoscenza della sola funzione di trasferimento non permette in generale di calcolare l'uscita di un sistema a partire dal suo ingresso, a meno che il segnale  $v(\cdot)$  sia identicamente nullo, il che si verifica quando le condizioni iniziali del modello AR (11) sono nulle.

### 3. Calcolo della funzione di trasferimento e realizzazione

Avendo dato due diverse definizioni di sistema dinamico (una interna e una esterna) è importante capire come si possa passare da una descrizione all'altra.

Il problema del calcolo delle relazioni ingresso-uscita (cioè del modello ARMA e della funzione di trasferimento) di un sistema assegnato mediante una quaterna  $(\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{c}^T, d)$  può essere ben inquadrato soltanto dopo aver introdotto le nozioni di raggiungibilità e osservabilità. Per ora notiamo che le (1) e (3), ricordando il significato dell'operatore  $p$ , possono essere scritte nella forma

$$p\mathbf{x}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}u(t)$$

per cui

$$\mathbf{x}(t) = (p\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{b}u(t)$$

Dalle (2) e (4) segue allora che

$$y(t) = [\mathbf{c}^T (\mathbf{p}\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{b} + d] u(t)$$

e un confronto con le (7) e (8) fornisce

$$G(p) = \mathbf{c}^T (\mathbf{p}\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{b} + d \tag{12}$$

Per l'inversione della matrice  $(\mathbf{p}\mathbf{I} - \mathbf{A})$  di dimensioni  $n \times n$ , si può procedere nel modo seguente (metodo di *Souriau*). Posta la matrice  $(\mathbf{p}\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$  nella forma

$$(\mathbf{p}\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = \frac{1}{\Delta_A(p)} \mathbf{P}(p)$$

dove  $\mathbf{P}(p)$  è una matrice  $n \times n$  di polinomi di grado minore di  $n$  e  $\Delta_A(p)$  è il polinomio caratteristico della matrice  $\mathbf{A}$ ,  $\Delta_A(p)$  e  $\mathbf{P}(p)$  si calcolano con le due formule seguenti

$$\begin{aligned} \Delta_A(p) &= p^n + \alpha_1 p^{n-1} + \dots + \alpha_n \\ \mathbf{P}(p) &= \mathbf{P}_0 p^{n-1} + \mathbf{P}_1 p^{n-2} + \dots + \mathbf{P}_{n-1} \end{aligned}$$

dove

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_0 &= \mathbf{I} & \alpha_1 &= -\text{tr}(\mathbf{P}_0 \mathbf{A}) \\ \mathbf{P}_1 &= \mathbf{P}_0 \mathbf{A} + \alpha_1 \mathbf{I} & \alpha_2 &= -\frac{1}{2} \text{tr}(\mathbf{P}_1 \mathbf{A}) \\ \mathbf{P}_2 &= \mathbf{P}_1 \mathbf{A} + \alpha_2 \mathbf{I} & \alpha_3 &= -\frac{1}{3} \text{tr}(\mathbf{P}_2 \mathbf{A}) \\ &\vdots & & \vdots \\ \mathbf{P}_{n-1} &= \mathbf{P}_{n-2} \mathbf{A} + \alpha_{n-1} \mathbf{I} & \alpha_n &= -\frac{1}{n} \text{tr}(\mathbf{P}_{n-1} \mathbf{A}) \end{aligned}$$

Se, a conti fatti, la funzione di trasferimento  $G(p) = n(p)/d(p)$  ha il polinomio  $d(p)$  di grado  $n$ , allora dalle formule di *Souriau* segue che

$$d(p) = D(p) = \Delta_A(p)$$

e il modello ARMA  $(N(p), D(p))$  del sistema è deducibile dalla funzione di trasferimento. Inoltre, in tal caso, i poli della funzione di trasferimento sono  $n$  e coincidono con gli autovalori della matrice  $\mathbf{A}$ . Nel caso, invece, il grado di  $d$  sia minore di  $n$ , i poli della funzione di trasferimento sono meno di  $n$ , ma coincidono sempre con alcuni autovalori della matrice  $\mathbf{A}$ .

Il problema della determinazione di una quaterna  $(\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{c}^T, d)$  che abbia come modello ARMA un modello  $(N(p), D(p))$  assegnato è noto come problema della *realizzazione* (con lo stesso nome si indica anche la quaterna  $(\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{c}^T, d)$  che risolve il problema). Per affrontare questo tema è, tuttavia, necessario aver approfondito le nozioni di raggiungibilità e osservabilità. Per ora accontentiamoci di affermare (la dimostrazione non è immediata) che una particolare realizzazione, detta in *forma canonica di ricostruzione*, di un assegnato modello ARMA

$$\begin{aligned} D(p) &= p^n + \alpha_1 p^{n-1} + \dots + \alpha_n \\ N(p) &= \beta_0 p^n + \beta_1 p^{n-1} + \dots + \beta_n \end{aligned}$$

con  $D$  e  $N$  anche non primi, è la quaterna

$$\mathbf{A}_r = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -\alpha_n \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -\alpha_{n-1} \\ 0 & 1 & \dots & 0 & -\alpha_{n-2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -\alpha_1 \end{vmatrix} \quad \mathbf{b}_r = \begin{vmatrix} \gamma_n \\ \gamma_{n-1} \\ \gamma_{n-2} \\ \vdots \\ \gamma_1 \end{vmatrix}$$

$$\mathbf{c}_r^T = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad \mathbf{d}_r = \beta_0$$

con

$$\gamma_i = \beta_i - \beta_0 \alpha_i \quad i = 1, \dots, n$$

Un'altra realizzazione molto nota, ma valida, tuttavia, solo nel caso di polinomi  $N$  e  $D$  coprimi (cioè nel caso di modelli ARMA di trasferimento) è la *forma canonica di controllo* data da

$$\mathbf{A}_c = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -\alpha_n & -\alpha_{n-1} & -\alpha_{n-2} & \dots & -\alpha_1 \end{vmatrix} \quad \mathbf{b}_c = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix}$$

$$\mathbf{c}_c^T = \begin{vmatrix} \gamma_n & \gamma_{n-1} & \gamma_{n-2} & \dots & \gamma_1 \end{vmatrix} \quad \mathbf{d}_c = \beta_0$$

con

$$\gamma_i = \beta_i - \beta_0 \alpha_i \quad i = 1, \dots, n$$



È opportuno notare che

$$(\mathbf{A}_r, \mathbf{b}_r, \mathbf{c}_r^T, d_r) = (\mathbf{A}_c^T, \mathbf{c}_c, \mathbf{b}_c^T, d_c)$$

perché su questa formula torneremo quando parleremo del principio di dualità.

**Esempio 3 (numeri di Fibonacci)**

Si consideri il modello ARMA

$$D(z) = z^2 - z - 1 \quad N(z) = -z - 1$$

che, come abbiamo visto, è il modello ARMA dell'allevamento di Fibonacci descritto nell'Esempio 2. Le realizzazioni in forma canonica di controllo e ricostruzione di questo modello ARMA sono

$$\mathbf{A}_c = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \quad \mathbf{b}_c = \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix}$$

$$\mathbf{c}_c^T = \begin{vmatrix} -1 & -1 \end{vmatrix}$$

e

$$\mathbf{A}_r = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \quad \mathbf{b}_r = \begin{vmatrix} -1 \\ -1 \end{vmatrix}$$

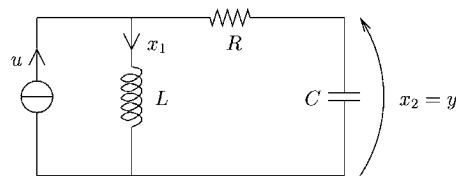
$$\mathbf{c}_r^T = \begin{vmatrix} 0 & 1 \end{vmatrix}$$

e sono, quindi, diverse dalla terna  $(\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{c}^T)$  proposta nell'Esempio 2.



**Problema 3 (A, I)**

Si descriva il circuito elettrico riportato in figura come sistema lineare  $(\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{c}^T, d)$ .



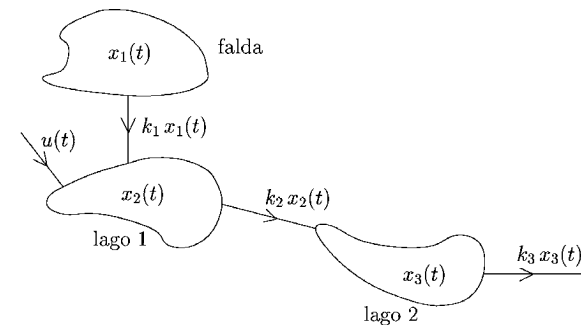
Indi si determini il modello ARMA e la funzione di trasferimento  $G(s)$  del sistema.

**Problema 4 (A, II)**

Si consideri una scuola media in cui  $u(t)$  è il numero di diplomati delle elementari nell'anno  $t$  e  $y(t)$  è il numero di diplomati della scuola media nell'anno  $t$ . Si supponga che la porzione di bocciati sia la stessa nelle tre classi e la si indichi con  $\beta$ . Si ricavi una formula per effettuare la previsione dei diplomati della scuola media nell'anno  $t+1$  a partire dai dati di diplomati della elementare e della media negli anni  $t, t-1, t-2, \dots$

**Problema 5 (A, III)**

Si consideri il sistema idrico rappresentato in figura, in cui i volumi d'acqua presenti nella falda e nei due laghi sono indicati con  $x_1(t), x_2(t)$  e  $x_3(t)$ , la portata di afflusso al primo lago è indicata con  $u(t)$  e le portate di deflusso sono indicate con  $k_1 x_1(t), k_2 x_2(t)$  e  $k_3 x_3(t)$



Supponendo che l'uscita di interesse sia la portata di deflusso del primo lago (cioè  $y(t) = k_2 x_2(t)$ ), si descriva il sistema con la terna  $(\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{c}^T)$  e si determini poi il modello ARMA e la funzione di trasferimento del sistema. Si verifichi che il sistema  $(\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{c}^T)$  è del terzo ordine, il modello ARMA del secondo ordine e la funzione di trasferimento del primo ordine.

**Problema 6 (T, III)**

Si verifichi che la funzione di trasferimento di un ritardatore puro (ingresso  $u(t)$ , uscita  $y(t) = u(t-\tau)$ ) è  $G(s) = e^{-s\tau}$ .

#### 4. Aggregati di sottosistemi e formula di Mason

Spesso alcuni sistemi dinamici interagiscono tra loro e l'aggregato che così si ottiene è, pur esso, un sistema dinamico. Due sistemi dinamici  $\Sigma_1$  e  $\Sigma_2$  possono essere collegati in tre modi: *cascata*, *parallelo* e *retroazione*. Per questo dobbiamo tener conto che se  $\mathbf{x}^{(1)}$  e  $\mathbf{x}^{(2)}$  sono i vettori di stato di  $\Sigma_1$  e  $\Sigma_2$ , il vettore di stato  $\mathbf{x}$  di  $\Sigma$  sarà  $\mathbf{x} = [\mathbf{x}^{(1)T} \ \mathbf{x}^{(2)T}]^T$ . In particolare, detti  $\Sigma_i = (\mathbf{A}_i, \mathbf{b}_i, \mathbf{c}_i^T, d_i)$ ,  $i = 1, 2$ , i due sottosistemi, siamo interessati a determinare il sistema aggregato  $\Sigma = (\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{c}^T, d)$ .

##### Cascata

Due sistemi sono collegati in cascata (Fig. 3) quando l'uscita del primo sistema è l'ingresso del secondo.

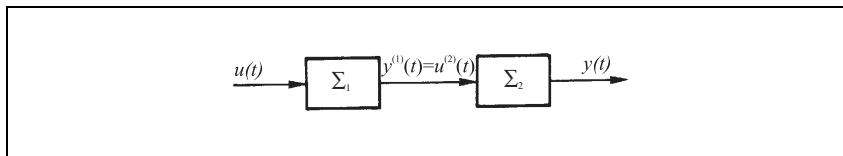


Figura 3 Due sistemi collegati in cascata

Le equazioni di stato di  $\Sigma$  sono pertanto

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}^{(1)}(t) &= \mathbf{A}_1 \mathbf{x}^{(1)}(t) + \mathbf{b}_1 u(t) \\ \dot{\mathbf{x}}^{(2)}(t) &= \mathbf{A}_2 \mathbf{x}^{(2)}(t) + \mathbf{b}_2 (\mathbf{c}_1^T \mathbf{x}^{(1)}(t) + d_1 u(t))\end{aligned}$$

mentre la trasformazione di uscita è data da

$$y(t) = \mathbf{c}_2^T \mathbf{x}^{(2)}(t) + d_2 (\mathbf{c}_1^T \mathbf{x}^{(1)}(t) + d_1 u(t))$$

In conclusione,  $\Sigma$  è individuato dalla seguente quaterna

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{b}_2 \mathbf{c}_1^T & \mathbf{A}_2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{b}_2 d_1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{c}^T = \begin{bmatrix} d_2 \mathbf{c}_1^T & \mathbf{c}_2^T \end{bmatrix} \quad d = \begin{bmatrix} d_1 d_2 \end{bmatrix}$$

Si noti che la matrice  $\mathbf{A}$  è triangolare a blocchi, per cui i suoi autovalori sono quelli delle matrici  $\mathbf{A}_1$  e  $\mathbf{A}_2$ .

##### Parallelo

Due sistemi sono collegati in parallelo (Fig. 4) quando hanno l'ingresso in comune e le loro uscite si sommano.

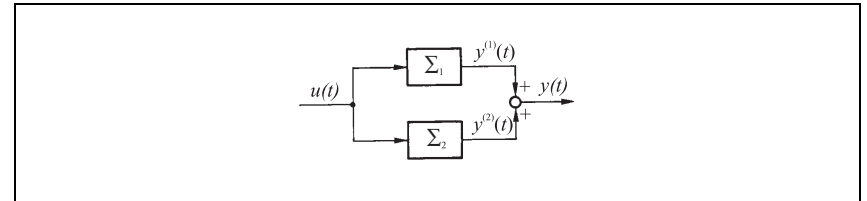


Figura 4 Due sistemi collegati in parallelo

È immediato verificare che l'aggregato  $\Sigma$  è individuato dalle seguenti quattro matrici

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{b}_2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{c}^T = \begin{bmatrix} \mathbf{c}_1^T & \mathbf{c}_2^T \end{bmatrix} \quad d = \begin{bmatrix} d_1 + d_2 \end{bmatrix}$$

Anche in questo caso la matrice  $\mathbf{A}$  è triangolare (anzi diagonale) a blocchi così che i suoi autovalori sono quelli delle matrici  $\mathbf{A}_1$  e  $\mathbf{A}_2$ .

##### Retroazione

Due sistemi sono collegati in retroazione (Fig. 5) quando l'ingresso del primo è la somma di un ingresso esterno  $u$  e dell'uscita del secondo e l'ingresso del secondo è l'uscita del primo.

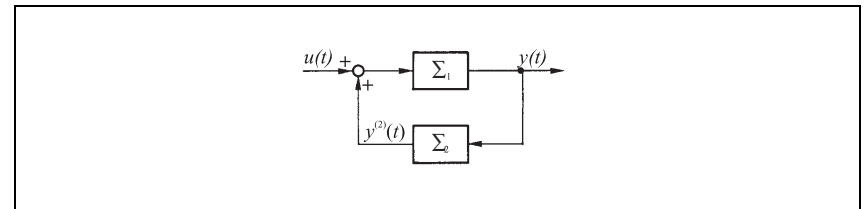


Figura 5 Due sistemi collegati in retroazione ( $\Sigma_1$  è in linea di andata e  $\Sigma_2$  in linea di retroazione)

Naturalmente gli aggregati di sottosistemi possono anche essere studiati dal punto di vista esterno. Anzi, il modello ARMA e la funzione di trasferimento di  $\Sigma$  sono facilmente determinabili a partire dai modelli ARMA e dalle funzioni di trasferimento di tutti i sottosistemi. Per renderci conto di ciò, analizziamo innanzitutto il caso dei collegamenti in cascata, parallelo e retroazione di due sottosistemi.

### Cascata

Con riferimento alla Fig. 3 supponiamo che  $\Sigma_1 = (N_1(p), D_1(p))$  e  $\Sigma_2 = (N_2(p), D_2(p))$ . Ciò significa che il modello ARMA del primo sottosistema è

$$D_1(p)y^{(1)}(t) = N_1(p)u(t)$$

Applicando, allora, a entrambi i membri di questa relazione l'operatore  $N_2(p)$  e notando che  $y^{(1)} = u^{(2)}$  otteniamo

$$N_2(p)D_1(p)u^{(2)}(t) = N_2(p)N_1(p)u(t)$$

Ma  $N_2D_1 = D_1N_2$  e  $N_2N_1 = N_1N_2$  perché derivare (o anticipare) una funzione prima  $r$  volte e poi  $s$  volte è equivalente a derivarla (o anticiparla) prima  $s$  volte e poi  $r$  volte, per cui si può scrivere

$$D_1(p)N_2(p)u^{(2)}(t) = N_1(p)N_2(p)u(t)$$

D'altra parte, la relazione ARMA del secondo sottosistema è

$$D_2(p)y(t) = N_2(p)u^{(2)}(t)$$

per cui, in definitiva, si ottiene

$$D_1(p)D_2(p)y(t) = N_1(p)N_2(p)u(t)$$

In altre parole, se due sistemi  $\Sigma_1$  e  $\Sigma_2$  sono collegati in cascata, il sistema risultante  $\Sigma$  è caratterizzato da un modello ARMA individuato dai seguenti due polinomi

$$N(p) = N_1(p)N_2(p) \quad D(p) = D_1(p)D_2(p)$$

Ciò significa che la funzione di trasferimento  $G(p) = N(p)/D(p)$  di  $\Sigma$  si ottiene moltiplicando tra loro le due funzioni di trasferimento  $G_1(p)$  e  $G_2(p)$  dei due sottosistemi, cioè

$$G(p) = G_1(p)G_2(p)$$

Questo risultato permette di concludere che l'ordine secondo cui i due sottosistemi vengono disposti in cascata non influenza la funzione di trasferimento dell'aggregato.

### Parallelo

Facendo riferimento alla Fig. 4 e procedendo come nel caso del collegamento in cascata è facile dimostrare che la funzione di trasferimento di  $\Sigma$  è

$$G(p) = G_1(p) + G_2(p)$$

In altre parole, la funzione di trasferimento di un sistema costituito da due sottosistemi collegati in parallelo è la somma delle due funzioni di trasferimento.

### Retroazione

Nel caso di due sistemi  $\Sigma_1$  e  $\Sigma_2$  collegati in retroazione come mostrato in Fig. 5 si perviene, invece, alla formula

$$G(p) = \frac{G_1(p)}{1 - G_1(p)G_2(p)}$$

Questa formula, utilissima per l'analisi dei sistemi retroazionati, vale per il collegamento mostrato in Fig. 5 in cui la retroazione è detta *positiva* perché il segnale  $y^{(2)}$  proveniente dalla retroazione viene sommato al segnale esterno  $u$ . Nel caso si faccia, invece, riferimento ad uno schema con *retroazione negativa*

$$u^{(1)} = u - y^{(2)}$$

la formula da usare risulta ovviamente

$$G(p) = \frac{G_1(p)}{1 + G_1(p)G_2(p)}$$

Tale formula viene spesso enunciata a parole, dicendo che la funzione di trasferimento di un sistema retroazionato negativamente è il rapporto tra la funzione di trasferimento in linea di andata ( $G_1$ ) e la funzione di trasferimento d'anello ( $G_1G_2$ ) aumentata dell'unità. Chiamare funzione di trasferimento d'anello la funzione  $G_1G_2$  è pienamente giustificato, dato che nell'anello i due sistemi  $\Sigma_1$  e  $\Sigma_2$  sono in cascata l'uno all'altro.

**Formula di Mason**

La formula di Mason generalizza quanto appena visto e permette di calcolare la funzione di trasferimento  $G(p)$  di un qualsiasi aggregato di sottosistemi. Nell'ipotesi che nello schema che definisce l'aggregato siano usati solo nodi sommatori (cioè nell'ipotesi che nell'aggregato vengano soltanto effettuate somme tra segnali) la formula è la seguente

$$G(p) = \frac{\sum_k C_k(p)\Delta_k(p)}{\Delta(p)}$$

dove  $C_k(p)$ ,  $\Delta(p)$  e  $\Delta_k(p)$  si chiamano, rispettivamente, *funzione di trasferimento del k-esimo cammino diretto* (cioè non contenente cicli) tra ingresso e uscita, *determinante* dell'aggregato, e *determinante ridotto* rispetto al  $k$ -esimo cammino diretto. La funzione di trasferimento  $C_k(p)$  è semplicemente il prodotto delle funzioni di trasferimento di tutti i sistemi che costituiscono il  $k$ -esimo cammino diretto. Il determinante  $\Delta(p)$  è, invece, dato da

$$\Delta(p) = 1 - \sum_i L_i(p) + \sum_i \sum_j L_i(p)L_j(p) - \sum_i \sum_j \sum_k L_i(p)L_j(p)L_k(p) + \dots$$

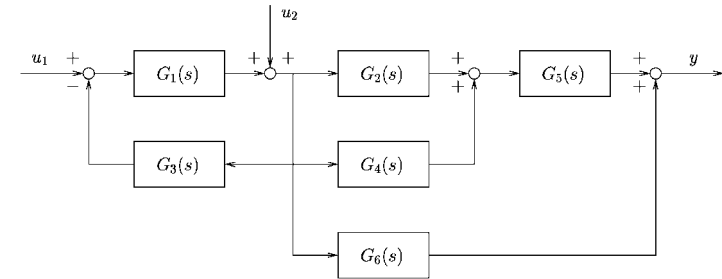
dove  $L_i(p)$  è la funzione di trasferimento dell' $i$ -esimo cammino chiuso (anello), cioè il prodotto delle funzioni di trasferimento di tutti i sistemi che costituiscono l' $i$ -esimo percorso chiuso esistente nell'aggregato. Nella formula, la prima sommatoria è estesa a tutti gli anelli, la seconda alle coppie di anelli disgiunti (cioè che non si toccano) e così via. Infine, il determinante ridotto  $\Delta_k$  è il determinante  $\Delta$  privato di tutti i termini relativi ad anelli non disgiunti (cioè toccati) dal  $k$ -esimo cammino diretto. In alcuni casi può non essere facile individuare tutti i percorsi diretti e tutti gli anelli per ispezione del grafo rappresentante l'aggregato (usualmente chiamato *schema a blocchi*). In molti casi di interesse pratico, l'applicazione della formula di Mason è tuttavia immediata, soprattutto qualora non esistano anelli disgiunti.

**Problema 7 (A, I)**

Si determini la funzione di trasferimento  $G(z)$  di un filtro numerico così costituito: l'ingresso (discreto)  $u(t)$  viene prima "derivato" (naturalmente in termini "discreti") e poi mediato uniformemente su tre istanti successivi dando così luogo a  $y(t)$ . (Si consiglia di rappresentare il filtro con uno schema a blocchi con ritardi unitari  $z^{-1}$  e quindi di calcolare  $G(z)$ ).

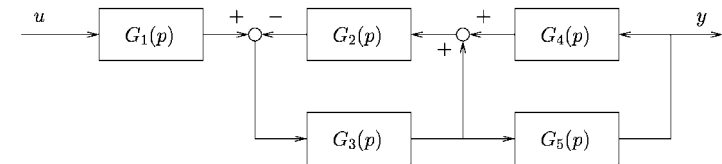
**Problema 8 (N, I)**

Determinare, usando la formula di Mason, le due funzioni di trasferimento tra gli ingressi  $u_1$  e  $u_2$  e l'uscita  $y$



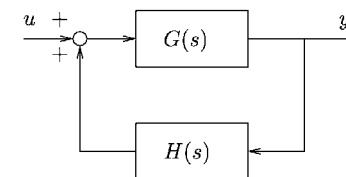
**Problema 9 (N, I)**

Si calcoli la funzione di trasferimento del seguente sistema



**Problema 10 (T, II)**

Si calcoli la funzione di trasferimento del sistema



supponendo che

$$G(s) = 1 \quad H(s) = \frac{s-1}{s}$$

Si commenti il risultato, dopo aver notato che  $G(s)$  e  $H(s)$  sono funzioni di trasferimento di sistemi impropri.

### 5. Cambiamento di coordinate e sistemi equivalenti

La quaterna  $(\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{c}^T, d)$  con cui si descrive un sistema lineare  $\Sigma$  dipende, ovviamente, dalle unità di misura prescelte per individuare il tempo e le variabili di ingresso, stato e uscita e dall'ordine di numerazione delle variabili di stato. Ma, fattori di scala e di ordinamento a parte, anche la scelta delle variabili da considerare come variabili di stato non è univoca e si ripercuote pertanto sulla quaterna  $(\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{c}^T, d)$  che individua un sistema  $\Sigma$ . Ad esempio, in un sistema chimico caratterizzato da due componenti si potrebbero considerare come variabili di stato le concentrazioni  $x_1$  e  $x_2$  di tali componenti o, alternativamente, la somma  $z_1$  e la differenza  $z_2$  delle concentrazioni. Naturalmente, la quaterna  $(\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{c}^T, d)$  corrispondente alle variabili di stato  $(x_1, x_2)$  sarà diversa da quella corrispondente alle variabili  $(z_1, z_2)$  anche se il sistema è, dal punto di vista fisico, sempre lo stesso. Per questo motivo le due quaterne sono chiamate *equivalenti*. Per specificare la relazione esistente tra quaterne equivalenti è pertanto necessario determinare l'effetto di un cambiamento di coordinate

$$\mathbf{z} = \mathbf{T}\mathbf{x}$$

perché di questo si tratta in ultima analisi. Nel caso del sistema chimico, ad esempio, il cambiamento di coordinate  $\mathbf{z} = \mathbf{T}\mathbf{x}$  è dato da

$$\begin{vmatrix} z_1 \\ z_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 - x_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \end{vmatrix}$$

È immediato verificare che un cambiamento di coordinate  $\mathbf{z} = \mathbf{T}\mathbf{x}$  trasforma il sistema a tempo discreto (1), (2) nel sistema (detto equivalente)

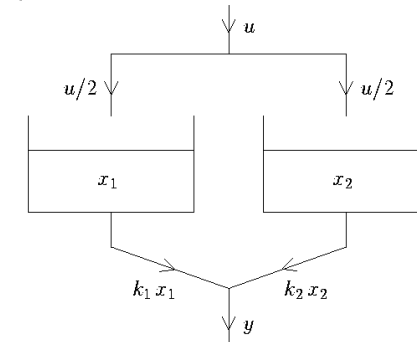
$$\begin{aligned} \mathbf{z}(t+1) &= \mathbf{T}\mathbf{A}\mathbf{T}^{-1}\mathbf{z}(t) + \mathbf{T}\mathbf{b}u(t) \\ y(t) &= \mathbf{c}^T\mathbf{T}^{-1}\mathbf{z}(t) + du(t) \end{aligned}$$

Analogamente il sistema a tempo continuo (3), (4) viene trasformato nel sistema

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{z}}(t) &= \mathbf{T}\mathbf{A}\mathbf{T}^{-1}\mathbf{z}(t) + \mathbf{T}\mathbf{b}u(t) \\ y(t) &= \mathbf{c}^T\mathbf{T}^{-1}\mathbf{z}(t) + du(t) \end{aligned}$$

### Problema 11 (A, II)

Il sistema idraulico rappresentato in figura



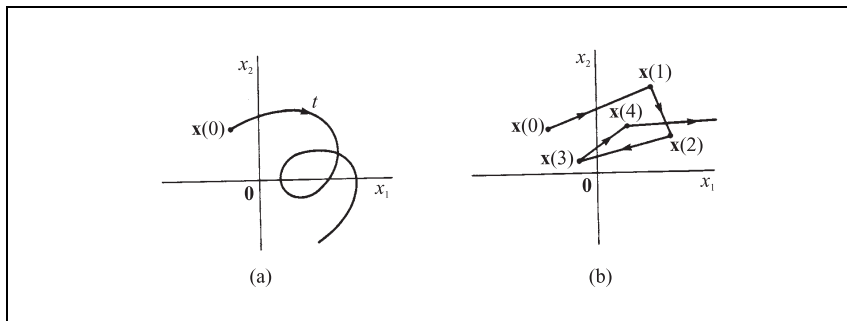
è descritto dalla terna

$$\mathbf{A} = \begin{vmatrix} -30 & 0 \\ 0 & -60 \end{vmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{vmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{vmatrix} \\ \mathbf{c}^T = \begin{vmatrix} 30 & 60 \end{vmatrix}$$

se i volumi sono misurati in  $m^3$ , il tempo in minuti e le portate in  $m^3/\text{minuto}$ . Da che terna è descritto il sistema se i volumi sono misurati in litri, il tempo in secondi e le portate in litri/secondo?

### 6. Movimento, traiettoria ed equilibrio

Fissato lo stato iniziale  $\mathbf{x}(0)$  e l'ingresso  $u(t)$  per  $t \geq 0$ , le equazioni di stato (1) e (3) ammettono una unica soluzione  $\mathbf{x}(t)$  per  $t \geq 0$  (il fatto è evidente per i sistemi a tempo discreto, mentre per i sistemi a tempo continuo è conseguenza di risultati classici sull'esistenza e unicità della soluzione delle equazioni differenziali ordinarie). La funzione  $\mathbf{x}(\cdot)$  così individuata si chiama *movimento*, mentre l'insieme  $\{\mathbf{x}(t), t \geq 0\}$  nello spazio di stato  $R^n$  si chiama *traiettoria* o *orbita*. Nel caso dei sistemi a tempo continuo la traiettoria è quindi una linea radicata nel punto  $\mathbf{x}(0)$  e con un ben preciso verso di percorrenza, quello del tempo (vedi Fig. 6a). Nel caso dei sistemi a tempo discreto la traiettoria è invece una successione ordinata di punti  $\{\mathbf{x}(0), \mathbf{x}(1), \dots\}$  che, per motivi di chiarezza, è però consuetudine congiungere con dei segmenti rettilinei orientati come mostrato in Fig. 6b.



**Figura 6** Traiettorie in sistemi del secondo ordine: (a) sistema a tempo continuo; (b) sistema a tempo discreto

Può accadere che il movimento  $\mathbf{x}(\cdot)$  corrispondente a un particolare stato iniziale  $\mathbf{x}(0)$  e a una particolare funzione d'ingresso sia periodico di periodo  $T$ , cioè

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(t + T) \quad \forall t \tag{13}$$

In questo caso la traiettoria risulta essere una linea chiusa (ciclo) ripetutamente percorsa ogni  $T$  unità di tempo. Un caso particolare di quello dei cicli si presenta quando lo stato del sistema non varia nel tempo, così che il ciclo è rappresentato da un punto  $\bar{\mathbf{x}}$  detto *stato di equilibrio*. A questo proposito diamo la seguente definizione.

**Definizione 1** (sistema all'equilibrio)

Un sistema si dice all'*equilibrio* se ingresso e stato (e, quindi, anche uscita) sono costanti, cioè se

$$u(t) = \bar{u} \quad \mathbf{x}(t) = \bar{\mathbf{x}} \quad y(t) = \bar{y} \quad \forall t$$

Il vettore  $\bar{\mathbf{x}}$  si chiama stato di equilibrio.

Poiché nei sistemi a tempo continuo,  $\mathbf{x}(t) = \bar{\mathbf{x}} \quad \forall t$  implica  $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{0}$ , ne consegue che in tali sistemi

$$\mathbf{A}\bar{\mathbf{x}} + \mathbf{b}\bar{u} = \mathbf{0} \tag{14}$$

$$\bar{y} = \mathbf{c}^T \bar{\mathbf{x}} + d\bar{u} \tag{15}$$

Se  $\mathbf{A}$  è non singolare (cioè se  $\det \mathbf{A} \neq 0$  o, equivalentemente, se  $\mathbf{A}$  non ha autovalori nulli), esiste una sola soluzione  $\bar{\mathbf{x}}$  della (14) per ogni  $\bar{u}$  e, pertanto, anche una sola soluzione  $\bar{y}$  della (15), formalmente date da

$$\bar{\mathbf{x}} = -\mathbf{A}^{-1} \mathbf{b}\bar{u} \quad \bar{y} = (d - \mathbf{c}^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{b})\bar{u} \tag{16}$$

Nel caso  $\mathbf{A}$  sia invece singolare ( $\det \mathbf{A} = 0$ ), fissato  $\bar{u}$  o non esistono soluzioni  $\bar{\mathbf{x}}$ ,  $\bar{y}$  delle (14), (15) o ne esistono infinite.

Nel caso dei sistemi a tempo discreto le (14) e (15) devono essere sostituite dalle relazioni

$$\begin{aligned} (\mathbf{I} - \mathbf{A})\bar{\mathbf{x}} &= \mathbf{b}\bar{u} \\ \bar{y} &= \mathbf{c}^T \bar{\mathbf{x}} + d\bar{u} \end{aligned}$$

per cui l'unicità dello stato (e dell'uscita) di equilibrio per ogni fissato ingresso  $\bar{u}$  è garantita dalla non singolarità della matrice  $(\mathbf{I} - \mathbf{A})$ , cioè del fatto che

$$\det(\mathbf{I} - \mathbf{A}) \neq 0$$

o, equivalentemente, dal fatto che  $\mathbf{A}$  non abbia autovalori unitari. In tale caso si ha

$$\bar{\mathbf{x}} = (\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{b}\bar{u} \quad \bar{y} = (d + \mathbf{c}^T (\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{b})\bar{u} \tag{17}$$

Le (16) e (17) mostrano comunque che nei casi non singolari il legame tra ingresso di equilibrio e uscita di equilibrio è lineare. Poiché nei sistemi ad un solo ingresso e uscita è d'uso definire il *guadagno* del sistema come il rapporto  $\mu$  tra uscita e ingresso all'equilibrio

$$\mu = \frac{\bar{y}}{\bar{u}}$$

ne consegue che per i sistemi a tempo continuo vale la formula

$$\mu = d - \mathbf{c}^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{b}$$

mentre per i sistemi a tempo discreto vale la formula

$$\mu = d + \mathbf{c}^T (\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{b}$$

Naturalmente, queste stesse formule mostrano che non ha senso parlare di guadagno nei casi singolari.

È importante notare che il calcolo del guadagno è immediato quando si conosca la relazione ingresso-uscita (6) di un sistema a tempo continuo, perché la condizione di equilibrio impone  $y^{(i)} = u^{(i)} = 0$ ,  $i = 1, \dots, n$ ,  $y^{(0)} = \bar{y}$  e  $u^{(0)} = \bar{u}$ , per cui

$$\mu = \frac{\beta_n}{\alpha_n} \quad (18)$$

Nel caso analogo dei sistemi a tempo discreto risulta invece (vedi (5))

$$\mu = \frac{\sum_{i=0}^n \beta_i}{1 + \sum_{i=1}^n \alpha_i} \quad (19)$$

Si noti che, indicata con  $G(s)$  la funzione di trasferimento di un sistema a tempo continuo, la (18) è equivalente a  $\mu = G(0)$ , per cui il guadagno  $\mu$  è uguale alla funzione di trasferimento valutata per  $s = 0$ . Nel caso dei sistemi a tempo discreto con funzione di trasferimento  $G(z)$  dalla (19) segue invece che  $\mu = G(1)$ , cioè il guadagno è uguale alla funzione di trasferimento valutata per  $z = 1$ .

Il calcolo del guadagno è semplice da effettuare anche nel caso di sistemi costituiti da aggregati di sottosistemi ad un solo ingresso e una sola uscita. E' infatti immediato verificare che il guadagno  $\mu$  di un sistema costituito da due sottosistemi collegati in cascata è il prodotto dei guadagni dei due sottosistemi, cioè

$$\mu = \mu_1 \mu_2$$

mentre per i sistemi collegati in parallelo vale la formula

$$\mu = \mu_1 + \mu_2$$

e per i sistemi collegati in retroazione negativa

$$\mu = \frac{\mu_1}{1 + \mu_1 \mu_2}$$

## 7. Formula di Lagrange e matrice di transizione

Dalle equazioni di stato di un sistema lineare segue che lo stato al generico istante  $t$  è funzione dello stato all'istante iniziale  $t = 0$ , dell'ingresso nell'intervallo di tempo  $[0, t)$  e, ovviamente, della durata  $t$  dell'intervallo di tempo considerato. Una soluzione esplicita, nel senso comune del termine, delle equazioni di stato è possibile soltanto in casi particolarmente semplici (tipicamente, sistemi del primo o secondo ordine). La soluzione può essere, tuttavia, specificata e messa in forma particolarmente utile per la comprensione di molti problemi. Nel caso dei sistemi a tempo continuo, la formula è attribuita a Lagrange; per semplicità, daremo lo stesso nome all'analogia formula valida nel caso dei sistemi a tempo discreto.

### Teorema 1 (formula di Lagrange)

In un sistema lineare a tempo continuo

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}u(t)$$

lo stato  $\mathbf{x}(t)$  per  $t \geq 0$  è dato da (formula di Lagrange)

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t} \mathbf{x}(0) + \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\xi)} \mathbf{b}u(\xi) d\xi \quad (20)$$

dove

$$e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{I} + \mathbf{A}t + \mathbf{A}^2 \frac{t^2}{2!} + \mathbf{A}^3 \frac{t^3}{3!} + \dots \quad (21)$$

Analogamente, in un sistema lineare a tempo discreto

$$\mathbf{x}(t+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}u(t)$$

per  $t \geq 0$ , vale la formula

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{A}^t \mathbf{x}(0) + \sum_{i=0}^{t-1} \mathbf{A}^{t-i-1} \mathbf{b}u(i) \quad (22)$$

detta anch'essa formula di Lagrange.

Le formule di Lagrange (20) e (22) possono essere compattamente riscritte come

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t)\mathbf{x}(0) + \Psi(t)u_{[0,t)}(\cdot) \quad (23)$$

dove  $\Phi(t)$  e  $\Psi(t)$  sono operatori lineari applicati, rispettivamente, allo stato iniziale  $\mathbf{x}(0)$  e al segmento  $u_{(0,t)}(\cdot)$  di funzione di ingresso  $u(\cdot)$ . Confrontando la (23) con le (20) e (22) segue che la matrice  $\Phi(t)$ , detta *matrice di transizione*, è data da

$$\Phi(t) = \begin{cases} e^{\mathbf{A}t} & \text{nei sistemi a tempo continuo} \\ \mathbf{A}^t & \text{nei sistemi a tempo discreto} \end{cases}$$

La (23) afferma che lo stato del sistema è in ogni istante dato dalla somma di due contributi, il primo dipendente linearmente dallo stato iniziale e il secondo dipendente linearmente dall'ingresso. Questi due contributi al movimento di un sistema dinamico si chiamano, rispettivamente, *movimento libero* e *movimento forzato*. Il motivo di questa denominazione è ovvio:  $\Phi(t)\mathbf{x}(0)$  rappresenta l'evoluzione del sistema "libero" cioè del sistema a cui è applicato ingresso nullo (o, come si dice a volte in gergo, del sistema senza ingresso), mentre  $\Psi(t)u_{(0,t)}(\cdot)$  rappresenta l'evoluzione del sistema inizialmente scarico ( $\mathbf{x}(0)=0$ ) ma forzato dall'ingresso  $u(\cdot)$ . Applicando la trasformazione di uscita alla (23) si ottiene

$$y(t) = \mathbf{c}^T \Phi(t) \mathbf{x}(0) + \mathbf{c}^T \Psi(t) u_{(0,t)}(\cdot) + du(t) \quad (24)$$

che evidenzia che anche l'uscita è la somma di una evoluzione libera e di una evoluzione forzata.

La (24), letta in modo opportuno, permette di formulare il cosiddetto *principio di sovrapposizione (delle cause e degli effetti)*, spesso evocato in trattazioni relative a sistemi dinamici lineari. Nella formulazione corretta del principio, le cause sono lo stato iniziale  $\mathbf{x}(0)$  e la funzione d'ingresso  $u(\cdot)$  definita per  $t \geq 0$  e gli effetti sono rappresentati dall'uscita  $y(\cdot)$  sempre per  $t \geq 0$ .

#### Teorema 2 (principio di sovrapposizione)

Se alle cause ( $\mathbf{x}'(0), u'(\cdot)$ ) corrisponde l'effetto  $y'(\cdot)$  e alle cause ( $\mathbf{x}''(0), u''(\cdot)$ ) corrisponde l'effetto  $y''(\cdot)$  allora, in un sistema lineare, alla combinazione lineare  $\alpha \mathbf{x}'(0) + \beta \mathbf{x}''(0)$ ,  $\alpha u'(\cdot) + \beta u''(\cdot)$  delle cause corrisponde la stessa combinazione lineare  $\alpha y'(\cdot) + \beta y''(\cdot)$  degli effetti.

Tra le formule più usate di ogni disciplina è quasi sempre possibile trovarne alcune che rappresentano la formula di Lagrange applicata a semplici sistemi del primo o del secondo ordine. La legge della caduta dei gravi, la legge di carica e scarica di un circuito RC, la legge secondo cui sale la temperatura di un termometro e quella secondo cui si svuota un serbatoio, sono tutte formule di Lagrange di sistemi a tempo

continuo. Ma la stessa cosa vale anche per leggi che fanno riferimento a sistemi a tempo discreto come mostrato nel seguente esempio.

#### Esempio 4 (ammortamento)

Se un debito iniziale  $D$  viene ammortizzato restituendo per  $N$  anni consecutivi una cifra pari ad  $A$ , il debito  $x$  varia negli anni secondo l'equazione

$$x(t+1) = (1+\rho)x(t) - A$$

dove  $\rho$  è il fattore di interesse annuo. Si può allora applicare la formula di Lagrange (22) con  $t = N$  e  $u(i) = A$  a questo sistema ottenendo

$$x(N) = (1+\rho)^N D - A \sum_{i=0}^{N-1} (1+\rho)^{N-i-1}$$

Imponendo la condizione terminale  $x(N) = 0$  e risolvendo rispetto ad  $A$  si ottiene la famosissima formula dell'ammortamento

$$A = \frac{\rho}{1 - (1+\rho)^{-N}} D$$

♣

La formula di Lagrange non deve, in generale, essere pensata come una formula utile per il calcolo esplicito dell'evoluzione dello stato di un sistema lineare. Questa affermazione è particolarmente semplice da provare nel caso dei sistemi a tempo discreto. In tali sistemi, infatti, lo stato può essere calcolato usando ricorsivamente per  $t = 0, 1, 2, \dots$  l'equazione

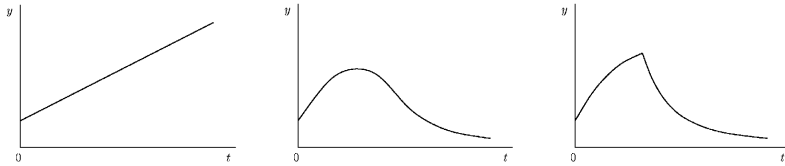
$$\mathbf{x}(t+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}u(t)$$

Così facendo, ad ogni passo sono necessarie  $n^2 + n$  moltiplicazioni e circa altrettante somme, così che il calcolo di  $\mathbf{x}(1), \mathbf{x}(2), \dots, \mathbf{x}(N)$  richiede  $Nn(n+1)$  operazioni elementari. Il calcolo degli stessi vettori per mezzo della (22) è, invece, molto più oneroso perché coinvolge il calcolo delle potenze  $\mathbf{A}^2, \mathbf{A}^3, \dots, \mathbf{A}^N$ , nella matrice  $\mathbf{A}$ , un'operazione che, di per sé, richiede  $Nn^3$  operazioni elementari. L'importanza della formula di Lagrange è quindi in massima parte legata agli aspetti concettuali e formali della teoria dei sistemi lineari.



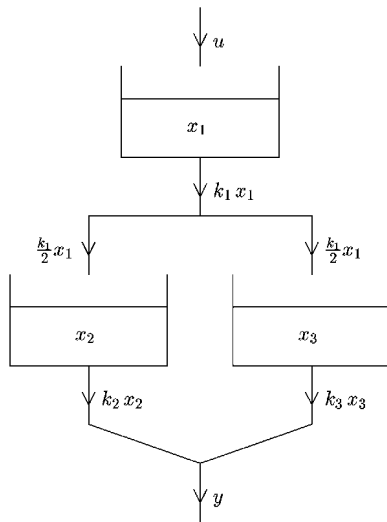
**Problema 12 (T, I)**

Quale dei tre diagrammi seguenti non può rappresentare il movimento libero di uscita di un sistema lineare a tempo continuo?



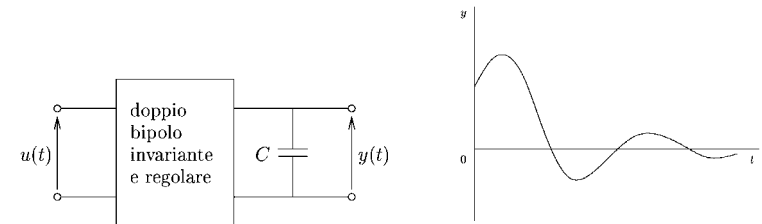
**Problema 13 (A, II)**

Si disegni, sulla base di considerazioni puramente intuitive, l'andamento qualitativo degli elementi  $\varphi_{13}(t)$ ,  $\varphi_{23}(t)$  e  $\varphi_{33}(t)$  della matrice di transizione  $\Phi(t)$  del sistema idrico



**Problema 14 (A, II)**

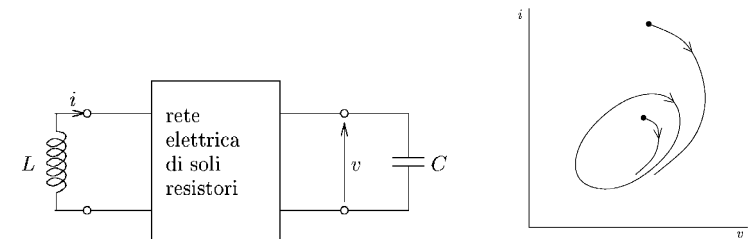
Sulla rete elettrica alimentata in tensione e rappresentata in figura è stata eseguita una prova in corto circuito ( $u(t) \equiv 0$ ) e la tensione  $y(t)$  rilevata in uscita è risultata di tipo oscillatorio smorzato



Sapendo che la rete elettrica è costituita da elementi invarianti e con caratteristiche elettriche regolari, si chiede se il doppio bipolo contiene elementi reattivi (condensatori o induttori).

**Problema 15 (A, II)**

Dimostrare che con un condensatore, un induttore e dei resistori lineari e invarianti non è possibile costruire un oscillatore del tipo mostrato in figura.



**8. Reversibilità**

In un sistema dinamico l'ingresso in un intervallo di tempo  $[0, t]$  e lo stato iniziale  $\mathbf{x}(0)$  determinano univocamente lo stato  $\mathbf{x}(t)$  e l'uscita  $y(t)$  all'istante finale  $t$ . In altre parole, l'evoluzione nel futuro del sistema è sempre garantita e univocamente individuata. Nel caso dei sistemi lineari ciò risulta evidente dalle formule di Lagrange (20) e (22) valide per  $t \geq 0$ . In alcuni sistemi l'evoluzione è garantita e univocamente individuata anche nel passato. Tali sistemi sono detti *reversibili*. Per i sistemi lineari vale il seguente risultato.

**Teorema 3 (condizioni di reversibilità)**

I sistemi lineari a tempo continuo sono reversibili, mentre quelli a tempo discreto lo sono se e solo se la loro matrice  $\mathbf{A}$  non è singolare.

La dimostrazione di questo teorema segue dal fatto che nel caso dei sistemi a tempo continuo la matrice di transizione  $\Phi(t) = e^{At}$  è invertibile (la sua inversa è, infatti,  $\Phi^{-1}(t) = e^{-At}$ ). Nel caso dei sistemi a tempo discreto, invece,  $\Phi(t) = \mathbf{A}^t$ , per cui  $\Phi(t)$  è invertibile se e solo se  $\mathbf{A}^t$  e, quindi,  $\mathbf{A}$  è invertibile.

Il Teorema 3 lascia intravedere una forte analogia tra sistemi a tempo continuo e sistemi a tempo discreto reversibili. C'è invece da aspettarsi che i sistemi irreversibili a tempo discreto necessitino, in un certo senso, di maggior attenzione. La peculiarità della irreversibilità è spesso poco evidenziata anche perché i sistemi a tempo discreto che vengono discussi con maggior frequenza sono i *sistemi a segnali campionati* che sono reversibili. Esistono, tuttavia, importanti classi di sistemi a tempo discreto che sono irreversibili, come i *sistemi a memoria finita* che sono quelli in cui lo stato iniziale influenza l'evoluzione del sistema soltanto per un periodo di tempo finito. Poiché

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t)\mathbf{x}(0) + \Psi(t)u_{(0,t)}(\cdot)$$

in tali sistemi il movimento libero è nullo a partire da un certo istante, qualsiasi sia lo stato iniziale  $\mathbf{x}(0)$ . Ciò implica che  $\det \Phi(t) = \det(\mathbf{A}^t) = (\det \mathbf{A})^t = 0$ , cioè l'irreversibilità.

**Problema 16 (A, II)**

Il parco macchine di una società di autonoleggio è gestito sostituendo con una macchina nuova ogni macchina che raggiunge i 4 anni di età e ogni macchina di età inferiore ai quattro anni che subisca guasti irreparabili. Si descriva la dinamica del parco macchine supponendo che sia nota la probabilità  $p_i$  che una macchina di età  $i$  subisca un guasto irreparabile. Indi si dica se il sistema è reversibile.

**9. Stabilità interna: definizioni**

La stabilità è certamente la proprietà più studiata dei sistemi dinamici. Come vedremo, essa permette di caratterizzare il comportamento asintotico ( $t \rightarrow \infty$ ) del sistema, fatto estremamente importante nelle applicazioni.

**Definizione 2 (asintotica stabilità, semplice stabilità e instabilità)**

Un sistema lineare è *asintoticamente stabile* se e solo se il suo movimento libero tende a zero per  $t \rightarrow \infty$  qualunque sia lo stato iniziale. Se, invece, il movimento libero è limitato ma non tende a zero per qualche stato iniziale, il sistema si dice *semplicemente stabile*. Infine, se il movimento libero è illimitato per qualche stato iniziale il sistema è *instabile*.

Sulla base di questa definizione è immediato constatare che i due sistemi discussi nei primi due esempi (legge di Newton e allevamento di Fibonacci) sono entrambi instabili. Il primo è, tuttavia, un sistema *debolmente instabile* perché il movimento libero pur essendo illimitato cresce nel tempo con legge polinomiale (nel caso specifico linearmente). Il secondo è invece un sistema *fortemente instabile* perché il movimento libero cresce con legge più che polinomiale (nel caso specifico geometrica).

Dalla Definizione 2 segue immediatamente che un sistema è asintoticamente stabile se e solo se

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \Phi(t) = \mathbf{0}$$

cioè se e solo se tutti gli elementi della sua matrice di transizione tendono a zero per  $t \rightarrow \infty$ . I sistemi a memoria finita sono, pertanto, asintoticamente stabili.

La proprietà più importante (facile da dimostrare) dei sistemi asintoticamente stabili, a volte usata come definizione alternativa di asintotica stabilità, è la seguente.

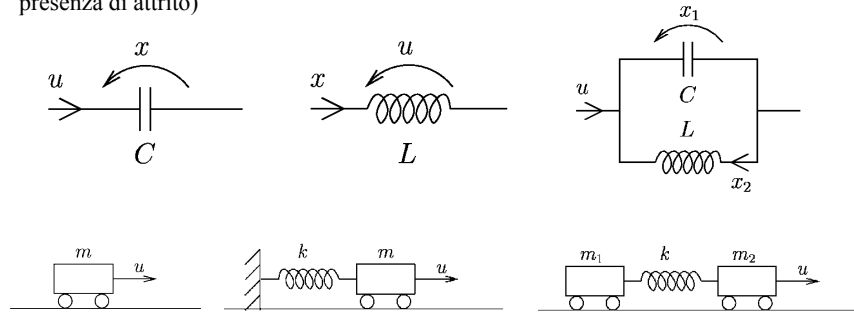
**Teorema 4 (asintotica stabilità e convergenza verso l'equilibrio)**

Un sistema è asintoticamente stabile se e solo se per ogni ingresso  $\bar{u}$  esiste un solo stato di equilibrio  $\bar{\mathbf{x}}$  verso cui tende lo stato del sistema per qualsiasi  $\mathbf{x}(0)$  se  $u(t) = \bar{u}$ .

A conferma di questo teorema, notiamo che nel sistema instabile che interpreta la legge di Newton abbiamo per  $\bar{u} = 0$  infiniti stati di equilibrio  $\bar{\mathbf{x}}^T = |\bar{x}_1 \ 0|^T$ , mentre nel sistema di Fibonacci lo stato di equilibrio  $\bar{\mathbf{x}}$  è unico ma  $\mathbf{x}(t)$  non tende a  $\bar{\mathbf{x}}$  per  $t \rightarrow \infty$ .

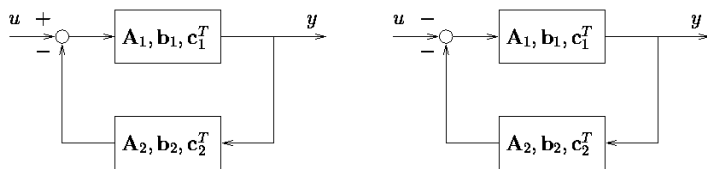
**Problema 17 (A, II)**

Si dica, su base puramente intuitiva, quali dei seguenti sistemi sono asintoticamente stabili e quali semplicemente stabili (per i sistemi meccanici si supponga di essere in presenza di attrito)



**Problema 18 (T, I)**

Dire se i due sistemi in figura possono essere uno stabile e l'altro instabile



**10. Il metodo delle simulazioni**

Abbiamo visto che un sistema è asintoticamente stabile se e solo se

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \Phi(t) = \mathbf{0}$$

Ricordando che l'*i*-esima colonna della matrice di transizione è il movimento libero corrispondente allo stato iniziale  $\mathbf{x}(0) = \mathbf{e}_i$  (versore *i*-esimo di  $R^n$ ), la relazione appena scritta giustifica un metodo di analisi della stabilità spesso usato in pratica ma raramente citato nei testi, il *metodo delle n simulazioni*. Tale metodo consiste nel simulare su calcolatore il comportamento del sistema  $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t)$  o  $\mathbf{x}(t+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t)$  con stato iniziale  $\mathbf{x}(0) = \mathbf{e}_i$  e nel verificare che tutte le componenti del vettore di stato tendano asintoticamente a zero. Se ciò non accade si può evitare di passare alla

seconda simulazione e concludere che il sistema non è asintoticamente stabile perché uno degli elementi della prima colonna della matrice di transizione  $\Phi$  non tende a zero. Se, al contrario, la prima simulazione fornisce un movimento libero che tende a zero, si può passare alla seconda, caratterizzata da stato iniziale  $\mathbf{x}(0) = \mathbf{e}_2$ , e così procedere finché si trova un movimento libero che non tende a zero (sistema non asintoticamente stabile) o finché, una volta eseguita l'*n*-esima simulazione corrispondente a  $\mathbf{x}(0) = \mathbf{e}_n$ , si possa concludere che la matrice di transizione tende a zero, per cui il sistema è asintoticamente stabile.

È facile mostrare che le *n* simulazioni non devono necessariamente essere quelle corrispondenti agli stati iniziali  $\mathbf{x}(0) = \mathbf{e}_i, i=1,2,\dots,n$ . L'unico vincolo è in realtà che gli *n* stati iniziali che individuano le *n* simulazioni siano tra loro linearmente indipendenti (come, appunto, sono i versori  $\mathbf{e}_i$  di  $R^n$ ). L'interpretazione geometrica della stabilità, che verrà illustrata nel prossimo paragrafo, permette anche di concludere che, scegliendo a caso lo stato iniziale della prima simulazione, si ha probabilità 1 (cioè la pratica certezza) che il sistema sia asintoticamente stabile se la simulazione fornisce un movimento libero tendente a zero. Questo risultato giustifica, in un certo senso, chi per analizzare la stabilità di un assegnato sistema effettua una sola simulazione.

A differenza di alcuni dei metodi che seguono, il metodo delle simulazioni mal si presta ad essere parametrizzato, per cui non è consigliabile usarlo quando la stabilità del sistema debba essere discussa al variare di qualche parametro di progetto. Inoltre, il metodo non fornisce, a meno di essere opportunamente integrato, alcun indicatore sulla "robustezza della stabilità", cioè sull'entità delle perturbazioni parametriche necessarie a trasformare il sistema da asintoticamente stabile in instabile.

**11. Autovalori e stabilità**

Il problema della stabilità può essere completamente risolto facendo riferimento agli autovalori  $\lambda_i$  della matrice  $\mathbf{A}$ . Infatti, supponendo che tutti gli autovalori di  $\mathbf{A}$  siano reali, per mezzo di un opportuno cambiamento delle variabili di stato

$$\mathbf{z} = \mathbf{T}\mathbf{x}$$

è possibile trasformare il sistema assegnato  $(\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{c}^T, d)$  in un sistema equivalente  $(\mathbf{TAT}^{-1}, \mathbf{Tb}, \mathbf{c}^T\mathbf{T}^{-1}, d)$  in cui la matrice  $\mathbf{TAT}^{-1}$  è in forma triangolare (e, quindi, ha gli autovalori  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  sulla diagonale). Il movimento libero del sistema è, allora, descritto dalle equazioni

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = \mathbf{TAT}^{-1}\mathbf{z}(t)$$

dove la matrice

$$\mathbf{TAT}^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \times & \times & \dots & \times & \times \\ 0 & \lambda_2 & \times & \dots & \times & \times \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_{n-1} & \times \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

ha gli elementi sopra la diagonale (indicati con  $\times$ ) che sono, in generale, diversi da zero. La corrispondente matrice di transizione

$$\Phi(t) = e^{\mathbf{TAT}^{-1}t} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & \times & \times & \dots & \times & \times \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & \times & \dots & \times & \times \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & e^{\lambda_{n-1} t} & \times \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix}$$

ha gli elementi sopra la diagonale che sono funzioni del tempo. Tali funzioni sono in generale prodotti di polinomi in  $t$  per funzioni esponenziali del tipo  $e^{\lambda_i t}$  e, pertanto, tendono a zero per  $t \rightarrow \infty$  se e solo se  $\lambda_i < 0$ . Questo permette di affermare che il sistema è asintoticamente stabile se e solo se tutti gli autovalori sono negativi. Affinché il sistema sia fortemente instabile è invece necessario e sufficiente che almeno un autovalore sia positivo. Nel caso ci sia una coppia di autovalori complessi coniugati ( $\lambda = a \pm i\omega$ ) la matrice di transizione contiene termini sinusoidali modulati esponenzialmente, cioè del tipo  $e^{at} \sin(\omega t + \varphi)$  (si ricordi che  $e^{(a+i\omega)t} = e^{at} (\cos \omega t + i \sin \omega t)$ ). Nel caso più complicato di autovalori complessi coniugati multipli, alcune di queste funzioni possono essere moltiplicate per polinomi  $p(t)$  di grado, comunque, inferiore alla molteplicità dell'autovalore. Le condizioni appena esposte sulla asintotica stabilità e sulla instabilità forte del sistema  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax}$  restano, pertanto, valide pur di considerare il segno della parte reale degli autovalori. Infine, questi risultati sono estendibili al caso dei sistemi a tempo discreto in cui l'esponenziale  $e^{\lambda_i t}$  è sostituito dalla potenza  $\lambda_i^t$  (che tende a zero se e solo se  $|\lambda_i| < 1$ ).

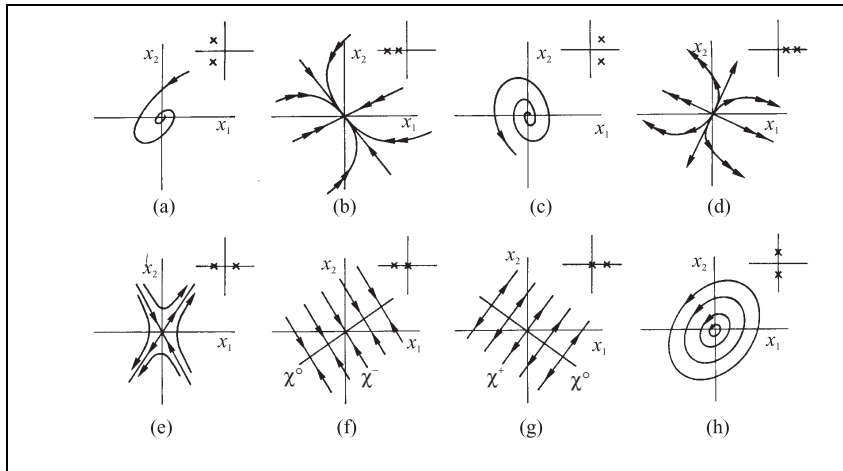
Quanto detto si può riassumere con il seguente quadro di condizioni.

### Teorema 5 (condizioni di stabilità)

Un sistema lineare  $(\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{c}^T, d)$  a tempo continuo [discreto] è  
 (i) asintoticamente stabile se e solo se  $\operatorname{Re}(\lambda_i) < 0$  [ $|\lambda_i| < 1$ ]  $\forall i$   
 (ii) fortemente instabile se e solo se  $\exists i: \operatorname{Re}(\lambda_i) > 0$  [ $|\lambda_i| > 1$ ]

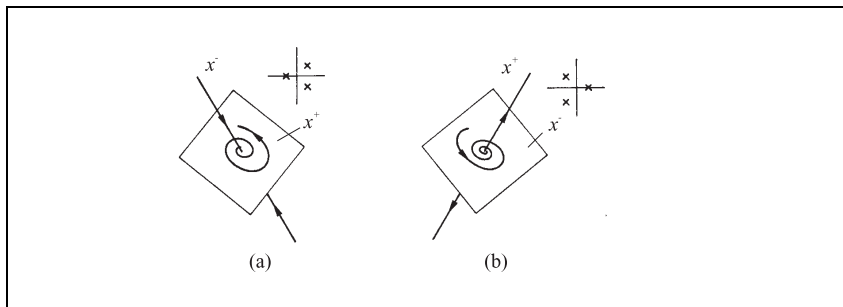
Il sistema che rappresenta la legge di Newton (*Esempio 1*) (che ha la matrice  $\mathbf{A}$  in forma triangolare) ha due autovalori nulli e non è, pertanto, né asintoticamente stabile, né fortemente instabile. Infatti, come già detto, è debolmente instabile. Il sistema di Fibonacci (*Esempio 2*) ha autovalori  $\lambda_{1,2} = (1 \pm \sqrt{5})/2$  per cui uno dei due autovalori è maggiore di 1 in modulo e il sistema è, quindi, fortemente instabile.

Gli  $n$  autovalori della matrice  $\mathbf{A}$  di un sistema lineare a tempo continuo possono essere raggruppati in tre classi a seconda del segno della loro parte reale:  $n^-$  autovalori (detti stabili) hanno parte reale negativa,  $n^0$  hanno parte reale nulla (e sono detti critici) e  $n^+$  hanno parte reale positiva (e sono detti instabili). Ovviamente  $n = n^- + n^0 + n^+$ . I corrispondenti autovettori individuano tre sottospazi invarianti e disgiunti  $\mathbf{X}^-$ ,  $\mathbf{X}^0$  e  $\mathbf{X}^+$  di dimensioni  $n^-$ ,  $n^0$  e  $n^+$ . Stati iniziali nel sottospazio  $\mathbf{X}^-$  danno luogo a movimenti liberi che tendono a zero, mentre stati iniziali nel sottospazio  $\mathbf{X}^+$  danno luogo a movimenti illimitati. Per questo motivo, questi due sottospazi si chiamano, rispettivamente, *varietà stabile* e *varietà instabile*. Il sottospazio  $\mathbf{X}^0$  si chiama, invece, *varietà centro*: i movimenti liberi corrispondenti a stati iniziali appartenenti a  $\mathbf{X}^0$  danno luogo a traiettorie che restano in  $\mathbf{X}^0$ , non tendono a zero ed, eventualmente, tendono all'infinito con legge polinomiale. Sistemi senza varietà centro (cioè senza autovalori critici) si chiamano *iperbolici* e sono distinti in *attrattori* ( $\mathbf{X}^- = \mathbf{R}^n$ ), *selle* ( $\mathbf{X}^- \oplus \mathbf{X}^+ = \mathbf{R}^n$ ) e *repulsori* ( $\mathbf{X}^+ = \mathbf{R}^n$ ). Sistemi con varietà centro si chiamano, invece, *non iperbolici*. In Fig. 9 sono mostrate le traiettorie corrispondenti al movimento libero di otto diversi sistemi del secondo ordine a tempo continuo. In ogni figura sono mostrati anche i due autovalori del sistema. I primi cinque sistemi (fuoco stabile, nodo stabile, fuoco instabile, nodo instabile, sella) sono iperbolici e gli ultimi tre non iperbolici. L'ultimo sistema (autovalori immaginari) si chiama *centro* e giustifica il termine "varietà centro".



**Figura 7** Traiettorie corrispondenti al movimento libero di sistemi del secondo ordine a tempo continuo: (a) (fuoco stabile) e (b) (nodo stabile) sono attrattori; (c) (fuoco instabile) e (d) (nodo instabile) sono repulsori; (e) è una sella; (f), (g) e (h) (centro) sono sistemi con varietà centro  $\mathbf{X}^0$ . Le traiettorie rettilinee corrispondono ad autovettori associati ad autovalori reali. La doppia freccia indica parti delle traiettorie percorse più rapidamente. Gli autovalori associati a ognuno degli otto quadri sono rappresentati in alto a destra nello spazio complesso.

Il vantaggio della scomposizione dello spazio di stato  $R^n$  nella somma diretta dei tre sottospazi  $\mathbf{X}^-$ ,  $\mathbf{X}^0$  e  $\mathbf{X}^+$  è particolarmente utile per visualizzare la geometria del movimento libero, in particolare in sistemi del terzo ordine, come le due selle mostrate in Fig. 10.



**Figura 8** Due selle del terzo ordine: (a)  $n^- = 1, n^+ = 2$ ; (b)  $n^- = 2, n^+ = 1$

Naturalmente, quanto detto per i sistemi a tempo continuo vale anche per quelli a tempo discreto, pur di discriminare tra autovalori stabili ( $|\lambda_i| < 1$ ), critici ( $|\lambda_i| = 1$ ) e instabili ( $|\lambda_i| > 1$ ).

**Problema 19 (T, I)**

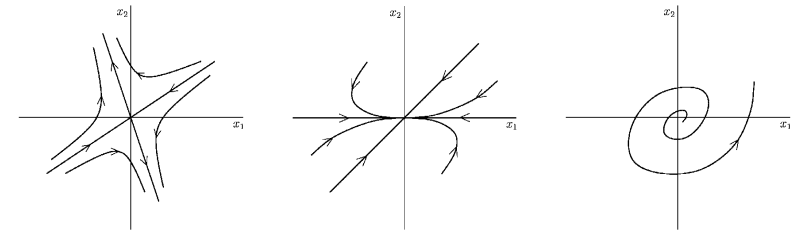
Si supponga di dover risolvere un sistema lineare algebrico del tipo:  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ . Si consideri allora il seguente metodo iterativo per la soluzione

$$\mathbf{x}^{(t+1)} = \mathbf{x}^{(t)} - (\mathbf{Ax}^{(t)} - \mathbf{b})$$

dove  $\mathbf{x}^{(t)}$  rappresenta il risultato alla  $t$ -esima iterazione. Dire da che cosa dipende la convergenza del metodo iterativo.

**Problema 20 (T, II)**

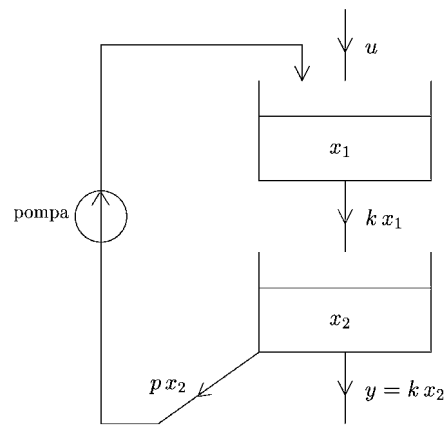
In figura sono riportate le traiettorie di tre sistemi lineari a tempo continuo del secondo ordine ottenute con ingresso identicamente nullo



In quale di questi tre sistemi  $\det \mathbf{A} < 0$  ?

**Problema 21 (A, II)**

Si consideri il sistema idraulico rappresentato in figura, costituito da due serbatoi con riciclo



Di questo sistema si studi il transitorio di avviamento, cioè il transitorio corrispondente a serbatoi inizialmente vuoti e a portata di alimentazione costante a partire dall'istante iniziale.

**Problema 22 (N, II)**

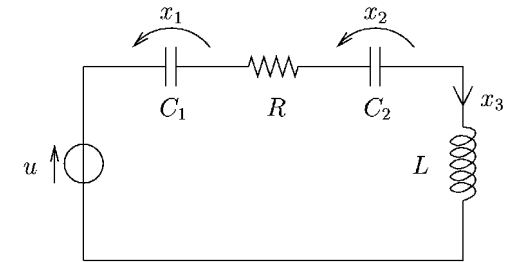
La matrice **A** di un sistema a tempo continuo è la seguente

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Si dica se il sistema è asintoticamente stabile.

**Problema 23 (A, II)**

Si consideri il circuito di figura

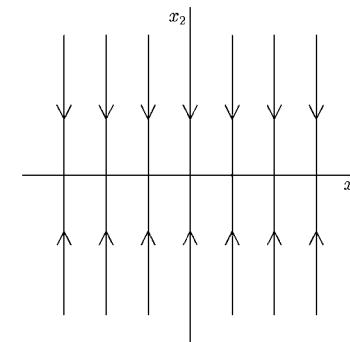


e si supponga che  $R, C_1, C_2, L > 0$ .

1. Si descriva il circuito come sistema lineare a tempo continuo (**A**, **b**, **u**, **y**).
2. Si determinino gli autovalori di **A** e si discuta la stabilità del circuito.
3. Si determinino le condizioni per cui due autovalori sono complessi coniugati.
4. Si determinino gli stati di equilibrio per  $\bar{u} = 0$  e li si rappresenti nello spazio di stato.
5. Si determini la geometria del movimento libero rappresentando le traiettorie del sistema sia nel caso di autovalori reali che nel caso in cui due autovalori siano complessi (vedi punto 3).

**Problema 24 (T, II)**

In figura è tracciato il quadro delle traiettorie di un sistema lineare a tempo continuo con ingresso nullo del II ordine



- a) Si dica se il sistema è asintoticamente stabile, semplicemente stabile o instabile.
- b) Si determini una matrice **A** consistente con il quadro delle traiettorie.

**Problema 25 (T, II)**

Si dimostri che un sistema lineare del secondo ordine

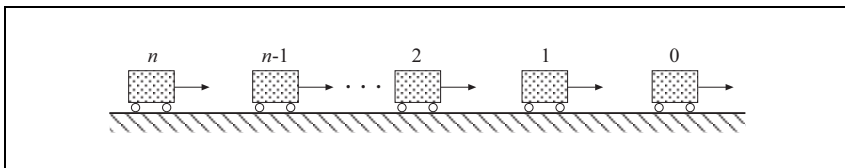
$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u$$

$$y = \mathbf{c}^T \mathbf{x}$$

non può avere risposta allo scalino di tipo oscillatorio smorzato se  $\det \mathbf{A} < 0$  (la risposta allo scalino è l'uscita del sistema per stato iniziale nullo e ingresso costante e unitario).

**12. Esempio di applicazione: controllo del movimento di un convoglio**

Si consideri il convoglio rappresentato in Fig. 9 costituito da un automezzo guida seguito da  $n$  automezzi uguali di massa  $m$ , e si supponga che in condizioni nominali tutti gli automezzi si muovano a velocità costante  $v$  a distanza  $L$  l'uno dall'altro.



**Figura 9** Un convoglio costituito da un automezzo guida (0) e da  $n$  automezzi uguali (1,2,...,n).

Ogni automezzo è descritto da due variabili di stato, la sua posizione  $x_1$  e la sua velocità  $x_2$ , legate tra loro dalle equazioni

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = \frac{1}{m}(u - hx_2)$$

dove  $u$  è la forza complessiva esercitata da motore e freni e  $hx_2$  è la forza di attrito. Per specificare la dinamica dell'intero convoglio è necessario precisare la condotta di guida di ogni singolo automezzo, cioè la legge secondo cui  $u$  dipende dalle variabili di stato. Nel caso di un convoglio automatizzato si potrebbe pensare a politiche di guida molto sofisticate, in cui la forza  $u$  applicata a ogni automezzo venga fatta dipendere da tutte le variabili di stato dell'intero convoglio, rilevate per mezzo di opportuni sensori e trasmesse, per esempio, all'automezzo guida che fungerebbe in tal caso da controllore centralizzato. Ma una soluzione tecnica decisamente più semplice è quella decentralizzata, che consiste nel munire ogni singolo automezzo di un controllore che fa automaticamente dipendere la forza  $u$  da variabili facilmente misurabili, quali la

velocità dell'automezzo e la sua distanza da quello che lo precede. Tenendo conto che, in condizioni nominali, la forza motrice deve uguagliare la forza di attrito  $hx_2$  (affinché l'accelerazione  $\dot{x}_2$  sia nulla) è spontaneo pensare di utilizzare l'informazione sull'eccesso di distanza e di velocità (rispetto ai valori nominali) per incrementare o decrementare la forza motrice, ad esempio secondo la formula

$$u = hx_2 + \frac{m}{\tau^2} \left( \text{eccesso di distanza} - \frac{L}{v} \text{eccesso di velocità} \right)$$

dove  $\tau$  è un'opportuna costante. Tale costante identifica il controllore e va fissata in modo che la dinamica del convoglio sia soddisfacente in base a diversi criteri tra cui, fondamentale, quello di evitare tamponamenti tra automezzi del convoglio. Per motivi di sicurezza, si può allora considerare il caso estremo in cui l'automezzo guida si blocchi istantaneamente in un punto (nel seguito considerato come origine) e determinare i valori del parametro di progetto  $\tau$  che garantiscono che il primo automezzo non vada a tamponare l'automezzo guida. Poiché tutti gli altri automezzi si trovano, durante la frenata, in condizioni meno critiche del primo, i valori di  $\tau$  così determinati saranno tutti accettabili perché garantiranno l'assenza di tamponamenti all'interno di tutto il convoglio.

Se il blocco dell'automezzo guida nel punto 0 ha luogo all'istante  $t = 0$ , la posizione  $x_1(t)$  del primo automezzo è negativa (almeno per  $t$  sufficientemente piccolo) e l'eccesso di distanza è, quindi, pari a  $(-x_1(t) - L)$ , mentre l'eccesso di velocità è pari a  $(x_2(t) - v)$ . Pertanto, la dinamica del primo automezzo è descritta dalle equazioni

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = \frac{1}{m} \left[ hx_2 + \frac{m}{\tau^2} \left( -x_1 - L - \frac{L}{v} [x_2 - v] \right) - hx_2 \right] = -\frac{x_1}{\tau^2} - \frac{L}{\tau^2 v} x_2$$

cioè da un sistema autonomo del secondo ordine  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$  con

$$\mathbf{A} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{\tau^2} & -\frac{T}{\tau^2} \end{vmatrix}$$

dove  $T=L/v$ . Tale sistema è asintoticamente stabile per tutti i valori di  $\tau$ , poiché  $\text{tr}\mathbf{A} < 0$  e  $\det \mathbf{A} > 0$ . Gli autovalori di  $\mathbf{A}$

$$\lambda_{1,2} = -\frac{T}{2\tau^2} \left( 1 \mp \sqrt{1 - 4\frac{\tau^2}{T^2}} \right)$$

hanno infatti parte reale negativa e sono complessi coniugati per  $\tau > T/2$  e reali per  $\tau \leq T/2$ . Nel caso gli autovalori siano reali, i due autovettori soddisfano la relazione

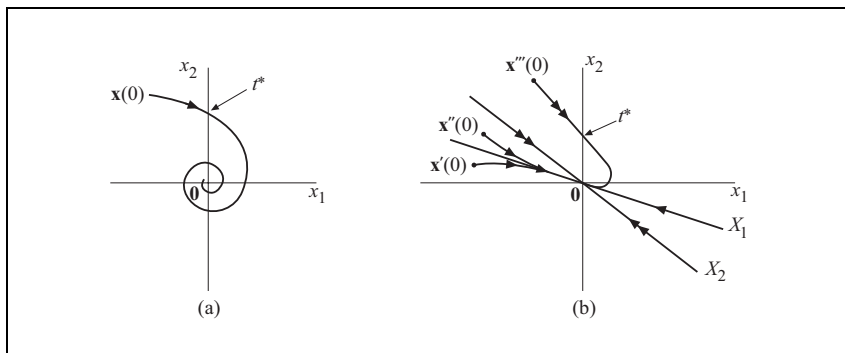
$$\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1/\tau^2 & -T/\tau^2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \end{vmatrix} = \lambda_{1,2} \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \end{vmatrix}$$

per cui le rette  $X_1$  e  $X_2$  corrispondenti ai due autovettori hanno equazione

$$x_2 = \lambda_{1,2} x_1$$

cioè sono due rette passanti per l'origine con pendenza negativa, di cui quella associata all'autovalore dominante ( $X_1$ ) è quella meno pendente.

Le traiettorie sono pertanto quelle di un fuoco stabile o di un nodo stabile, come mostrato in Fig. 10a. La figura evidenzia che, nel caso  $\tau > T/2$  (fuoco stabile), la traiettoria attraversa a un certo istante  $t^*$  l'asse  $x_2$  dello spazio di stato e ciò significa che all'istante  $t^*$  il primo automezzo tampona l'automezzo guida fermo nel punto 0. La parte (b) della figura mostra, invece, che nel caso  $\tau < T/2$  il tamponamento non avviene se lo stato iniziale  $\mathbf{x}(0)$  è sotto la retta  $X_2$  (stati  $\mathbf{x}'(0)$  e  $\mathbf{x}''(0)$  in figura) ed è inevitabile se  $\mathbf{x}(0)$  è sopra la retta  $X_2$  (stato  $\mathbf{x}'''(0)$  in figura).



**Figura 10** Traiettorie di un fuoco stabile (a) nel caso  $\tau > T/2$  e di un nodo stabile (b) nel caso  $\tau < T/2$ . Il tamponamento avviene all'istante  $t^*$ .

Per arrivare a una conclusione definitiva, ci si può chiedere in quale di queste situazioni ci si trovi normalmente, per esempio qualora il blocco dell'automezzo guida avvenga mentre il convoglio si muove in condizioni nominali, per cui

$$x_1(0) = -L \quad x_2(0) = v = \frac{L}{T}$$

E' facile riconoscere (la verifica è lasciata al lettore) che

$$\frac{x_2(0)}{x_1(0)} > \lambda_{1,2} \quad \text{per } \tau \leq \frac{T}{2}$$

per cui lo stato iniziale è sotto la retta  $X_1$  (come lo stato  $\mathbf{x}'(0)$  in Fig. 10b) cosicché, come già detto, il tamponamento non può avvenire.

La conclusione di questa semplice analisi è che nel convoglio non potranno avvenire tamponamenti durante le fasi di frenata se il parametro di progetto  $\tau$  sarà sufficientemente piccolo ( $\tau \leq T/2$ ). Peraltro, poiché bassi valori di  $\tau$  possono essere realizzati soltanto con motori e impianti frenanti capaci di esercitare grandi forze, ne segue che, per motivi di costo, sarà opportuno indirizzare la scelta del parametro  $\tau$  verso valori elevati. Tutto ciò porta quindi spontaneamente a candidare come scelta razionale di progetto il valore  $\tau^* = T/2$ .



### 13. Test di asintotica stabilità

Abbiamo visto nel paragrafo precedente che la conoscenza degli autovalori della matrice  $\mathbf{A}$  di un sistema lineare permette di stabilire se tale sistema è (o no) asintoticamente stabile. Purtroppo, il calcolo degli autovalori di una matrice può essere anche oneroso se la matrice è di dimensioni rilevanti, come spesso accade nelle applicazioni. Per questo motivo risultano molto utili alcuni test o metodi di analisi che, evitando il calcolo degli autovalori, permettono di inferire l'asintotica stabilità o l'instabilità del sistema.

Il più noto di questi test (che è una condizione sufficiente di instabilità) è il *criterio di instabilità della traccia*, che afferma che se in un sistema a tempo continuo [discreto] di dimensione  $n$  la traccia della matrice  $\mathbf{A}$  è positiva [maggiore di  $n$  in modulo] il sistema è instabile. La dimostrazione di questa proprietà è ovvia, se si ricorda che la traccia di una matrice è pari alla somma dei suoi autovalori.

Una condizione che richiede uno sforzo computazionale molto maggiore (ma pur sempre incomparabilmente minore di quello richiesto dal calcolo degli autovalori) è quella nota come *criterio di Hurwitz*. Tale criterio (di cui non riportiamo la dimostrazione) è una condizione necessaria e sufficiente perchè le  $n$  radici di una equazione polinomiale a coefficienti reali

$$\alpha_0 \lambda^n + \alpha_1 \lambda^{n-1} + \dots + \alpha_n = 0$$

abbiano parte reale negativa. Applicato all'equazione caratteristica  $\Delta_A(\lambda) = 0$  (ricavabile con il metodo di Souriau citato nel terzo paragrafo) il criterio permette, quindi, di stabilire se un sistema a tempo continuo è (o no) asintoticamente stabile.



**Teorema 6 (criterio di Hurwitz)**

Sia

$$\Delta_\lambda(\lambda) = \lambda^n + \alpha_1 \lambda^{n-1} + \dots + \alpha_n$$

il polinomio caratteristico di un sistema lineare a tempo continuo  $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t)$ .Si consideri la seguente matrice di dimensioni  $n \times n$  (detta *matrice di Hurwitz*)

$$\mathbf{H} = \begin{vmatrix} \alpha_1 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ \alpha_3 & \alpha_2 & \alpha_1 & 1 & \dots \\ \alpha_5 & \alpha_4 & \alpha_3 & \alpha_2 & \dots \\ \alpha_7 & \alpha_6 & \alpha_5 & \alpha_4 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots \end{vmatrix}$$

in cui  $\alpha_{n+i} = 0$  per  $i > 0$ . Allora, condizione necessaria e sufficiente per l'asintotica stabilità del sistema è che siano positivi tutti i primi minori principali della matrice di Hurwitz. Cioè, posto

$$D_1 = \alpha_1 \quad D_2 = \det \begin{vmatrix} \alpha_1 & 1 \\ \alpha_3 & \alpha_2 \end{vmatrix} \quad D_3 = \det \begin{vmatrix} \alpha_1 & 1 & 0 \\ \alpha_3 & \alpha_2 & \alpha_1 \\ \alpha_5 & \alpha_4 & \alpha_3 \end{vmatrix} \quad \dots$$

condizione necessaria e sufficiente per l'asintotica stabilità del sistema è che  $D_i > 0$ ,  $i = 1, \dots, n$ .

**Esempio 6 (sistemi del terzo ordine)**

Considerata la classe dei sistemi lineari a tempo continuo del terzo ordine ( $n=3$ ), determiniamo le condizioni necessarie e sufficienti per la loro asintotica stabilità. La tabella di Hurwitz è

$$\mathbf{H} = \begin{vmatrix} \alpha_1 & 1 & 0 \\ \alpha_3 & \alpha_2 & \alpha_1 \\ 0 & 0 & \alpha_3 \end{vmatrix}$$

per cui le condizioni di asintotica stabilità sono

$$D_1 = \alpha_1 > 0 \quad D_2 = \alpha_1 \alpha_2 - \alpha_3 > 0 \quad D_3 = \alpha_3 D_2 > 0$$

In conclusione, un sistema del terzo ordine a tempo continuo è asintoticamente stabile se e solo se, sono verificate le condizioni

$$\alpha_1 > 0 \quad \alpha_3 > 0 \quad \alpha_2 > \alpha_3 / \alpha_1$$

♣

Un altro criterio molto noto di asintotica stabilità, del tutto equivalente a quello di Hurwitz, è il seguente.

**Teorema 7 (criterio di Routh)**

Sia

$$\Delta_\lambda(\lambda) = \lambda^n + \alpha_1 \lambda^{n-1} + \dots + \alpha_n$$

il polinomio caratteristico di un sistema lineare a tempo continuo  $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t)$ .Si costruisca la seguente tabella (detta *tabella di Routh*) di dimensioni  $(n+1) \times (n+1)$ 

$$\begin{vmatrix} r_{00} & r_{01} & r_{02} & \dots & r_{0n} \\ r_{10} & r_{11} & r_{12} & \dots & r_{1n} \\ r_{20} & r_{21} & r_{22} & \dots & r_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ r_{n0} & r_{n1} & r_{n2} & \dots & r_{nn} \end{vmatrix}$$

dove gli elementi della prima e della seconda riga sono, rispettivamente, i coefficienti con indice pari ( $\alpha_0, \alpha_2, \dots$ ) e dispari ( $\alpha_1, \alpha_3, \dots$ ) del polinomio caratteristico ( $\alpha_0 = 1$  va considerato un coefficiente con indice pari e  $\alpha_i = 0$  per  $i > n$ ) mentre tutti gli altri elementi vanno calcolati con la formula

$$r_{i+1,j} = -\frac{1}{r_{i0}} \det \begin{vmatrix} r_{i-1,0} & r_{i-1,j+1} \\ r_{i0} & r_{ij+1} \end{vmatrix}$$

Condizione necessaria e sufficiente per l'asintotica stabilità del sistema è che siano positivi tutti gli elementi  $r_{i0}$  della prima colonna della tabella di Routh.

Inoltre, se nella prima colonna non esistono elementi nulli, il numero di autovalori con parte reale positiva coincide con il numero di volte in cui scorrendo dall'alto verso il basso (o dal basso verso l'alto) gli elementi della prima colonna si passa da un elemento positivo a uno negativo e viceversa.

Esistono naturalmente criteri di asintotica stabilità dei sistemi a tempo discreto analoghi a quelli appena visti di Hurwitz e Routh (il più noto è forse il criterio di Jury). Va comunque segnalato che per mezzo della trasformazione di variabili

$$z = \frac{s+1}{s-1}$$

si può riportare il problema della verifica che gli zeri di un polinomio in  $z$  siano interni al cerchio di raggio unitario a quello della verifica che gli zeri di un polinomio in  $s$  siano a parte reale negativa. In altre parole, se

$$\Delta_A(z) = \det(z\mathbf{I} - \mathbf{A}) = z^n + \alpha_1 z^{n-1} + \dots + \alpha_n$$

è il polinomio caratteristico di un sistema a tempo discreto  $\mathbf{x}(t+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t)$ , si può scrivere la sua equazione caratteristica nella forma

$$\left(\frac{s+1}{s-1}\right)^n + \alpha_1 \left(\frac{s+1}{s-1}\right)^{n-1} + \dots + \alpha_n = 0$$

che sviluppata fornisce

$$s^n + \alpha'_1 s^{n-1} + \dots + \alpha'_n = 0$$

Applicando, allora, il criterio di Hurwitz o di Routh a questa equazione, si può determinare se il sistema a tempo discreto è asintoticamente stabile o no.

Nel caso particolare dei sistemi del secondo ordine (matrice  $\mathbf{A}$  di dimensione  $2 \times 2$ ) valgono condizioni speciali, che permettono spesso di verificare l'asintotica stabilità del sistema per semplice ispezione della matrice  $\mathbf{A}$ .

**Teorema 8** (criterio della traccia e del determinante (valido solo per  $n=2$ ))

Un sistema a tempo continuo  $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t)$  del secondo ordine è asintoticamente stabile se e solo se

$$\text{tr}\mathbf{A} < 0 \quad \det \mathbf{A} > 0$$

Analogamente, un sistema a tempo discreto  $\mathbf{x}(t+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t)$  del secondo ordine è asintoticamente stabile se e solo se

$$|\text{tr}\mathbf{A}| < 1 + \det \mathbf{A} \quad \det \mathbf{A} < 1$$

Il lettore potrà verificare l'efficacia di questo criterio applicandolo ai sistemi descritti negli *Esempi 1 e 2*.

#### 14. Costante di tempo dominante

Abbiamo visto che gli elementi della matrice di transizione  $\Phi(t)$  di un sistema a tempo continuo sono normalmente costituiti da esponenziali

$$e^{\lambda t}$$

dove  $\lambda$  è un autovalore reale e/o da sinusoidi modulate esponenzialmente in ampiezza

$$e^{at} \sin(\omega t + \varphi)$$

dove  $\lambda = a \pm i\omega$  è una coppia di autovalori complessi. Nei casi più complicati di autovalori multipli, alcune di queste funzioni possono essere moltiplicate per polinomi  $p(t)$  di grado, comunque, inferiore alla molteplicità dell'autovalore. L'uscita libera del sistema (considerando per semplicità sistemi con una sola uscita)

$$y_{lib}(t) = \mathbf{c}^T \Phi(t) \mathbf{x}(0)$$

è, pertanto, una combinazione lineare di  $n$  funzioni di questo tipo. Per esempio, se gli autovalori  $\lambda_i$  sono reali e distinti si ha

$$y_{lib}(t) = \sum_{i=1}^n a_i e^{\lambda_i t}$$

dove i coefficienti  $a_i$  dipendono dallo stato iniziale  $\mathbf{x}(0)$ . Per stati iniziali particolari alcuni  $a_i$  possono anche essere nulli, ma per stati iniziali generici si ha  $a_i \neq 0$ . Sui tempi lunghi e in condizioni generiche, l'esponenziale associato al massimo autovalore domina, quindi, tutti gli altri, anche se il suo coefficiente  $a_i$  è il più piccolo. Ciò è vero indipendentemente dal segno degli autovalori (e, quindi, dalla stabilità del sistema) e continua ad esser vero anche nel caso di autovalori complessi e/o multipli, perché per  $t$  sufficientemente grande

$$|p_1(t)e^{\lambda_1 t}| \gg |p_2(t)e^{at} \sin(\omega t + \varphi)|$$

se  $\lambda > a$ , qualsiasi siano i polinomi  $p_1(t)$  e  $p_2(t)$ . Per questo motivo, l'autovalore con la più grande parte reale si chiama *autovalore dominante* e si indica con  $\lambda_d$  e la costante

$$T_d = -\frac{1}{\operatorname{Re}(\lambda_d)}$$

si chiama *costante di tempo dominante* del sistema (più in generale,  $T_i = -1/\operatorname{Re}(\lambda_i)$  è la *costante di tempo* associata a  $\lambda_i$ ). Naturalmente, se il sistema è asintoticamente stabile la costante di tempo dominante è positiva.

Sui tempi lunghi l'uscita libera di un qualsiasi sistema è, quindi, data in prima approssimazione da

$$y_{lib}(t) = \begin{cases} a_1 e^{-t/T_d} \\ a_2 e^{-t/T_d} \operatorname{sen}(\omega t + \varphi) \end{cases}$$

a seconda che l'autovalore dominante sia reale o complesso. Ciò significa che un qualsiasi sistema si comporta asintoticamente come un sistema del primo ordine (autovalore dominante reale) o del secondo ordine (autovalore dominante complesso). Ad esempio, tutte le reti elettriche lineari si comportano asintoticamente come un circuito  $(R,C)$  o come un circuito  $(R,L,C)$  e questo è il vero motivo della grande importanza attribuita in tutti i testi di elettrotecnica a questi due circuiti.

Nel caso dei sistemi asintoticamente stabili la costante di tempo dominante è un indicatore della rapidità con cui l'uscita del sistema converge verso l'uscita di equilibrio quando l'ingresso è mantenuto costante. Benché la convergenza sia di tipo esponenziale, in molti ambienti tecnici si suol dire che l'equilibrio viene "in pratica" raggiunto in un tempo pari a cinque volte la costante di tempo dominante. Spesso, in problemi di sintesi, dove si devono tipicamente trovare soluzioni di compromesso tra obiettivi conflittuali come costo, rapidità, precisione, affidabilità ed altri ancora, la costante di tempo dominante è usata come indicatore di rapidità. Un sistema con piccola costante di tempo dominante è un sistema che reagisce prontamente ad un comando esterno.

Quanto detto per i sistemi a tempo continuo si estende in modo ovvio al caso dei sistemi a tempo discreto. L'autovalore dominante  $\lambda_d$  è quello a massimo modulo. Nel caso particolare in cui  $\lambda_d = 0$  tutti gli autovalori sono nulli, cosicché il sistema, sottoposto a ingresso costante, raggiunge l'equilibrio in tempo finito. Viceversa, se  $\lambda_d \neq 0$  la costante di tempo dominante è data da

$$T_d = -\frac{1}{\log|\lambda_d|}$$

Questa relazione si ricava imponendo che la legge secondo cui varia il modulo dell'uscita libera sia uguale ad un'esponenziale con costante di tempo  $T_d$ , cioè imponendo che

$$e^{-\frac{t}{T_d}} = |\lambda_d|^t$$

### Esempio 7 (capacità di trasmissione)

La capacità  $C$  di un sistema di trasmissione è, secondo la definizione di Shannon,

$$C = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\log_2 N_t}{t}$$

dove  $N_t$  è il numero di messaggi che possono essere trasmessi in  $t$  intervalli di tempo elementari. Se diamo come scontato che tale numero cresca nel tempo come l'uscita di un sistema autonomo a tempo discreto, allora

$$N_t \cong |\lambda_d|^t$$

dove  $\lambda_d$  è l'autovalore dominante del sistema. Risulta, pertanto, che

$$C = \log_2 |\lambda_d|$$

cioè la capacità di trasmissione è univocamente legata alla costante di tempo dominante del sistema che descrive la legge secondo cui cresce il numero di messaggi che possono essere trasmessi nel tempo. Ad esempio, se si trasmettono messaggi in codice con  $(\bullet)$  e  $(\text{---})$  e la trasmissione di  $(\bullet)$  necessita un'unità di tempo mentre quella di  $(\text{---})$  due unità di tempo, si ha  $N_1 = 1$ ,  $N_2 = 2$ ,  $N_3 = 3$  e, in generale

$$N_t = N_{t-1} + N_{t-2}$$

perché un messaggio di lunghezza  $t$  è costituito dalla concatenazione di un messaggio di lunghezza  $(t-1)$  seguito da un  $(\bullet)$  o da un messaggio di lunghezza  $(t-2)$  seguito da una  $(\text{---})$ . La relazione appena scritta è un modello autoregressivo del secondo ordine con  $\alpha_1 = \alpha_2 = -1$  e tale modello può essere realizzato con una terna  $(\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{c}^T)$  in forma canonica di ricostruzione che ha polinomio caratteristico

$$\Delta(\lambda) = \lambda^2 + \alpha_1 \lambda + \alpha_2 = \lambda^2 - \lambda - 1$$

Gli autovalori di questa realizzazione (e di tutte quelle ad essa equivalenti) sono

$$\lambda_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

per cui

$$C = \log_2 \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right) \cong 0.69424$$

♣

**Problema 26 (N, II)**

Si dica quale dei due sistemi sotto riportati tende più rapidamente verso l'equilibrio quando gli viene applicato un ingresso costante

$$\sum_1: \quad \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u$$

$$y = \mathbf{c}^T \mathbf{x}$$

$$\sum_2: \quad y = Gu$$

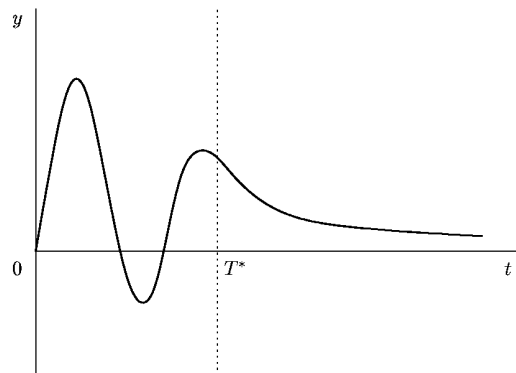
$$\mathbf{A} = \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{vmatrix} 1 \\ 2 \end{vmatrix}$$

$$\mathbf{c}^T = \begin{vmatrix} 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$G(s) = \frac{30}{s^2 + 3s + 2}$$

**Problema 27 (T, II)**

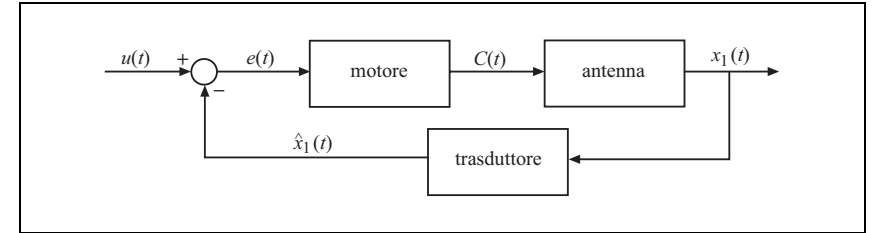
La risposta all'impulso di un sistema lineare a tempo continuo è la seguente



Sui tempi lunghi, cioè per  $t \gg T^*$ , la risposta in pratica si dimezza ogni 3 min. Quanto vale la costante di tempo dominante  $T_d$  del sistema?

**15. Esempio di applicazione: controllo della posizione di un'antenna**

Un'antenna con momento d'inerzia  $J$  e coefficiente d'attrito viscoso  $h$  deve poter essere puntata in qualsiasi direzione  $u$  e per questo viene guidata, come mostrato nello schema a blocchi di Fig. 11, da un motore che esercita, a regime, una coppia  $C$  proporzionale, secondo un coefficiente (positivo)  $k$ , all'errore angolare  $e$  dell'antenna, cioè alla differenza tra la posizione desiderata  $u$  e la misura  $\hat{x}_1$  della posizione reale  $x_1$  dell'antenna.



**Figura 11** Schema a blocchi di un sistema di controllo della posizione di un'antenna.

È intuitivo immaginare che, affinché l'antenna si porti rapidamente da una posizione di equilibrio (corrispondente a un ingresso costante  $\bar{u}'$ ) a una nuova posizione di equilibrio (corrispondente a un nuovo ingresso  $\bar{u}''$ ) si debba usare un motore a elevato guadagno  $k$  e, quindi, ad alto costo. Nasce così spontaneamente il problema della scelta di un compromesso tra costo e rapidità del sistema, che possiamo risolvere formalmente facendo riferimento alla nozione di costante di tempo dominante. Infatti, detta  $x_2(t)$  la velocità angolare dell'antenna e supponendo che trasduttore e motore siano così rapidi (rispetto all'antenna) da poter ipotizzare che

$$\hat{x}_1(t) \cong x_1(t) \quad C(t) \cong ke(t)$$

il sistema risulta descritto dalle seguenti equazioni

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t)$$

$$\dot{x}_2(t) = \frac{1}{J} [k(u(t) - x_1(t)) - hx_2(t)]$$

cui corrisponde la seguente coppia  $(\mathbf{A}, \mathbf{b})$

$$\mathbf{A} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{J} & -\frac{h}{J} \end{vmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{vmatrix} 0 \\ \frac{k}{J} \end{vmatrix}$$

Il polinomio caratteristico è dato da

$$\Delta_A(\lambda) = \det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}) = \det \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ \frac{k}{J} & \lambda + \frac{h}{J} \end{vmatrix} = \lambda^2 + \frac{h}{J}\lambda + \frac{k}{J}$$

Il sistema è asintoticamente stabile qualsiasi sia  $k > 0$ , come si può verificare dal calcolo degli autovalori

$$\lambda_{1,2} = \frac{-h \pm \sqrt{h^2 - 4kJ}}{2J}$$

Inoltre, per  $k < k^* = h^2/4J$  gli autovalori sono reali mentre per  $k > k^*$  sono complessi coniugati con parte reale pari a  $-h/2J$ . La costante di tempo dominante

$$T_d = \begin{cases} \frac{2J}{h - \sqrt{h^2 - 4kJ}} & k < k^* \\ \frac{2J}{h} & k \geq k^* \end{cases}$$

è, pertanto, decrescente rispetto a  $k$  se  $k < k^*$  e indipendente da  $k$  se  $k > k^*$ . Poiché il costo del motore è certamente crescente con  $k$ , è allora inutile prendere in considerazione motori con  $k > k^*$ , perché ciò non migliora la rapidità di risposta del sistema. Pertanto, il motore prescelto sarà quello con  $k = k^*$  se il suo costo è accettabile o, altrimenti, un motore più piccolo che, tuttavia, comporterà una riduzione della rapidità di risposta.

♣

## 16. Stabilità degli aggregati

Un capitolo molto importante della teoria della stabilità è quello relativo allo studio dei sistemi complessi costituiti da sottosistemi opportunamente interconnessi. Al solito, questa teoria è particolarmente sviluppata nell'ambito dei sistemi lineari cui è, appunto, dedicato questo breve paragrafo. Il risultato più semplice è quello relativo ai sistemi in cascata e in parallelo, che dice che un sistema lineare costituito dalla cascata o dal parallelo di due sottosistemi è asintoticamente stabile se e solo se entrambi i sottosistemi sono asintoticamente stabili. La giustificazione di tale risultato è semplice: basta ricordare che gli autovalori dell'aggregato sono la riunione degli autovalori del primo e del secondo sottosistema. L'asintotica stabilità è, pertanto, una proprietà che non può essere creata né distrutta con collegamenti in cascata e parallelo. Essa può invece essere sia creata che distrutta per mezzo di collegamenti in retroazione. A titolo di esempio, mostriamo come collegando in retroazione sistemi asintoticamente stabili si possa ottenere, sotto certe condizioni, un sistema non asintoticamente stabile.

### Esempio 8 (sistemi retroazionati del terzo ordine)

Si consideri il sistema a tempo continuo rappresentato in Fig. 12, costituito da due sottosistemi  $\Sigma_1$  e  $\Sigma_2$  collegati in cascata e retroazionati negativamente da un terzo sottosistema  $\Sigma_3$ .

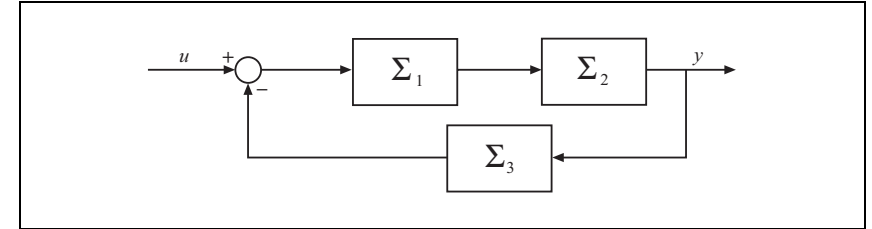


Figura 12 Esempio di sistema retroazionato.

Tale schema interpreta numerosissime situazioni reali. Ad esempio,  $\Sigma_1$  potrebbe essere un motore,  $\Sigma_2$  un'antenna e  $\Sigma_3$  un trasduttore di posizione, oppure  $\Sigma_1$  potrebbe essere un impianto di riscaldamento (o raffreddamento),  $\Sigma_2$  una sala cinematografica e  $\Sigma_3$  un trasduttore di temperatura, o ancora,  $\Sigma_1$  potrebbe rappresentare l'anestesista che, in sala operatoria, regola istante per istante il flusso di anestetico iniettato al paziente  $\Sigma_2$  sulla base della differenza tra il valore ritenuto ottimale ( $u$ ) e il valore misurato da un'opportuno strumento  $\Sigma_3$  di un indicatore fisiologico significativo ( $y$ ). In tutti questi casi i sottosistemi  $\Sigma_i$  sono (per ovvi motivi fisici) asintoticamente stabili e tale "deve" essere il sistema aggregato. Infatti, in caso contrario, anziché tendere verso l'equilibrio desiderato il sistema se ne allontanerebbe con gravi conseguenze. A titolo di esempio, supponiamo che i tre sistemi  $\Sigma_i$  siano del primo ordine e abbiano stato  $x_i$  e uscita  $y_i$  coincidenti. Inoltre, si supponga che, oltre a essere asintoticamente stabili, essi abbiano guadagno  $\mu_i$  positivo. Sotto queste ipotesi i tre sottosistemi sono descritti dalle equazioni

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= a_1 x_1 + b_1 (u - x_3) \\ \dot{x}_2 &= a_2 x_2 + b_2 x_1 \\ \dot{x}_3 &= a_3 x_3 + b_3 x_2 \end{aligned}$$

dove  $a_i < 0$  per asintotica stabilità e  $b_i > 0$  perché il guadagno  $\mu_i = -b_i/a_i$  è positivo.

La matrice  $\mathbf{A}$  dell'aggregato è

$$\mathbf{A} = \begin{vmatrix} a_1 & 0 & -b_1 \\ b_2 & a_2 & 0 \\ 0 & b_3 & a_3 \end{vmatrix}$$

per cui

$$\Delta_A(\lambda) = \det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}) = \det \begin{vmatrix} \lambda - a_1 & 0 & b_1 \\ -b_2 & \lambda - a_2 & 0 \\ 0 & -b_3 & \lambda - a_3 \end{vmatrix} = (\lambda - a_1)(\lambda - a_2)(\lambda - a_3) + b_1 b_2 b_3$$

$$= \lambda^3 + (-a_1 - a_2 - a_3)\lambda^2 + (a_1 a_2 + a_2 a_3 + a_1 a_3)\lambda + b_1 b_2 b_3 - a_1 a_2 a_3$$

I coefficienti  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  del polinomio caratteristico sono pertanto positivi, per cui la condizione necessaria e sufficiente per l'asintotica stabilità è (vedi Esempio 6)

$$\alpha_1 \alpha_2 > \alpha_3$$

che, nel caso specifico, diventa

$$(-a_1 - a_2 - a_3)(a_1 a_2 + a_2 a_3 + a_1 a_3) > b_1 b_2 b_3 - a_1 a_2 a_3$$

A tale condizione si può dare una forma più interessante descrivendo ogni sottosistema  $\Sigma_i$  con il suo guadagno  $\mu_i$  e la sua costante di tempo  $T_i$  anziché con la coppia  $(a_i, b_i)$ .

Tenendo conto che

$$T_i = -\frac{1}{a_i} \quad \mu_i = -\frac{b_i}{a_i}$$

e indicando con  $\mu$  il *guadagno d'anello*, cioè il prodotto  $\mu_1 \mu_2 \mu_3$ , la condizione di asintotica stabilità diventa

$$\mu < \mu_{crit} = (T_1 + T_2 + T_3) \left( \frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2} + \frac{1}{T_3} \right) - 1$$

Tale condizione afferma che per avere asintotica stabilità è necessario e sufficiente che il guadagno d'anello  $\mu$  sia inferiore a un valore critico  $\mu_{crit}$ .

♣

### 17. Esempio di applicazione: controllo dell'alimentazione di un impianto chimico

La portata di alimentazione  $y(t)$  di un impianto chimico (vedi Fig. 13) deve essere mantenuta il più possibile costante e pari a un valore desiderato  $u_1$ . La portata  $y(t)$  è l'uscita di un serbatoio preceduto da due altri serbatoi uguali alimentati da una portata  $v(t)$  che può essere variata per mezzo di un'elettrovalvola. Il terzo serbatoio è anche alimentato da una portata  $u_2(t)$  proveniente da un impianto attivato solo saltuariamente.

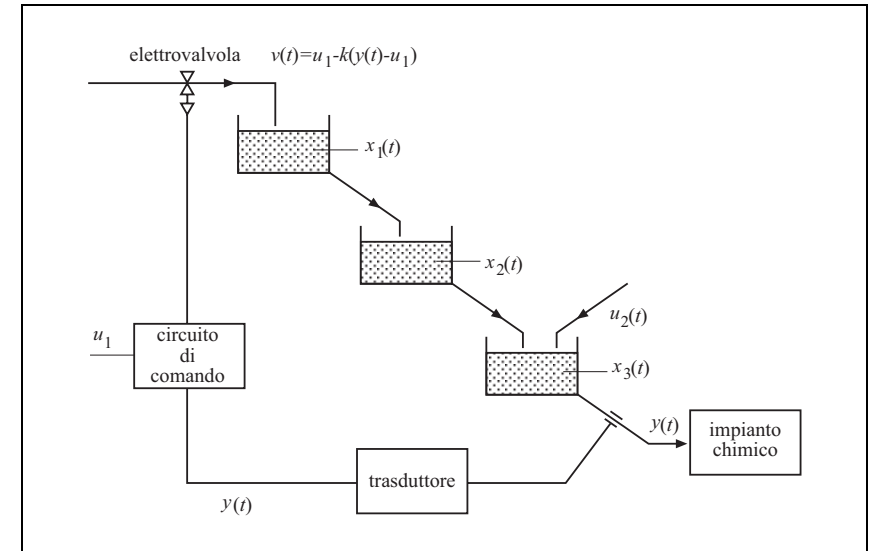


Figura 13 Schema del sistema di alimentazione di un impianto chimico.

All'equilibrio la portata di uscita  $\bar{y}$  è uguale alla portata di alimentazione, per cui se  $u_2(t)$  fosse identicamente nullo basterebbe fissare l'alimentazione  $v$  al valore costante  $u_1$  per ottenere un funzionamento corretto dell'intero impianto. Per compensare le variazioni della portata  $y(t)$  provocate dal "disturbo"  $u_2(t)$ , si dovrebbe misurare il disturbo (cioè la portata  $u_2$ ) e agire di conseguenza sull'elettrovalvola variando la portata di alimentazione. Se ciò non è possibile, per esempio perché lo scarico  $u_2$  non è accessibile, l'unica possibilità per controbattere le variazioni della portata  $y(t)$  provocate dal disturbo è quella di variare per mezzo dell'elettrovalvola la portata  $v(t)$  togliendo alla componente fissa  $u_1$  un termine proporzionale alla differenza tra la portata  $y(t)$  (misurata per mezzo di un opportuno trasduttore) e la portata desiderata  $u_1$ , cioè

$$v(t) = u_1 - k[y(t) - u_1] \quad k > 0$$

È intuitivo che, per meglio controbattere i disturbi, si tenda a scegliere un circuito di comando ad alto guadagno  $k$ . E', infatti, immediato constatare che all'equilibrio

$$\bar{y} = \bar{u}_1 + \bar{u}_2 / (1 + k)$$

cioè l'errore a regime è pari al disturbo diviso per  $(1+k)$ . Ciò è possibile, tuttavia, solo se il sistema rimane asintoticamente stabile per alti valori di  $k$ . Per verificare se ciò accade si può applicare il criterio degli autovalori. Per questo si deve dapprima determinare la matrice  $\mathbf{A}$ . Nell'ipotesi che i tre serbatoi siano uguali, cioè nell'ipotesi

che le tre portate di uscita siano proporzionali, secondo un coefficiente  $a$ , ai tre volumi  $x_i(t)$ , il sistema è descritto dalle equazioni

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= -ax_1(t) + u_1 - k(ax_3(t) - u_1) \\ \dot{x}_2(t) &= ax_1(t) - ax_2(t) \\ \dot{x}_3(t) &= ax_2(t) + u_2(t) - ax_3(t) \\ y(t) &= ax_3(t) \end{aligned}$$

che corrispondono alla seguente matrice  $\mathbf{A}$

$$\mathbf{A} = \begin{vmatrix} -a & 0 & -ka \\ a & -a & 0 \\ 0 & a & -a \end{vmatrix}$$

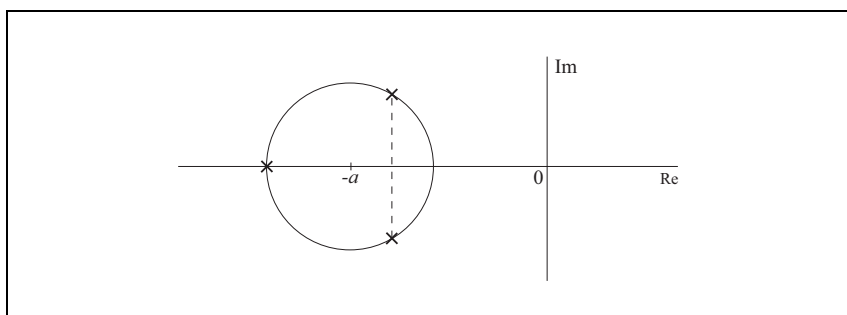
Il polinomio caratteristico della matrice  $\mathbf{A}$  è

$$\Delta_A(\lambda) = \det(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}) = \det \begin{vmatrix} \lambda + a & 0 & ka \\ -a & \lambda + a & 0 \\ 0 & -a & \lambda + a \end{vmatrix} = (\lambda + a)^3 + ka^3$$

Gli autovalori, pertanto, sono le radici dell'equazione

$$(\lambda + a)^3 = -ka^3$$

e stanno, quindi, sulla circonferenza di centro  $-a$  e raggio  $a\sqrt[3]{k}$ , come mostrato in Fig. 14.



**Figura 14** I tre autovalori del sistema di Fig. 13.

La parte reale dei due autovalori complessi coniugati (che sono quelli dominanti) è, quindi,

$$\text{Re}(\lambda) = -a + \frac{a\sqrt[3]{k}}{2}$$

per cui la condizione di asintotica stabilità  $\text{Re}(\lambda) < 0$  è verificata se e solo se

$$k < 8$$

All'aumentare del guadagno dell'elettrovalvola il sistema diventa, quindi, più lento fino a diventare addirittura instabile. In conclusione, la scelta del parametro di progetto  $k$  dovrà essere il risultato di un compromesso. Infatti, alti valori di  $k$  riducono l'effetto del disturbo ma rendono più lenta la risposta del sistema (aumentando la costante di tempo dominante del sistema).



### 18. Raggiungibilità e legge di controllo

Il movimento di un sistema lineare è dato da

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t)\mathbf{x}(0) + \Psi(t)u_{(0,t)}(\cdot)$$

cioè da somma di movimento libero e di movimento forzato. Il movimento forzato

$$\Psi(t)u_{(0,t)}(\cdot) = \begin{cases} \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\xi)} \mathbf{b}u(\xi) d\xi \\ \sum_{i=0}^{t-1} \mathbf{A}^{t-i-1} \mathbf{b}u(i) \end{cases}$$

rappresenta, quindi, al variare della funzione d'ingresso  $u_{(0,t)}(\cdot)$ , l'insieme  $X_r(t)$  di tutti gli stati raggiungibili all'istante  $t$  a partire dall'origine dello spazio di stato. Evidentemente tale insieme  $X_r(t)$  gode della proprietà

$$X_r(t_1) \subset X_r(t_2) \quad t_1 \leq t_2$$

Inoltre, si può mostrare che  $X_r(t)$  smette di crescere a partire da un certo istante  $t^*$ , cioè  $X_r(t) = X_r$  per  $t \geq t^*$ . Infine, se  $X_r = R^n$  si dice che il sistema è *completamente raggiungibile*. Vale, a questo proposito, il seguente teorema, noto come *teorema di Kalman*.

#### Teorema 9 (condizione di completa raggiungibilità)

Un sistema lineare  $(\mathbf{A}, \mathbf{b})$  di ordine  $n$  è completamente raggiungibile se e solo se gli  $n$  vettori  $\mathbf{b}, \mathbf{A}\mathbf{b}, \dots, \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{b}$ , detti vettori di raggiungibilità, sono linearmente indipendenti. Inoltre, in un sistema completamente raggiungibile ogni stato è raggiungibile dall'origine in un tempo qualsiasi se il sistema è a tempo continuo e in al più  $n$  transizioni se il sistema è a tempo discreto.

Spesso questo teorema è formulato facendo riferimento alla matrice di raggiungibilità (detta anche matrice di Kalman)

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \mathbf{b} & \mathbf{A}\mathbf{b} & \dots & \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{b} \end{bmatrix}$$

Tale matrice è quadrata (di dimensione  $n \times n$ ) e per quanto detto la completa raggiungibilità del sistema è equivalente alla non singolarità di  $\mathbf{R}$  (cioè all'esistenza di  $\mathbf{R}^{-1}$ ).

### Esempio 9

Si consideri il sistema rappresentato in Fig. 15 costituito da due serbatoi  $i=1,2$  alimentati in parallelo con una portata  $u(t)$ , ognuno dei quali ha una portata di uscita proporzionale (secondo un coefficiente  $k_i$ ) al volume d'acqua  $x_i(t)$  invasato nel serbatoio.

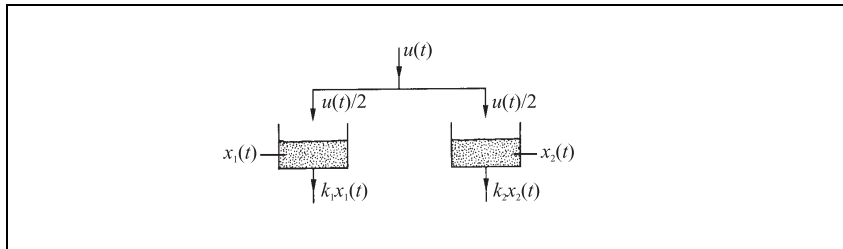


Figura 15 Due serbatoi alimentati in parallelo

Per bilancio di massa possiamo scrivere

$$\dot{x}_1 = -k_1 x_1 + \frac{u}{2}$$

$$\dot{x}_2 = -k_2 x_2 + \frac{u}{2}$$

che sono le equazioni di stato di un sistema lineare con

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -k_1 & 0 \\ 0 & -k_2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}$$

La matrice di raggiungibilità è allora

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1/2 & -k_1/2 \\ 1/2 & -k_2/2 \end{bmatrix}$$

per cui il sistema risulta completamente raggiungibile se e solo se  $k_1 \neq k_2$ . Il motivo di questo risultato è intuitivo, perché nel caso di serbatoi uguali ( $k_1 = k_2$ ) non si riescono a creare sbilanciamenti ( $x_1(t) \neq x_2(t)$ ) dato che, per ipotesi, si parte da una situazione bilanciata ( $x_1(0) = x_2(0) = 0$ ).

♣

L'importanza della completa raggiungibilità di un sistema si manifesta qualora si cerchi di modificare la dinamica di questo sistema asservendo il suo ingresso  $u(t)$  al suo stato  $\mathbf{x}(t)$  per mezzo di una retroazione

$$u(t) = \mathbf{k}^T \mathbf{x}(t) + v(t)$$

nota come *legge di controllo* (algebraica e lineare). La Fig. 16 illustra il sistema risultante, detto anche sistema controllato, che ha  $v(t)$  come nuovo ingresso.

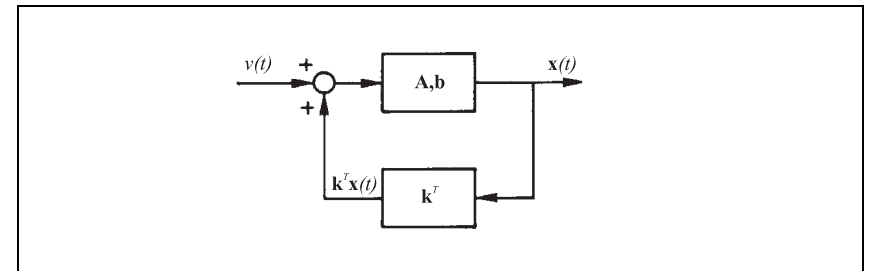


Figura 16 Sistema controllato costituito dal sistema  $(\mathbf{A}, \mathbf{b})$  e dal controllore  $\mathbf{k}^T$

Il blocco in retroazione, spesso detto *controllore*, realizza la semplice operazione di somma pesata  $k_1 x_1 + \dots + k_n x_n$  ( $= \mathbf{k}^T \mathbf{x}(t)$ ) delle variabili di stato.

Se il sistema  $(\mathbf{A}, \mathbf{b})$  è a tempo continuo il sistema controllato è descritto dalle equazioni di stato

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}(\mathbf{k}^T \mathbf{x} + v) = (\mathbf{A} + \mathbf{b}\mathbf{k}^T)\mathbf{x} + \mathbf{b}v$$

In altre parole, il sistema  $(\mathbf{A}, \mathbf{b})$  è stato trasformato, per mezzo del controllore  $\mathbf{k}^T$ , nel sistema controllato  $(\mathbf{A} + \mathbf{b}\mathbf{k}^T, \mathbf{b})$ . È stata così modificata la dinamica del sistema, perché il polinomio caratteristico si è trasformato da  $\Delta_{\mathbf{A}}(\lambda)$  in  $\Delta_{\mathbf{A} + \mathbf{b}\mathbf{k}^T}(\lambda)$ . Ovviamente, le stesse considerazioni valgono per i sistemi a tempo discreto. Ciò premesso è



possibile dimostrare il seguente risultato, che mostra come la completa raggiungibilità sia condizione necessaria e sufficiente per la fissabilità degli autovalori del sistema controllato.

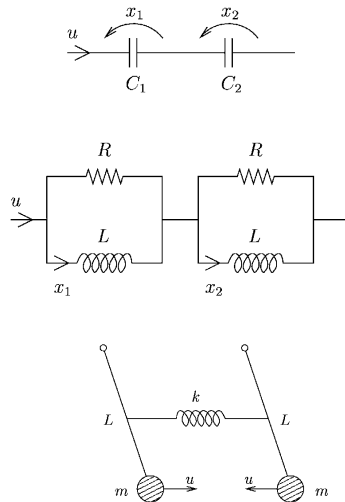
**Teorema 10 (fissabilità degli autovalori)**

Gli autovalori del sistema controllato  $(A + bk^T)$  possono essere fissati arbitrariamente, per mezzo di un controllore  $k^T$ , se e solo se il sistema  $(A, b)$  è completamente raggiungibile.

Questo teorema dice che la dinamica di un sistema completamente raggiungibile può essere plasmata a piacere asservendo il suo ingresso alle sue variabili di stato. Naturalmente, le conseguenze più spettacolari sono la possibilità di stabilizzare un sistema instabile o di destabilizzarne uno stabile. Poiché la completa raggiungibilità è una proprietà genericamente soddisfatta in un sistema lineare (si pensi all'Esempio 10 o più in generale, si ricordi che deve essere  $\det R = 0$  affinché un sistema non sia completamente raggiungibile) si può capire come lo schema di Fig. 14 sia di grande interesse nelle applicazioni.

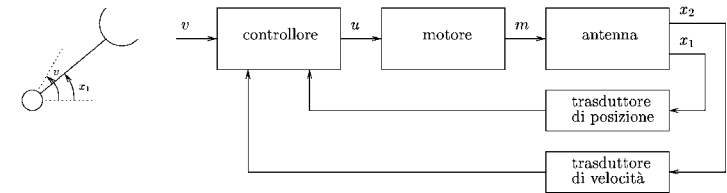
**Problema 28 (A, I)**

Si dica, senza effettuare alcun conto, perché i seguenti quattro sistemi (due elettrici, uno meccanico e uno idraulico) non sono completamente raggiungibili.



**Problema 29 (A, II)**

Un'antenna con momento di inerzia  $J$  e soggetta ad attrito viscoso deve poter essere puntata in qualsiasi direzione  $v$  e per questo motivo viene guidata da un motore (vedi figura) che esercita una coppia  $m(t)$  proporzionale alla tensione di alimentazione  $u(t)$  del motore ( $m(t) = \alpha u(t)$ ) che, a sua volta, dipende oltre che dalla posizione desiderata  $v$  anche dalla posizione angolare  $x_1(t)$  e dalla velocità angolare  $x_2(t)$  dell'antenna.



Limitando l'analisi alle leggi di controllo lineari

$$u(t) = k_1(v - x_1(t)) + k_2 x_2(t)$$

si dica se è possibile sintetizzare un controllore (cioè determinare i parametri  $k_1$  e  $k_2$ ) in modo che il sistema risultante abbia dinamica arbitraria (cioè autovalori  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  fissabili ad arbitrio).

**Problema 30 (T, I)**

Verificare che i sistemi in forma canonica di controllo sono completamente raggiungibili.

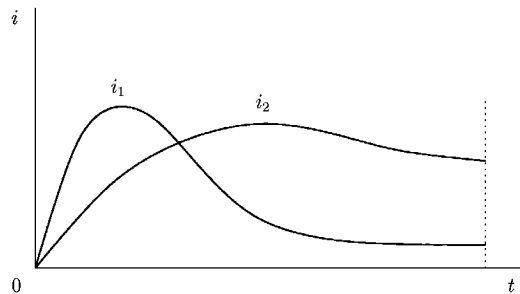
**Problema 31 (T, II)**

Dimostrare che nei sistemi a tempo discreto completamente raggiungibili un qualsiasi stato  $x$  può essere raggiunto dall'origine in  $n$  transizioni applicando gli ingressi  $u(0), u(1), \dots, u(n-1)$  dati da

$$\begin{bmatrix} u(0) \\ u(1) \\ \vdots \\ u(n-1) \end{bmatrix} = R^{-1}x$$

**Problema 32 (A, II)**

In una rete elettrica lineare contenente due induttori e nessun condensatore sono state misurate le correnti  $i_1(t)$  e  $i_2(t)$  nei due induttori per un intervallo finito di tempo. Il risultato è illustrato in figura.



Si dica se il sistema è completamente raggiungibile.

**19. Osservabilità e ricostruzione dello stato**

L'osservabilità di un sistema dinamico è una proprietà che ha a che fare con la possibilità di risolvere un problema "inverso", quello del calcolo dello stato iniziale  $\mathbf{x}(0)$  a partire dalla conoscenza delle funzioni di ingresso e uscita nell'intervallo di tempo  $[0, t)$ . Analogamente, la ricostruibilità ha a che fare con la possibilità di calcolare lo stato finale  $\mathbf{x}(t)$ . È ovvio, pertanto, che l'osservabilità implica la ricostruibilità, perché noti  $\mathbf{x}(0)$  e  $u_{[0,t)}(\cdot)$  è possibile calcolare  $\mathbf{x}(t)$ , mentre l'inverso è vero solo se il sistema è reversibile.

Per analizzare la tematica dell'osservabilità è opportuno considerare l'uscita libera del sistema

$$\mathbf{c}^T \Phi(t) \mathbf{x}(0) = \begin{cases} \mathbf{c}^T e^{At} \mathbf{x}(0) & \text{nei sistemi a tempo continuo} \\ \mathbf{c}^T \mathbf{A}^t \mathbf{x}(0) & \text{nei sistemi a tempo discreto} \end{cases}$$

e definire l'insieme  $X_{no}(t)$  degli stati indistinguibili dall'origine come l'insieme degli stati iniziali  $\mathbf{x}(0)$  per i quali l'uscita libera è identicamente nulla nell'intervallo  $[0, t)$ . Evidentemente, tale insieme gode della proprietà

$$X_{no}(t_1) \supset X_{no}(t_2) \quad t_1 \leq t_2$$

Inoltre, si può mostrare che  $X_{no}(t)$  smette di decrescere a partire da un certo istante  $t^*$ , cioè  $X_{no}(t) = X_{no}$  per  $t > t^*$ . Infine, se  $X_{no} = \{0\}$ , il sistema non ha stati indistinguibili dall'origine e si può mostrare che questa condizione è necessaria e sufficiente per la completa osservabilità del sistema nell'intervallo  $[0, t^*)$ , cioè per la possibilità di calcolare  $\mathbf{x}(0)$  da  $u_{[0,t)}(\cdot)$  e  $y_{[0,t)}(\cdot)$ .

**Teorema 11 (condizione di completa osservabilità)**

Un sistema lineare di ordine  $n$  è completamente osservabile se e solo se gli  $n$  vettori  $\mathbf{c}, \mathbf{A}^T \mathbf{c}, \dots, (\mathbf{A}^T)^{n-1} \mathbf{c}$ , detti vettori di osservabilità, sono linearmente indipendenti. Inoltre, in un sistema completamente osservabile, lo stato iniziale può essere calcolato se le funzioni di ingresso e uscita sono note su un intervallo di tempo di durata qualsiasi se il sistema è a tempo continuo e di durata al più pari a  $n$  se il sistema è a tempo discreto.

La condizione appena vista è spesso formulata facendo riferimento alla *matrice di osservabilità* (detta anche matrice di Kalman)

$$\mathbf{O} = \begin{bmatrix} \mathbf{c}^T \\ \mathbf{c}^T \mathbf{A} \\ \vdots \\ \mathbf{c}^T \mathbf{A}^{n-1} \end{bmatrix}$$

che ha le righe costituite dai vettori di osservabilità (trasposti). Per quanto detto, un sistema è completamente osservabile se e solo se la sua matrice di osservabilità è non singolare (cioè se esiste la matrice  $\mathbf{O}^{-1}$ ). Questa condizione è facilmente verificabile nei sistemi a tempo discreto, nei quali

$$\begin{aligned} y(0) &= \mathbf{c}^T \mathbf{x}(0) + du(0) \\ y(1) &= \mathbf{c}^T \mathbf{A} \mathbf{x}(0) + \mathbf{c}^T \mathbf{b} u(0) + du(1) \\ y(2) &= \mathbf{c}^T \mathbf{A}^2 \mathbf{x}(0) + \mathbf{c}^T \mathbf{A} \mathbf{b} u(0) + \mathbf{c}^T \mathbf{b} u(1) + du(2) \\ &\vdots \\ y(n-1) &= \mathbf{c}^T \mathbf{A}^{n-1} \mathbf{x}(0) + \mathbf{c}^T \mathbf{A}^{n-2} \mathbf{b} u(0) + \dots + \mathbf{c}^T \mathbf{b} u(n-2) + du(n-1) \end{aligned}$$

Infatti, il sistema appena scritto, che ha  $n$  equazioni e  $n$  incognite (il vettore  $\mathbf{x}(0)$ ), è risolubile se e solo se la matrice di osservabilità  $\mathbf{O}$  è non singolare.

**Esempio 10**

Si supponga che in un allevamento di conigli in cui valgono le ipotesi di Fibonacci (si veda l'*Esempio 2*) siano state prelevate 10 coppie di conigli adulti e che all'inizio e alla fine dell'anno siano state osservate 50 e 60 coppie di conigli. Ciò significa che

$$u(0) = 10 \quad y(0) = 50 \quad y(1) = 60$$

Poiché il sistema è descritto dalla terna

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{c}^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$$

risulta

$$\mathbf{O} = \begin{bmatrix} \mathbf{c}^T \\ \mathbf{c}^T \mathbf{A} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

per cui il sistema è completamente osservabile e

$$\mathbf{O}^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Il sistema di 2 equazioni in 2 incognite

$$y(0) = \mathbf{c}^T \mathbf{x}(0)$$

$$y(1) = \mathbf{c}^T \mathbf{A} \mathbf{x}(0) + \mathbf{c}^T \mathbf{b} u(0)$$

è allora risolubile rispetto a  $\mathbf{x}(0)$

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{O}^{-1} \begin{bmatrix} y(0) \\ y(1) - \mathbf{c}^T \mathbf{b} u(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 50 \\ 70 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30 \\ 20 \end{bmatrix}$$

Si può, quindi, concludere che all'inizio dell'anno erano presenti nell'allevamento 30 coppie di conigli giovani e 20 di conigli adulti.

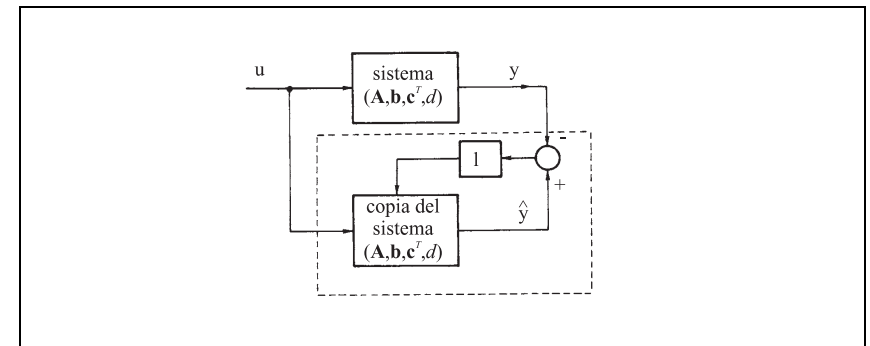
♣

Il confronto dei *Teoremi 9 e 11* permette di notare una forte analogia tra raggiungibilità e osservabilità, formalizzabile nel seguente principio di dualità.

**Teorema 12 (principio di dualità)**

Indicato come duale del sistema  $\Sigma = (\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{c}^T, d)$  il sistema  $\Sigma^* = (\mathbf{A}^T, \mathbf{c}, \mathbf{b}^T, d)$ , si può affermare che un sistema  $\Sigma$  è completamente raggiungibile [osservabile] se e solo se il suo duale  $\Sigma^*$  è completamente osservabile [raggiungibile]. Inoltre, la matrice di raggiungibilità di un sistema è la trasposta della matrice di osservabilità del sistema duale.

Tale principio permette di dualizzare il *Teorema 10* sull'equivalenza tra completa raggiungibilità e fissabilità degli autovalori del sistema controllato. Per questo premettiamo la nozione di *ricostruttore* dello stato, illustrata schematicamente in *Fig. 17*.



**Figura 17** Un sistema con ricostruttore dello stato

Il ricostruttore è costituito da una copia del sistema (con stato  $\hat{\mathbf{x}}(t)$ ) cui è, tuttavia, applicato, oltre all'ingresso  $u(t)$ , un secondo ingresso  $(\hat{y}(t) - y(t))$  legato alla differenza tra l'uscita ricostruita  $\hat{y}(t)$  e l'uscita del sistema. Il vettore  $\mathbf{I}$ , che identifica univocamente il ricostruttore, verrà supposto, d'ora in avanti, costante nel tempo (ricostruttore invariante). Come vedremo tra poco, ciò equivale, in generale, a rinunciare alla possibilità di ricostruire esattamente lo stato del sistema in tempo finito. Se il sistema è, ad esempio, a tempo continuo

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A} \mathbf{x}(t) + \mathbf{b} u(t)$$

$$y(t) = \mathbf{c}^T \mathbf{x}(t) + d u(t)$$

il suo ricostruttore è descritto dalle equazioni

$$\begin{aligned}\dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) &= \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{b}u(t) + \mathbf{I}(\hat{y}(t) - y(t)) \\ \hat{y}(t) &= \mathbf{c}^T \hat{\mathbf{x}}(t) + du(t)\end{aligned}$$

Indicato con

$$\mathbf{e}(t) = \hat{\mathbf{x}}(t) - \mathbf{x}(t)$$

l'errore di ricostruzione, cioè la differenza tra stato ricostruito  $\hat{\mathbf{x}}(t)$  e stato  $\mathbf{x}(t)$  del sistema, è immediato verificare che

$$\dot{\mathbf{e}}(t) = (\mathbf{A} + \mathbf{Ic}^T)\mathbf{e}(t) \quad (25'')$$

Ciò significa che la dinamica dell'errore di ricostruzione è la dinamica del sistema libero (25'') con stato iniziale  $\mathbf{e}(0) = \hat{\mathbf{x}}(0) - \mathbf{x}(0)$ , e non risente, quindi, in alcun modo dell'ingresso applicato al sistema. Nel caso di sistemi a tempo discreto la (25'') diventa semplicemente

$$\mathbf{e}(t+1) = (\mathbf{A} + \mathbf{Ic}^T)\mathbf{e}(t) \quad (25''')$$

per cui si può concludere che lo stato ricostruito  $\hat{\mathbf{x}}(t)$  tende allo stato del sistema  $\mathbf{x}(t)$ , qualsiasi sia l'errore di stima iniziale  $\hat{\mathbf{x}}(0) - \mathbf{x}(0)$ , se e solo se il sistema (25) è asintoticamente stabile. Quando ciò si verifica si dice che il ricostruttore  $\mathbf{I}$  è un ricostruttore asintotico dello stato. Naturalmente, la velocità con cui lo stato ricostruito  $\hat{\mathbf{x}}(t)$  converge verso  $\mathbf{x}(t)$  è legata agli autovalori (e, in particolare, all'autovalore dominante) della matrice  $\mathbf{A} + \mathbf{Ic}^T$ . A questo proposito è interessante tener presente il seguente risultato, che è, appunto, il duale di quello sulla fissabilità degli autovalori del sistema controllato.

**Teorema 13** (fissabilità degli autovalori del ricostruttore)

Gli autovalori della matrice  $\mathbf{A} + \mathbf{Ic}^T$  (che descrive la dinamica dell'errore di ricostruzione (25)) possono essere fissati arbitrariamente per mezzo di un ricostruttore  $\mathbf{I}$ , se e solo se il sistema  $(\mathbf{A}, \mathbf{c}^T)$  è completamente osservabile.

Questo risultato dice che elaborando in tempo reale le misure d'ingresso e uscita di un sistema lineare completamente osservabile è possibile ricostruire con grande rapidità e precisione lo stato del sistema. Poiché la completa osservabilità è (come la completa

raggiungibilità) una proprietà genericamente soddisfatta in un sistema lineare, si può capire come lo schema di Fig. 15 sia di grande interesse nelle applicazioni.

**Problema 33** (N, I)

Del sistema

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_2 + x_3 \\ \dot{x}_3 &= -x_1 - x_2 - x_3 + u\end{aligned}$$

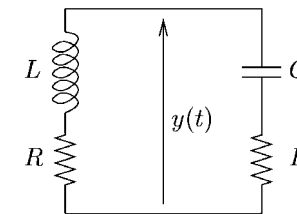
si è rilevato l'andamento dell'ingresso  $u(t)$  e della seconda delle variabili di stato per un intervallo di tempo  $[0, T]$ . Si dica se è possibile determinare lo stato iniziale del sistema  $\mathbf{x}(0)$ , elaborando opportunamente i due segnali rilevati.

**Problema 34** (A, II)

Il 2 gennaio di ogni anno  $t$  lo Stato effettua un versamento bancario di  $u(t)$  milioni di lire ad un ente di cultura. Il 3 gennaio tale ente impegna 1/3 di quanto ha in banca per spese correnti, cede 1/3 di quanto ha in parti uguali a due agenzie che organizzano rispettivamente concerti e conferenze e lascia in banca il rimanente terzo al tasso di interesse del 10% annuo. Le due agenzie spendono ogni anno il 70% di quanto hanno in banca il 4 gennaio e lasciano il rimanente depositato al tasso di interesse del 10%. Si dica se conoscendo l'accredito  $u(t)$  e la differenza tra le spese delle due agenzie per una serie di anni  $t=0, 1, 2, \dots$  è possibile determinare quanto hanno in banca al primo gennaio dell'anno  $t=0$  l'ente e le due agenzie (si consiglia di indicare questi valori con  $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$  e  $x_3(t)$ ).

**Problema 35** (A, II)

Si dica se la tensione  $y(t)$  della rete elettrica



può essere identicamente nulla senza che la rete sia a riposo (cioè senza che siano identicamente nulle la corrente nell'induttore e la tensione sul condensatore).

**Problema 36 (A, II)**

Ogni sera Marco e Franco ricevono dalla mamma  $u(t)$  lire. Durante il giorno, Marco spende la metà di quanto possiede al mattino giocando alle slot machines. Franco è più prudente e spende solo un terzo di quanto ha. Supponendo di conoscere oltre a  $u(t)$  anche la spesa totale  $y(t)$  dei due fratelli per una serie sufficientemente lunga di giorni, è possibile determinare univocamente quanto possiedono singolarmente i due fratelli?

**Problema 37 (A, II)**

Si dica se, conoscendo la percentuale (costante) di bocciati di ogni classe di una scuola media e il numero di iscritti (al primo anno) e di diplomati per un certo numero di anni consecutivi, è possibile risalire al numero di allievi frequentanti ogni singola classe (per semplicità si supponga che gli allievi non abbandonino la scuola prima di averla terminata e che non esistano allievi provenienti da altre scuole che si iscrivano al secondo o terzo anno).

**20. Sintesi del regolatore**

Nel *Paragrafo 16* è stata introdotta la nozione di *legge di controllo*

$$u(t) = \mathbf{k}^T \mathbf{x}(t) + v(t)$$

che descrive la dipendenza dell'ingresso  $u(t)$  dallo stato  $\mathbf{x}(t)$  oltre che, eventualmente, da un nuovo ingresso  $v(t)$ . Nel *Paragrafo 17* si è invece mostrato come si possa determinare una stima  $\hat{\mathbf{x}}(t)$  dello stato di un sistema  $(\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{c}^T, d)$  elaborando il suo ingresso e la sua uscita per mezzo di un sistema chiamato *ricostruttore*, descritto, nel caso a tempo continuo, dall'equazione

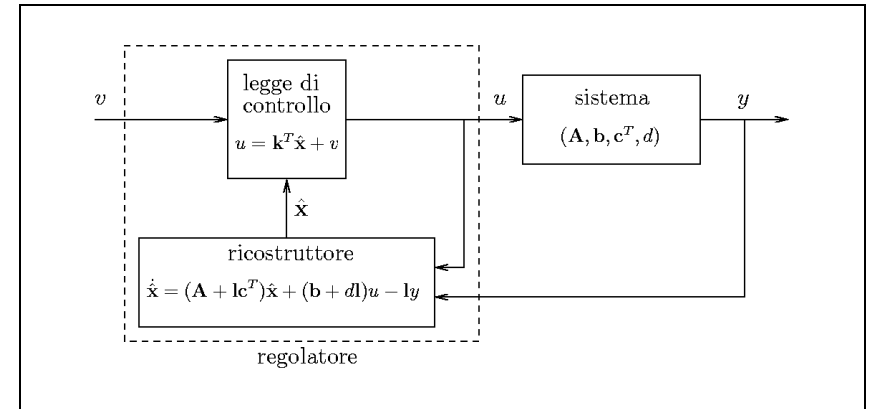
$$\begin{aligned} \dot{\hat{\mathbf{x}}} &= \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{b}u + \mathbf{l}(\hat{y} - y) \\ \hat{y} &= \mathbf{c}^T \hat{\mathbf{x}} + du \end{aligned}$$

Ci si può, a questo punto, chiedere cosa succeda quando un sistema venga retroazionato da un *regolatore*  $(\mathbf{k}^T, \mathbf{l})$ , cioè da un sistema costituito da legge di controllo e ricostruttore, come indicato in *Fig. 18*. Nel regolatore la legge di controllo fa uso della stima  $\hat{\mathbf{x}}$  fornita dal ricostruttore. Poiché  $u$  è l'uscita del regolatore e  $v$  e  $y$  sono gli ingressi, a conti fatti l'equazione di stato del regolatore è

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = (\mathbf{A} + \mathbf{b}\mathbf{k}^T + \mathbf{l}\mathbf{c}^T + d\mathbf{l}\mathbf{k}^T)\hat{\mathbf{x}} + (\mathbf{b} + d\mathbf{l})v - \mathbf{l}y$$

mentre la sua trasformazione di uscita è

$$u = \mathbf{k}^T \hat{\mathbf{x}} + v$$



**Figura 18** Sistema regolato, costituito dal sistema e dal regolatore (a sua volta costituito da legge di controllo e ricostruttore).

Effettuando un semplice cambio di variabili  $((\mathbf{x}, \hat{\mathbf{x}}) \rightarrow (\mathbf{x}, \mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}))$  è immediato rendersi conto che il polinomio caratteristico del sistema regolato (che è di ordine  $2n$ ) è dato da

$$\Delta_{\text{reg}}(\lambda) = \Delta_{\mathbf{A} + \mathbf{b}\mathbf{k}^T}(\lambda) \Delta_{\mathbf{A} + \mathbf{l}\mathbf{c}^T}(\lambda)$$

Ricordando che  $\Delta_{\mathbf{A} + \mathbf{b}\mathbf{k}^T}(\cdot)$  e  $\Delta_{\mathbf{A} + \mathbf{l}\mathbf{c}^T}(\cdot)$  sono i polinomi caratteristici associati, rispettivamente, alla legge di controllo e al ricostruttore e che tali polinomi possono essere fissati arbitrariamente per mezzo di una scelta opportuna dei vettori  $\mathbf{k}^T$  e  $\mathbf{l}$  se e solo se il sistema è completamente raggiungibile e osservabile (*Teoremi 10 e 13*), si ricava allora il seguente risultato.

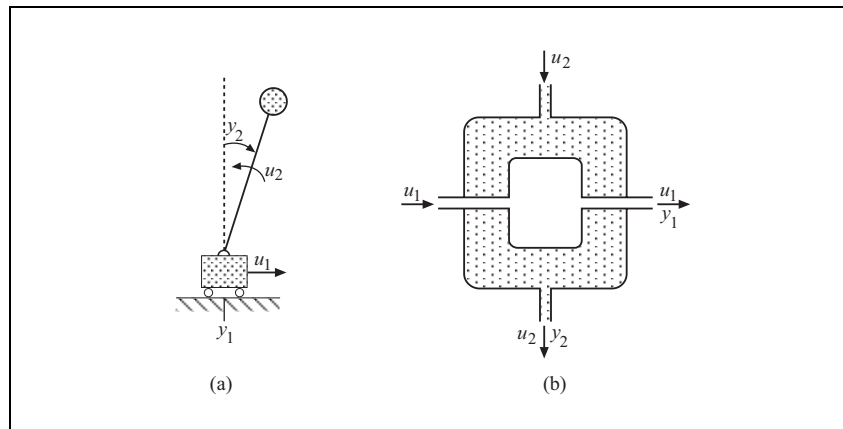
**Teorema 14 (assegnabilità degli autovalori)**

I due polinomi  $\Delta_{\mathbf{A} + \mathbf{b}\mathbf{k}^T}(\cdot)$  e  $\Delta_{\mathbf{A} + \mathbf{l}\mathbf{c}^T}(\cdot)$  che costituiscono il polinomio caratteristico  $\Delta_{\text{reg}}(\cdot)$  del sistema regolato possono essere variati a piacere variando i vettori  $\mathbf{k}^T$  e  $\mathbf{l}$  del regolatore se e solo se il sistema  $(\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{c}^T, d)$  è completamente raggiungibile e osservabile.

Questo risultato è a volte formulato in modo sintetico, ma significativo, dicendo che la dinamica di un sistema può essere modificata a piacere per mezzo di un regolatore se e solo se il sistema è completamente raggiungibile e osservabile. Tale affermazione non è tuttavia pienamente corretta se per "dinamica" si intende l'insieme dei  $2n$  autovalori del sistema regolato. Il fatto che siano assegnabili a piacere i polinomi caratteristici (e, quindi, gli  $n$  autovalori) delle matrici  $\mathbf{A} + \mathbf{b}\mathbf{k}^T$  e  $\mathbf{A} + \mathbf{l}\mathbf{c}^T$  non implica, infatti, che siano

fissabili ad arbitrio i  $2n$  autovalori della matrice  $\mathbf{A}_{reg}$ . Ciò è vero, in particolare, se  $n$  è dispari, perché in tal caso almeno un autovalore di  $\mathbf{A} + \mathbf{b}\mathbf{k}^T$  e uno di  $\mathbf{A} + \mathbf{l}\mathbf{c}^T$  devono essere reali, così che almeno due autovalori di  $\mathbf{A}_{reg}$  devono essere reali. In altre parole, se  $n$  è dispari non si può pretendere che  $\mathbf{A}_{reg}$  abbia  $n$  coppie di autovalori complessi coniugati.

Il *Teorema 14* afferma che, nel caso il sistema sia completamente raggiungibile e osservabile, è possibile determinare i vettori  $\mathbf{k}^T$  e  $\mathbf{l}$  del regolatore in modo del tutto indipendente, usando le procedure di calcolo esistenti per la sintesi della legge di controllo e del ricostruttore. D'altra parte, nelle applicazioni esiste spesso l'interesse a scegliere le variabili di ingresso e di uscita in modo tale che la realizzazione del regolatore risulti poco costosa. Per questo motivo, è di particolare interesse sapere se esiste la possibilità di ottenere un sistema regolato con dinamica arbitraria attrezzando il sistema con un regolatore che preveda una sola variabile misurata ( $y$ ) e una sola variabile di controllo ( $u$ ). La *Fig. 19* riporta due sistemi ognuno dei quali ha due possibili variabili di controllo ( $u_1$  e  $u_2$ ) e due possibili variabili di uscita ( $y_1$  e  $y_2$ ).



**Figura 19** Due sistemi da regolare: (a) pendolo rovesciato con carrello; (b) scambiatore di calore.

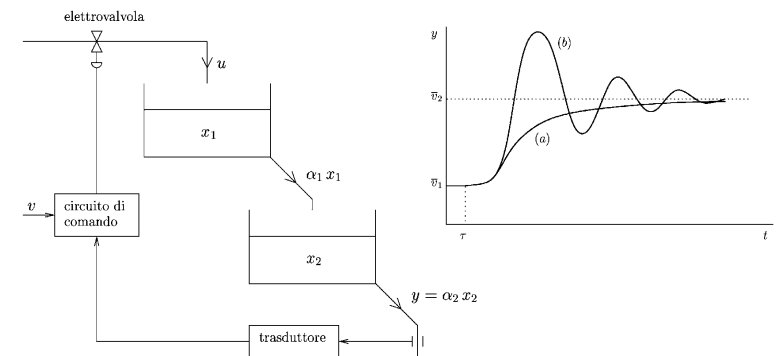
Nel primo sistema,  $u_1$  è la forza applicata al carrello e  $u_2$  il momento applicato all'asta, mentre  $y_1$  e  $y_2$  sono, rispettivamente, posizione del carrello e inclinazione dell'asta. Il secondo sistema è, invece, uno scambiatore di calore in cui  $u_1$  e  $u_2$  sono le portate dei due fluidi e  $y_1$  e  $y_2$  le loro temperature.

Poiché il primo sistema è instabile e il secondo è molto lento, può essere necessario modificare la dinamica di questi sistemi per mezzo di un regolatore. Per quanto detto in precedenza, è allora di interesse verificare se, per ognuno di questi sistemi, esiste almeno una coppia di variabili di ingresso e uscita per la quale il sistema risulta

completamente raggiungibile e osservabile. Se ciò accade, il progetto del regolatore (calcolo di  $\mathbf{k}^T$  e  $\mathbf{l}$ ) sarà particolarmente facile da eseguire e la sua realizzazione sarà plausibilmente poco costosa. Nel caso opposto, sia il progetto del regolatore che la sua realizzazione saranno più onerosi.

### Problema 38 (A, II)

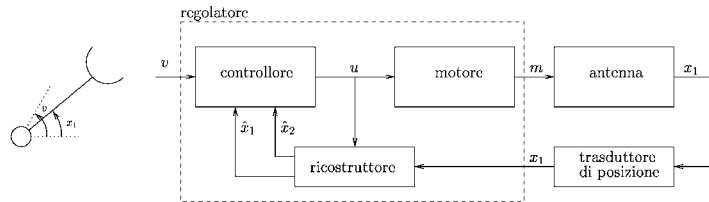
Due serbatoi connessi in cascata sono alimentati da una portata  $u(t)$  che può essere variata per mezzo di una elettrovalvola controllata da un circuito di comando. Si verifichi dapprima che se il circuito di comando viene disattivato e la portata di alimentazione viene variata istantaneamente all'istante  $\tau$  da un valore  $\bar{v}_1$  ad un valore  $\bar{v}_2$  si ottiene un transitorio della portata di uscita  $y$  del tipo indicato con (a) in figura.



In seguito, si mostri che dotando l'elettrovalvola di un circuito di comando sensibile alla portata  $y$  (misurata per mezzo di un trasduttore) oltre che al segnale esterno  $v$  rappresentante la portata desiderata, è possibile generare dei transitori di tipo (b) caratterizzati da oscillazioni smorzate e che periodo e smorzamento delle oscillazioni possono essere fissati arbitrariamente sintetizzando opportunamente il circuito di comando dell'elettrovalvola.

### Problema 39 (A, II)

Un'antenna con momento di inerzia  $J$  soggetta ad attrito viscoso deve poter essere puntata in qualsiasi direzione  $v$  e per questo motivo viene guidata da un motore (vedi figura) che esercita una coppia  $m(t)$  proporzionale alla tensione di alimentazione  $u(t)$  del motore ( $m(t) = \alpha u(t)$ ) che, a sua volta, dipende, oltre che dalla posizione desiderata  $v$ , anche dalle stime  $\hat{x}_1(t)$  e  $\hat{x}_2(t)$  della posizione e della velocità angolare dell'antenna, ottenute da una misura in continua della posizione angolare  $x_1$  (vedi figura).



Limitando l'analisi ai controllori e ai ricostruttori lineari, si dica se è, in linea di principio, possibile sintetizzare un regolatore tale che il sistema risultante abbia dinamica arbitraria (cioè autovalori fissabili ad arbitrio).

**21. Esempio di applicazione: regolazione di un satellite su orbita circolare**

Si supponga che un satellite di massa unitaria possa permanere indefinitamente su un'orbita circolare con centro nel centro della terra (tale ipotesi verrà più avanti verificata) qualora il suo movimento non venga perturbato. Tuttavia, la presenza di agenti esterni fa sì che il satellite abbandoni l'orbita desiderata, per cui è necessario intervenire opportunamente in modo da riportarlo sull'orbita voluta e questo può essere fatto per mezzo di una spinta radiale  $u_1$  e/o di una spinta tangenziale  $u_2$ . Per giudicare se il satellite è sull'orbita desiderata si può pensare di misurare tutte le sue variabili di stato (due variabili individuano la posizione e due la velocità), ma si può anche pensare di misurare solo alcune (al limite una sola) per poi ricostruire le altre per mezzo di un ricostruttore asintotico. Il problema è, pertanto, quello della scelta delle variabili di controllo e di uscita in modo da poter ottenere un sistema regolato soddisfacente dal punto di vista della stabilità. In altre parole, il problema consiste nell'associare al sistema fisico in esame un sistema dinamico con un ingresso e una uscita che sia completamente raggiungibile e osservabile.

Con le ipotesi fatte, il moto del satellite è retto dalle equazioni

$$\begin{aligned} \ddot{\rho}(t) &= \rho(t)\dot{\vartheta}(t)^2 - \frac{k}{\rho(t)^2} + u_1(t) \\ \ddot{\vartheta}(t) &= -\frac{2\dot{\vartheta}(t)\dot{\rho}(t)}{\rho(t)} + \frac{1}{\rho(t)}u_2(t) \end{aligned} \tag{26}$$

dove  $\rho(t)$  e  $\vartheta(t)$  sono la distanza del satellite dal centro della terra e l'angolo formato con un riferimento fisso,  $u_1(t)$  e  $u_2(t)$  sono la forza radiale e tangenziale e  $k$  è la costante di attrazione universale.

Se  $u_1(t) = u_2(t) = 0$  (moto libero) le (26) ammettono la soluzione

$$\rho(t) = R \quad \vartheta(t) = \omega t$$

con

$$R^3 \omega^2 = k$$

che corrisponde a un'orbita circolare di raggio  $R$  percorsa una volta ogni  $2\pi/\omega$  unità di tempo.

Per passare a una descrizione in termini di variabili di stato si può porre

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \rho(t) - R && \text{(scostamento radiale)} \\ x_2(t) &= \dot{\rho}(t) \\ x_3(t) &= R(\vartheta(t) - \omega t) && \text{(scostamento angolare)} \\ x_4(t) &= R(\dot{\vartheta}(t) - \omega) \end{aligned}$$

da cui, derivando e tenendo conto delle (26), si ottiene un sistema  $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))$

con

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= (x_1(t) + R) \left( \frac{x_4(t) + R\omega}{R} \right)^2 - \frac{k}{(x_1(t) + R)^2} + u_1(t) \\ \dot{x}_3(t) &= x_4(t) \\ \dot{x}_4(t) &= -2R \frac{x_4(t) + R\omega}{R(x_1(t) + R)} x_2(t) + \frac{R}{x_1(t) + R} u_2(t) \end{aligned} \tag{27}$$

Il sistema non lineare (27) ammette l'origine come stato di equilibrio (corrispondente all'orbita circolare) e può essere linearizzato attorno a tale equilibrio. Il sistema linearizzato è del tipo

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}_1 u_1(t) + \mathbf{b}_2 u_2(t)$$

dove

$$\mathbf{A} = \left[ \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right]_{\substack{\bar{\mathbf{x}}=0 \\ \bar{u}_1=0 \\ \bar{u}_2=0}}, \quad \mathbf{b}_1 = \left[ \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial u_1} \right]_{\substack{\bar{\mathbf{x}}=0 \\ \bar{u}_1=0 \\ \bar{u}_2=0}}, \quad \mathbf{b}_2 = \left[ \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial u_2} \right]_{\substack{\bar{\mathbf{x}}=0 \\ \bar{u}_1=0 \\ \bar{u}_2=0}}$$

Più semplicemente, il sistema linearizzato può essere ricavato notando che la prima e la terza delle (27) sono già lineari, mentre la seconda e la quarta possono essere linearizzate trascurando i termini infinitesimi di ordine superiore al primo (si noti che  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $x_3$  e  $x_4$  sono infinitesimi del primo ordine). Ad esempio, per la seconda delle (27) si ottiene

$$\begin{aligned} \dot{x}_2(t) &= x_1(t) \left( \frac{x_4(t)^2}{R^2} + \omega^2 + 2\frac{\omega}{R}x_4(t) \right) + R \left( \frac{x_4(t)^2}{R^2} + \omega^2 + 2\frac{\omega}{R}x_4(t) \right) - \frac{k}{(x_1(t) + R)^2} + u_1(t) \\ &\cong \omega^2 x_1(t) + R\omega^2 + 2\omega x_4(t) - \frac{k}{R^2} + \frac{2k}{R^3} x_1(t) + u_1(t) \end{aligned}$$

Il secondo e quarto addendo hanno somma nulla perché  $R^3\omega^2 = k$  e, pertanto, alle piccole variazioni

$$\dot{x}_2(t) = 3\omega^2 x_1(t) + 2\omega x_4(t) + u_1(t)$$

Similmente si ottiene

$$\dot{x}_4(t) = -2\omega x_2(t) + u_2(t)$$

e quindi, in conclusione,

$$\mathbf{A} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3\omega^2 & 0 & 0 & 2\omega \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2\omega & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad \mathbf{b}_1 = \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \quad \mathbf{b}_2 = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix} \quad (28)$$

Da qui in avanti, il sistema terra-satellite sarà rappresentato dal sistema con  $\mathbf{A}$  data dalla (28) considerando uno solo dei due ingressi e una sola delle variabili di stato come uscita. Ad esempio, se si considera come ingresso la forza radiale  $u_1$  e come uscita lo scostamento angolare  $x_3$  si ottiene il sistema  $(\mathbf{A}, \mathbf{b}_1, \mathbf{c}_3^T)$  dato da

$$\mathbf{A} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3\omega^2 & 0 & 0 & 2\omega \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2\omega & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad \mathbf{b}_1 = \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \\ \mathbf{c}_3^T = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

Affinché sia possibile determinare un regolatore con dinamica arbitraria, è necessario che il sistema sia completamente raggiungibile e osservabile. Pertanto, come primo passo ci si può chiedere se il sistema sia completamente raggiungibile con uno solo dei due ingressi. Per questo bisogna analizzare le matrici di raggiungibilità  $\mathbf{R}_1$  e  $\mathbf{R}_2$  dei sistemi  $(\mathbf{A}, \mathbf{b}_1, -)$  e  $(\mathbf{A}, \mathbf{b}_2, -)$ . Tali matrici sono date da

$$\mathbf{R}_1 = \begin{vmatrix} \mathbf{b}_1 & \mathbf{A}\mathbf{b}_1 & \mathbf{A}^2\mathbf{b}_1 & \mathbf{A}^3\mathbf{b}_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & -\omega^2 \\ 1 & 0 & -\omega^2 & 0 \\ 0 & 0 & -2\omega & 0 \\ 0 & -2\omega & 0 & 2\omega^3 \end{vmatrix}$$

$$\mathbf{R}_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{b}_2 & \mathbf{A}\mathbf{b}_2 & \mathbf{A}^2\mathbf{b}_2 & \mathbf{A}^3\mathbf{b}_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 2\omega & 0 \\ 0 & 2\omega & 0 & -2\omega^3 \\ 0 & 1 & 0 & -4\omega^2 \\ 1 & 0 & -4\omega^2 & 0 \end{vmatrix}$$

ed è immediato verificare che  $\mathbf{R}_1$  non è di rango massimo (la seconda e la quarta colonna sono proporzionali) mentre  $\mathbf{R}_2$  lo è. Ciò significa che non si può variare a piacere lo stato del sistema agendo soltanto con la spinta radiale, mentre ciò è possibile per mezzo del solo ingresso  $u_2$  (spinta tangenziale). Pertanto, allo scopo di controllare il satellite su un'orbita circolare, si può pensare di dotarlo soltanto di spinta tangenziale.

Passiamo ora ad analizzare l'osservabilità del sistema. Di particolare interesse è la possibilità di ottenere un regolatore a partire da una sola misura di posizione ( $x_1$  o  $x_3$ ) e, a questo scopo, è necessario verificare l'osservabilità dei sistemi  $(\mathbf{A}, -, \mathbf{c}_1^T)$  e  $(\mathbf{A}, -, \mathbf{c}_3^T)$ . Dette  $\mathbf{O}_1$  e  $\mathbf{O}_3$  le matrici di osservabilità, si ha

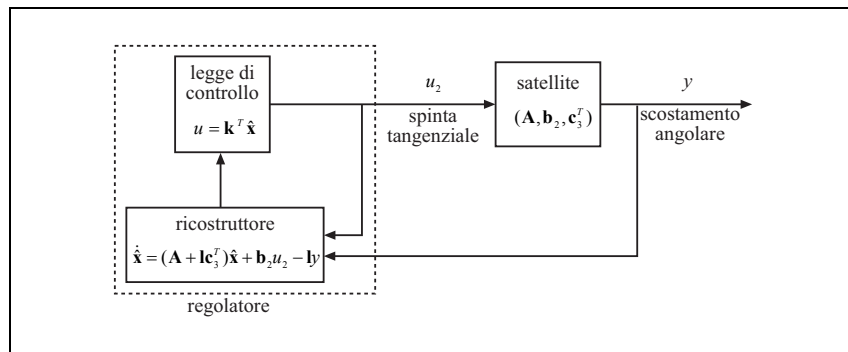
$$\mathbf{O}_1 = \begin{vmatrix} \mathbf{c}_1^T \\ \mathbf{c}_1^T \mathbf{A} \\ \mathbf{c}_1^T \mathbf{A}^2 \\ \mathbf{c}_1^T \mathbf{A}^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3\omega^2 & 0 & 0 & 2\omega \\ 0 & -\omega^2 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\mathbf{O}_3 = \begin{vmatrix} \mathbf{c}_3^T \\ \mathbf{c}_3^T \mathbf{A} \\ \mathbf{c}_3^T \mathbf{A}^2 \\ \mathbf{c}_3^T \mathbf{A}^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2\omega & 0 & 0 \\ -6\omega^3 & 0 & 0 & -4\omega^2 \end{vmatrix}$$

ed è immediato constatare che  $\mathbf{O}_1$  non è di rango massimo (terza colonna nulla) mentre  $\mathbf{O}_3$  lo è. Quindi il sistema  $(\mathbf{A}, -, \mathbf{c}_3^T)$  è completamente osservabile ed è così possibile ricostruire le quattro variabili di stato pur di misurare lo scostamento angolare  $x_3$  durante un intervallo di tempo finito.

Dall'analisi fatta segue che il sistema  $(\mathbf{A}, \mathbf{b}_2, \mathbf{c}_3^T)$  è completamente raggiungibile e osservabile. Ciò significa che è possibile determinare un regolatore con lo schema di Fig. 19 in modo che gli otto autovalori del sistema regolato assumano valori prefissati ad arbitrio.





**Figura 19** Il sistema regolato, composto dal satellite e dal regolatore.

Il regolatore è individuato dal vettore

$$\mathbf{k} = [k_1 \quad k_2 \quad k_3 \quad k_4]^T$$

che definisce la legge di controllo e dal vettore

$$\mathbf{l} = [l_1 \quad l_2 \quad l_3 \quad l_4]^T$$

che definisce il ricostruttore. Il polinomio caratteristico del sistema regolato è dato dal prodotto dei polinomi caratteristici delle due matrici  $(\mathbf{A} + \mathbf{b}_2 \mathbf{k}^T)$  e  $(\mathbf{A} + \mathbf{l} \mathbf{c}_3^T)$  e, pertanto, per fissare a piacere gli otto autovalori del sistema risultante, è sufficiente fissare i quattro autovalori di  $(\mathbf{A} + \mathbf{b}_2 \mathbf{k}^T)$  (determinando così  $\mathbf{k}^T$ ) e i quattro autovalori di  $(\mathbf{A} + \mathbf{l} \mathbf{c}_3^T)$  (determinando così  $\mathbf{l}$ ). I vettori  $\mathbf{k}^T$  e  $\mathbf{l}$  possono essere calcolati procedendo nel modo seguente. Detti  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$  gli autovalori relativi alla legge di controllo, il polinomio caratteristico di  $(\mathbf{A} + \mathbf{b}_2 \mathbf{k}^T)$  deve risultare pari a  $(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)(\lambda - \lambda_3)(\lambda - \lambda_4)$ . Ma poiché

$$\mathbf{b}_2 \mathbf{k}^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ k_1 & k_2 & k_3 & k_4 \end{bmatrix}$$

si ottiene

$$\Delta_{\mathbf{A} + \mathbf{b}_2 \mathbf{k}^T}(\lambda) = \det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A} - \mathbf{b}_2 \mathbf{k}^T) = \det \begin{bmatrix} \lambda & -1 & 0 & 0 \\ -3\omega^2 & \lambda & 0 & -2\omega \\ 0 & 0 & \lambda & -1 \\ -k_1 & 2\omega - k_2 & -k_3 & \lambda - k_4 \end{bmatrix} = \prod_{i=1}^4 (\lambda - \lambda_i)$$

Uguagliando i coefficienti dei termini di pari grado in  $\lambda$  si ottiene un sistema di quattro equazioni nelle quattro incognite  $k_1, k_2, k_3, k_4$ , che ammette certamente soluzione unica essendo il sistema completamente raggiungibile. Allo stesso modo si procede poi per la matrice  $(\mathbf{A} + \mathbf{l} \mathbf{c}_3^T)$  determinando così i quattro parametri del ricostruttore.

## 22. Scomposizione in parti

Le nozioni di raggiungibilità e osservabilità permettono di interpretare (dopo aver effettuato un opportuno cambio di variabili  $\mathbf{z} = \mathbf{T}\mathbf{x}$ ) un qualsiasi sistema lineare come l'aggregato di quattro sottosistemi chiamati, rispettivamente,

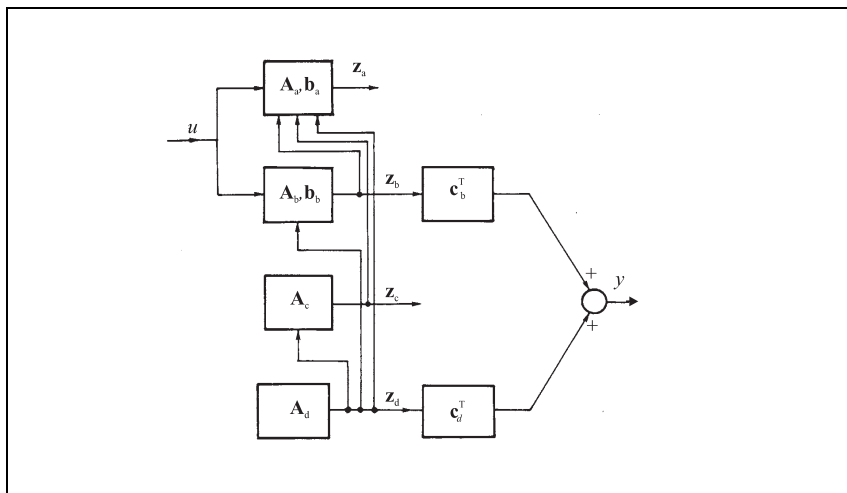
- (a) parte raggiungibile e non osservabile (r,no)
- (b) parte raggiungibile e osservabile (r,o)
- (c) parte non raggiungibile e non osservabile (nr,no)
- (d) parte non raggiungibile e osservabile (nr,o)

Se la dimensione del sistema è  $n$  e  $n_a, n_b, n_c$  e  $n_d$  sono le dimensioni delle quattro parti, ovviamente

$$n = n_a + n_b + n_c + n_d$$

Solo raramente un sistema è costituito da tutte e quattro le parti, anzi, frequente è il caso in cui un sistema è costituito dalla sola parte (b): ciò accade quando il sistema è completamente raggiungibile e completamente osservabile. Le interazioni tra i quattro sottosistemi  $\Sigma_a, \Sigma_b, \Sigma_c$  e  $\Sigma_d$  sono rappresentate nello schema di Fig. 20 in cui, per semplicità, si è supposto che il sistema sia proprio ( $d = 0$ ).

La figura mostra che l'ingresso  $u$  influenza direttamente le parti (a) e (b) e non influenza invece, neppure indirettamente, le parti (c) e (d). Ciò significa che se i sottosistemi (c) e (d) sono inizialmente a riposo ( $\mathbf{z}_c(0) = \mathbf{0}, \mathbf{z}_d(0) = \mathbf{0}$ ) essi resteranno tali, qualsiasi sia l'azione esercitata dall'esterno sul sistema. Al contrario, i vettori di stato  $\mathbf{z}_a$  e  $\mathbf{z}_b$  delle prime due parti possono essere fatti variare, perché influenzati dall'ingresso. La figura mostra anche che l'uscita risente dell'ingresso del sistema soltanto attraverso la parte (b), che è, quindi, l'unica vera responsabile dell'elaborazione di informazione che avviene tra ingresso e uscita di un sistema dinamico. L'uscita è anche influenzata dalla parte (d) ed è, invece, completamente insensibile a ciò che avviene nelle parti (a) e (c): ciò significa che non sarà mai possibile calcolare lo stato iniziale delle parti (a) e (c) a partire da registrazioni di ingresso e uscita. Al contrario, ciò è possibile per le parti (b) e (d) che costituiscono un sistema completamente osservabile.



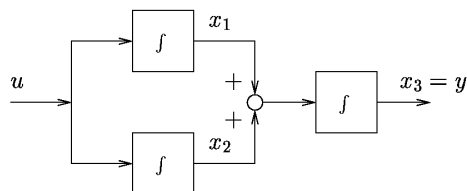
**Figura 20** Un sistema proprio scomposto in parti

È importante notare che le quattro parti costituenti un sistema lineare, benché tra loro interconnesse, non formano cicli, come evidente dalla Fig. 20. Ciò implica che gli autovalori del sistema siano semplicemente la riunione degli autovalori delle quattro parti o, equivalentemente, che il polinomio caratteristico del sistema sia il prodotto dei polinomi caratteristici delle quattro parti, cioè

$$\Delta_A(p) = \Delta_a(p) \Delta_b(p) \Delta_c(p) \Delta_d(p)$$

**Problema 40 (T, II)**

Si consideri il seguente sistema costituito da tre integratori

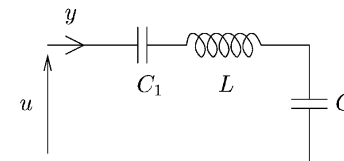


e si dica, senza effettuare calcoli, se il sistema è:

1. completamente raggiungibile
2. completamente osservabile.

**Problema 41 (A, II)**

Si dica se la rete elettrica riportata in figura è completamente raggiungibile e osservabile per tutti i valori (positivi) di  $C_1$ ,  $C_2$  e  $L$  e se ne calcoli la funzione di trasferimento.



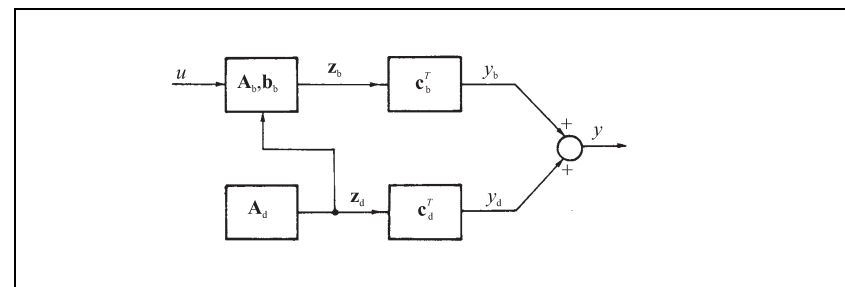
**23. Calcolo del modello ARMA di un sistema (A, b, c<sup>T</sup>, d)**

Possiamo ora riprendere e approfondire il tema, già trattato nel Paragrafo 3, della determinazione del modello ARMA di un assegnato sistema (A, b, c<sup>T</sup>, d). Ricordiamo per questo che un modello ARMA è individuato da una coppia di polinomi (N(p), D(p)) che identificano univocamente l'equazione (7), la quale, a seconda che il tempo sia discreto o continuo, è l'equazione alle differenze (5) o l'equazione differenziale (6). Ricordiamo anche che il modello ARMA si dice di trasferimento se i polinomi N(p) e D(p) sono primi tra loro. Inoltre, il rapporto tra i due polinomi N(p) e D(p) è chiamato funzione di trasferimento e indicato con G(p), cioè

$$G(p) = \frac{N(p)}{D(p)}$$

Ovviamente, conoscere la funzione di trasferimento G(p) non significa conoscere il modello ARMA (N(p), D(p)), a meno che questo sia di trasferimento.

Poiché il modello ARMA rappresenta le relazioni intercorrenti tra ingresso e uscita nel caso generale di stato iniziale qualsiasi, esso deve per forza essere associato alle sole parti osservabili (parti (b) e (d)) del sistema, che per chiarezza riportiamo in Fig. 21 estraendole dalla Fig. 20 del paragrafo precedente.



**Figura 21** Parti osservabili (b) e (d) di un sistema

Nel caso particolare di stato iniziale nullo, lo stato  $\mathbf{z}_d$  della parte osservabile e non raggiungibile è identicamente nullo per cui anche il contributo  $y_d$  sull'uscita è nullo. In tal caso, le funzioni di ingresso e uscita soddisfano la relazione

$$\Delta_b(p)y(t) = N_b(p)u(t) \tag{29}$$

dove  $\Delta_b(p)$  è il polinomio caratteristico della parte raggiungibile e osservabile del sistema. Il modello ARMA completo tiene, invece, conto anche della parte (d) ed è descritto dalla relazione

$$\Delta_b(p)\Delta_d(p)y(t) = N_b(p)\Delta_d(p)u(t) \tag{30}$$

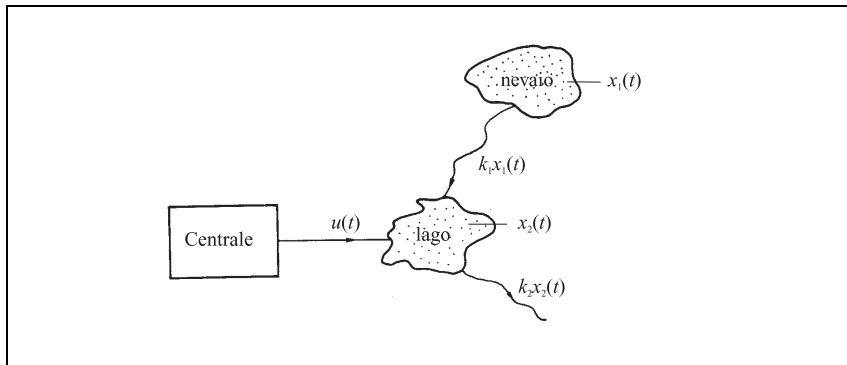
Ovviamente, se il sistema è completamente raggiungibile e osservabile (cioè se esiste solo la parte (b)) il modello ARMA è di trasferimento e risulta dato da

$$\Delta(p)y(t) = N(p)u(t) \tag{31}$$

dove i polinomi  $\Delta$  e  $N$  sono calcolabili con il metodo di Souriau (vedi *Paragrafo 3*). Negli altri casi è invece necessario scomporre il sistema in parti e applicare poi il metodo di Souriau separatamente alla parte (b) (per determinare  $\Delta_b$  e  $N_b$ ) e alla parte (d) (per determinare  $\Delta_d$ ). In casi particolari (come quello mostrato nell'esempio che segue) la scomposizione in parti è relativamente semplice, per cui il modello ARMA può essere facilmente determinato.

**Esempio 11**

Si consideri il sistema idrico rappresentato in *Fig. 22* costituito da un lago con due immissari, uno di portata  $u(t)$  (scarico di una centrale) e l'altro di portata  $k_1x_1(t)$  (scioglimento di un nevaio di volume  $x_1(t)$ ).



**Figura 22** Un semplice sistema idrico

Se la portata dell'emissario è supposta proporzionale secondo un coefficiente  $k_2$ , al volume d'acqua  $x_2(t)$  contenuto nel lago, imponendo la conservazione della massa, si ottiene

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -k_1x_1 \\ \dot{x}_2 &= k_1x_1 - k_2x_2 + u \end{aligned}$$

per cui, se si considera come variabile di uscita  $y(t)$  la portata dell'emissario del lago, il sistema risulta descritto dalla terna

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -k_1 & 0 \\ k_1 & -k_2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{c}^T = \begin{bmatrix} 0 & k_2 \end{bmatrix}$$

È immediato verificare che tale sistema è completamente osservabile ma non completamente raggiungibile (non si può influenzare  $x_1$ ). Essendo del secondo ordine, esso è, pertanto, costituito dalla parte (b) (lago) e dalla parte (d) (nevaio) come nello schema di *Fig. 19*. Poiché gli autovalori di  $\mathbf{A}$  sono  $-k_1$  (nevaio) e  $-k_2$  (lago) si ha

$$\Delta_b(s) = (s + k_2) \quad N_b(s) = k_2 \quad \Delta_d(s) = (s + k_1)$$

per cui dalla (27) segue che le portate  $u(t)$  e  $y(t)$  sono tra loro legate dall'equazione differenziale del secondo ordine

$$\ddot{y}(t) + (k_1 + k_2)\dot{y}(t) + k_1k_2y(t) = k_2\dot{u}(t) + k_1k_2u(t)$$

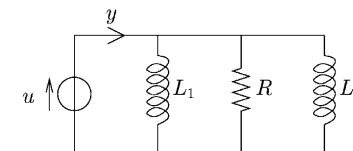
Nel caso, invece, in cui il nevaio non esista o sia esaurito, il modello si semplifica diventando (vedi equazione (26))

$$\dot{y}(t) + k_2y(t) = k_2u(t)$$



**Problema 42 (A, II)**

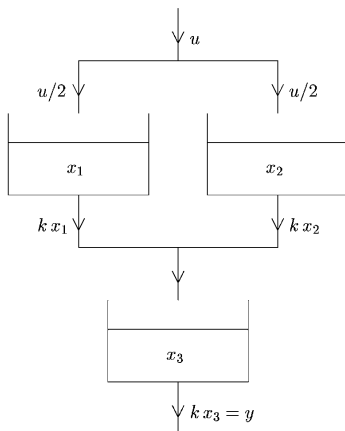
Si consideri la rete elettrica alimentata in tensione ( $u$ ) mostrata in figura



- ricavare  $(\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{c}^T, d)$ ;
- dire se il sistema è proprio o improprio;
- ricavare la funzione di trasferimento  $G = N/D$ ;
- dire se il modello ARMA di trasferimento  $dy=nu$  descrive tutte le coppie ingresso – uscita o solo quelle corrispondenti a stato iniziale nullo.

### Problema 43 (A, II)

Si determini il modello ARMA di trasferimento del sistema idraulico rappresentato in figura dove  $u(t)$ ,  $y(t)$ ,  $kx_i(t)$  sono portate volumetriche,  $x_i(t)$  sono volumi e i tre serbatoi sono uguali



### 24. Poli e zeri della funzione di trasferimento

Abbiamo già detto più volte che la funzione di trasferimento  $G(p)$  di un sistema lineare è, per definizione, il rapporto dei polinomi  $N(p)$  e  $D(p)$  che identificano il modello ARMA del sistema

$$D(p)y(t) = N(p)u(t)$$

Le (27) e (28) permettono di concludere che la funzione di trasferimento  $G(p)$  è data da

$$G(p) = \frac{N_b(p)}{\Delta_b(p)}$$

dove  $N_b(p)$  e  $\Delta_b(p)$  sono i polinomi che individuano il modello ARMA della parte raggiungibile e osservabile. Gli zeri dei polinomi  $N_b(p)$  e  $\Delta_b(p)$  si chiamano, rispettivamente, *zeri* e *poli* della funzione di trasferimento (o del sistema) e sono indicati con  $z_i$  e  $p_i$ . La funzione di trasferimento di un sistema proprio con parte raggiungibile e osservabile di dimensione  $n$  (per non appesantire la notazione scriviamo  $n$  anziché  $n_b$ ) può allora essere scritta nella forma

$$G(p) = \frac{\beta_r p^{n-r} + \beta_{r+1} p^{n-r-1} + \dots + \beta_n}{p^n + \alpha_1 p^{n-1} + \dots + \alpha_n}$$

dove  $r \geq 1$  è il cosiddetto *grado relativo* (o eccesso di poli), oppure nella forma

$$G(p) = \rho \frac{(p - z_1)(p - z_2) \dots (p - z_{n-r})}{(p - p_1)(p - p_2) \dots (p - p_n)}$$

dove  $\rho$  si chiama *costante di trasferimento*. Poli e zeri hanno grande importanza in tutta una serie di problemi relativi alla teoria dei sistemi e del controllo. In particolare, vedremo che è di grande interesse sapere se in un sistema a tempo continuo [discreto] poli e zeri hanno parte reale negativa [modulo minore di 1]. Come si dice in gergo, interessa cioè sapere se poli e zeri sono "stabili".

### 25. Poli e stabilità esterna

Studiamo in questo paragrafo la proprietà di *esterna stabilità* (nota anche come stabilità BIBO dall'inglese *Bounded Input Bounded Output*) di cui diamo subito la definizione formale.

#### Definizione 3 (stabilità esterna)

Un sistema lineare è esternamente stabile se e solo se la sua uscita forzata è limitata per ogni ingresso limitato.

Facendo riferimento allo schema di Fig. 20, ci si rende immediatamente conto che la stabilità esterna è una proprietà della sola parte (b) del sistema perché il movimento forzato è caratterizzato da  $\mathbf{z}_c(t) \equiv \mathbf{0}$  e  $\mathbf{z}_d(t) \equiv \mathbf{0}$  e la parte (a) non dà alcun contributo all'uscita. Non sorprende, quindi, che la stabilità esterna di un sistema coincida con l'asintotica stabilità della sua parte raggiungibile e osservabile. Ricordando che i poli del sistema coincidono con gli autovalori della sua parte raggiungibile e osservabile possiamo formulare il seguente teorema.

**Teorema 15 (condizione di stabilità esterna)**

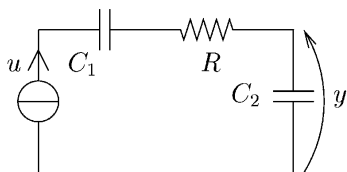
Un sistema è esternamente stabile se e solo se la sua parte raggiungibile e osservabile è asintoticamente stabile, cioè se e solo se i suoi poli sono stabili ( $\text{Re}(p_i) < 0$  nei sistemi a tempo continuo e  $|p_i| < 1$  nei sistemi a tempo discreto).

Questo risultato è dovuto al fatto che solo la parte (b) è responsabile delle relazioni intercorrenti tra ingresso e uscita qualora lo stato iniziale sia nullo. Nel caso, invece, lo stato iniziale non sia nullo, l'uscita risente anche del contributo della parte (d), contributo che è però, per definizione, limitato se tale parte è stabile (semplicemente o asintoticamente). Si può così concludere che l'uscita di un sistema è limitata per qualsiasi stato iniziale e qualsiasi ingresso limitato se e solo se la sua parte raggiungibile e osservabile (b) è asintoticamente stabile e la sua parte non raggiungibile e osservabile (d) è stabile.

Nel caso (frequentissimo) dei sistemi completamente raggiungibili e osservabili, i poli coincidono con gli autovalori e stabilità esterna e interna sono equivalenti. Sui tempi lunghi, l'uscita di un sistema completamente raggiungibile e osservabile con poli stabili si può quindi calcolare a partire dall'ingresso anche senza conoscere lo stato iniziale: per questo è sufficiente, ad esempio, simulare il comportamento del sistema fissando arbitrariamente le condizioni iniziali.

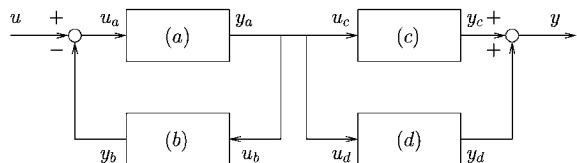
**Problema 44 (A, II)**

Si dica se la rete elettrica descritta in figura è esternamente stabile



**Problema 45 (N, II)**

Si dica se il sistema rappresentato in figura

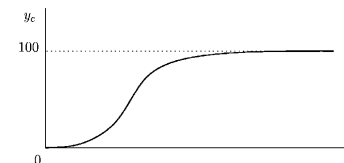


è esternamente stabile, tenendo conto che i quattro sottosistemi (a), (b), (c), (d) sono descritti da:

(a)  $G_a(s) = \frac{\mu_a}{(1+s)}$   $\mu_a > 0$

(b)  $G_b(s) = \mu_b \frac{1+0,1s}{1+10s}$   $\mu_b > 0$

(c) risposta allo scalino unitario del tipo mostrato in figura

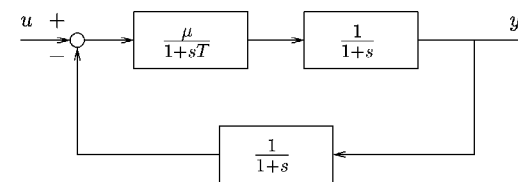


(d) 
$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} u_d(t)$$

$$y_d = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

**Problema 46 (N, II)**

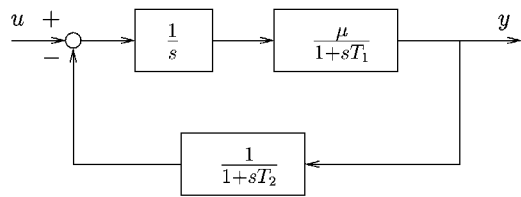
Si consideri il sistema rappresentato in figura in cui  $\mu$  e  $T$  sono due parametri positivi



Si dica per quali valori di  $\mu$  e  $T$  il sistema è esternamente stabile.

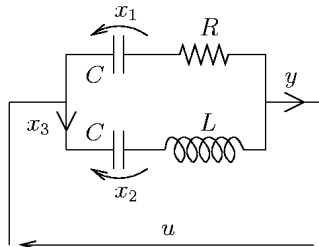
**Problema 47 (N, II)**

Si dica per quali valori positivi di  $\mu$  il sistema di figura è esternamente stabile



**Problema 48 (N, II)**

Si consideri la seguente rete elettrica con  $R, L$  e  $C$  positivi



e si dica se, supposti i condensatori e l'induttore inizialmente scarichi, la corrente  $y(t)$  si mantiene limitata per ogni tensione d'ingresso  $u(t)$  limitata.

**26. Zeri, ingressi nascosti e sistemi a sfasamento minimo**

Per comprendere il ruolo degli zeri nella dinamica di un sistema lineare è necessario far riferimento alla nozione di ingresso nascosto. Per semplicità, esponiamo tale nozione limitatamente al caso dei sistemi completamente raggiungibili e osservabili. In tali sistemi l'ingresso  $u$  e l'uscita  $y$  per condizioni iniziali qualsiasi soddisfano una relazione ARMA del tipo

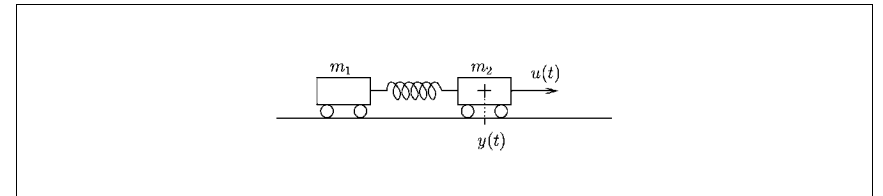
$$D(p)y(t) = N(p)u(t)$$

dove il grado del polinomio  $D(p)$  è uguale al numero di poli ( $n$ ) e il grado del polinomio  $N(p)$  è uguale al numero di zeri ( $n - r$ ) ( $N(p) = cost$  se non ci sono zeri). Per condizioni iniziali opportune, l'uscita può quindi essere identicamente nulla anche se l'ingresso non lo è. Perché ciò accada è necessario e sufficiente che il sistema abbia almeno uno zero, perché in tali condizioni la relazione

$$N(p)u(t) = 0 \tag{32}$$

ammette soluzioni non nulle. Poiché  $N(p) = (p - z_1)(p - z_2) \dots (p - z_{n-r})$  dove  $z_i$  sono gli zeri del sistema, tali soluzioni, chiamate *ingressi nascosti*, sono combinazioni lineari di esponenziali reali o complesse (eventualmente moltiplicate per polinomi in  $t$ ). Pertanto, non esistono ingressi nascosti se il sistema non ha zeri. Inoltre, qualora esistano, gli ingressi nascosti tendono a zero se e solo se gli zeri del sistema sono stabili ( $\text{Re}(z_i) < 0$  [ $|z_i| < 1$ ] per sistemi a tempo continuo [discreto]). Sistemi senza zeri o con zeri stabili si chiamano sistemi a *sfasamento minimo*.

Quanto detto può essere utilmente tenuto presente per individuare gli zeri di un sistema su base puramente intuitiva. Per esempio, il sistema meccanico di Fig. 23 ammette, in assenza di attrito, ingressi nascosti di tipo sinusoidale di pulsazione  $\omega$  perché il secondo carrello rimane fermo (cioè  $y(t) \equiv 0$ ) se gli si applica una forza esterna  $u(t)$  che bilanci esattamente la forza elastica dovuta all'oscillazione di periodo  $2\pi / \omega$  del primo carrello.

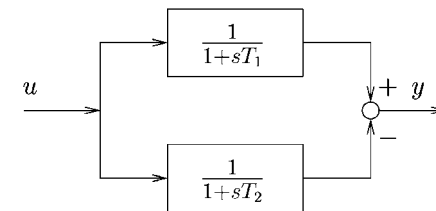


**Figura 23** Sistema meccanico con ingressi nascosti sinusoidali

Ciò significa che il sistema di Fig. 23 ha due zeri immaginari puri  $z_{1,2} = \pm i\omega$  perché le sinusoidi sono soluzioni dell'equazione differenziale (30) con  $N(s) = s^2 + \omega^2$ .

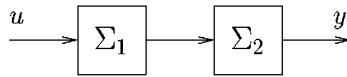
**Problema 49 (N, II)**

Si dica se il sistema rappresentato in figura è a sfasamento minimo e in caso negativo se ne determinino gli ingressi nascosti



**Problema 50** (*T, II*)

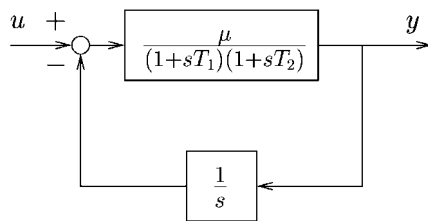
Si dica perché il sistema di figura



è completamente raggiungibile e osservabile nell'ipotesi che entrambi i sottosistemi  $\Sigma_i$  siano completamente raggiungibili e osservabili e non abbiano ingressi nascosti.

**Problema 51** (*N, II*)

Si dica se il sistema di figura è a sfasamento minimo e in caso negativo se ne determinino gli ingressi nascosti

**27. Ricostruzione degli ingressi**

Il problema della *ricostruzione degli ingressi* consiste nel determinare una stima  $\hat{u}(\cdot)$  dell'ingresso  $u(\cdot)$  applicato ad un sistema in un intervallo di tempo  $[0, T]$  a partire dal rilevamento dell'uscita  $y(\cdot)$  nello stesso intervallo di tempo. Tale problema è di interesse molto generale. Esso nasce spontaneamente ogniqualvolta si misuri una grandezza  $u(t)$  con uno strumento che, avendo una sua dinamica, fornisce come misura di  $u(t)$  una grandezza  $y(t) \neq u(t)$ . In tal caso è lecito chiedersi se sia possibile manipolare la misura ( $y$ ) in modo da ottenere una buona stima della grandezza da misurare ( $u$ ). Ma il problema si pone in numerosi altri casi, quali, ad esempio, la ricostruzione delle precipitazioni su un bacino dai dati di livello di un lago, l'identificazione degli scarichi di una ciminiera da misure di concentrazione a terra, la stima della forza esercitata dal vento su una struttura da registrazioni della posizione della stessa e altri ancora che il lettore può facilmente immaginare.

Come già fatto nell'affrontare un altro problema "inverso" (quello della ricostruzione dello stato), supporremo che i dati disponibili (modello del sistema e misure dell'uscita) non siano affetti da rumore o incertezza. Inoltre, supporremo che l'ingresso ricostruito  $\hat{u}(\cdot)$  sia *ammissibile*, cioè capace di generare l'uscita  $y(\cdot)$  per almeno un

opportuno stato iniziale. Ciò significa che sia  $u$  che  $\hat{u}$  soddisfano la relazione ARMA, cioè

$$\begin{aligned} N(p)\hat{u}(t) &= D(p)y(t) \\ N(p)u(t) &= D(p)y(t) \end{aligned} \quad (33)$$

Per differenza si ottiene allora

$$N(p)(\hat{u}(t) - u(t)) = 0$$

cioè la differenza tra l'ingresso ricostruito e l'ingresso vero è un ingresso nascosto.

Per quanto visto nel paragrafo precedente, si può allora concludere che qualora si risolva l'equazione (33) rispetto a  $\hat{u}(t)$  si otterrà  $\hat{u}(t) = u(t)$  se il sistema non ha zeri ( $N(p) = cost$ ), mentre nel caso opposto l'ingresso ricostruito  $\hat{u}(t)$  tenderà asintoticamente verso quello vero  $u(t)$  se e solo se il sistema è a sfasamento minimo.

È opportuno notare che, in generale, la (33) non può essere risolta in tempo reale. Se, ad esempio, il sistema è a tempo discreto, la (33) è del tipo

$$\beta_r \hat{u}(t-r) + \beta_{r+1} \hat{u}(t-r-1) + \dots + \beta_n \hat{u}(t-n) = y(t) + \alpha_1 y(t-1) + \dots + \alpha_n y(t-n)$$

con  $\beta_r \neq 0$ . Tale equazione deve essere risolta ricorsivamente rispetto a  $\hat{u}(t-r)$  e tale operazione richiede la conoscenza di  $y(t-r+1), \dots, y(t)$ . L'ingresso può quindi essere ricostruito solo con un ritardo di  $r$  istanti di tempo. Analogamente, nei sistemi a tempo continuo è l'integrale  $r$ -esimo dell'ingresso che può essere ricostruito in tempo reale.

Quanto visto negli ultimi tre paragrafi si può riassumere notando che poli e zeri hanno ruoli in un certo senso duali. Infatti, sui tempi lunghi, l'uscita di un sistema completamente raggiungibile e osservabile si può calcolare, a partire dal suo ingresso, anche senza conoscere lo stato iniziale purché i poli del sistema siano stabili (esterna stabilità). Dualmente, sui tempi lunghi, l'ingresso di un sistema completamente raggiungibile e osservabile si può calcolare, a partire dalla sua uscita, anche senza conoscere lo stato iniziale purché gli zeri del sistema siano stabili (sfasamento minimo). Detto in altre parole, la stabilità dei poli fa sì che diventi trascurabile al passare del tempo il movimento libero, mentre la stabilità degli zeri fa sì che diventino trascurabili gli ingressi nascosti.

**Problema 52** (*N, I*)

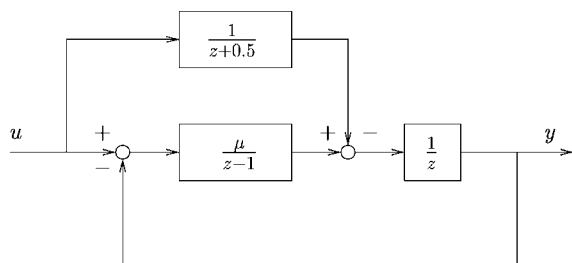
Si sa che la funzione di trasferimento di un sistema è

$$G(s) = \frac{s^2 - 1}{(1 + 10s)(1 + 100s)^2}$$

Si dica se è possibile ricostruire asintoticamente l'ingresso del sistema a partire da una registrazione dell'uscita.

**Problema 53 (N, II)**

Si consideri il sistema a tempo discreto rappresentato in figura, in cui  $\mu$  è un parametro positivo. Si dica per quali valori di  $\mu$  è possibile "ricostruire" (istantaneamente o asintoticamente) gli ingressi  $u(t)$  dalle uscite  $y(t)$ .



**28. Poli e zeri di sistemi in cascata, parallelo e retroazione**

Abbiamo visto nel quarto paragrafo che la funzione di trasferimento di due sistemi collegati in cascata, parallelo e retroazione è data da

$$G(p) = G_1(p)G_2(p) \quad \text{cascata}$$

$$G(p) = G_1(p) + G_2(p) \quad \text{parallelo}$$

$$G(p) = \frac{G_1(p)}{1 + G_1(p)G_2(p)} \quad \text{retroazione (negativa)}$$

dove  $G_1(p)$  e  $G_2(p)$  sono le funzioni di trasferimento dei due sottosistemi. Trascurando i casi critici in cui avvengono delle semplificazioni che portano ad una funzione di trasferimento  $G(p)$  con grado del polinomio a denominatore minore della somma dei gradi dei polinomi a denominatore delle due funzioni di trasferimento  $G_1(p)$  e  $G_2(p)$ , si può immediatamente concludere quanto segue.

**Cascata.** I poli e gli zeri di  $G(p)$  sono la riunione di quelli di  $G_1(p)$  e  $G_2(p)$

**Parallelo.** I poli di  $G(p)$  sono la riunione di quelli di  $G_1(p)$  e  $G_2(p)$

**Retroazione.** Gli zeri di  $G(p)$  sono la riunione degli zeri di  $G_1(p)$  e dei poli di  $G_2(p)$

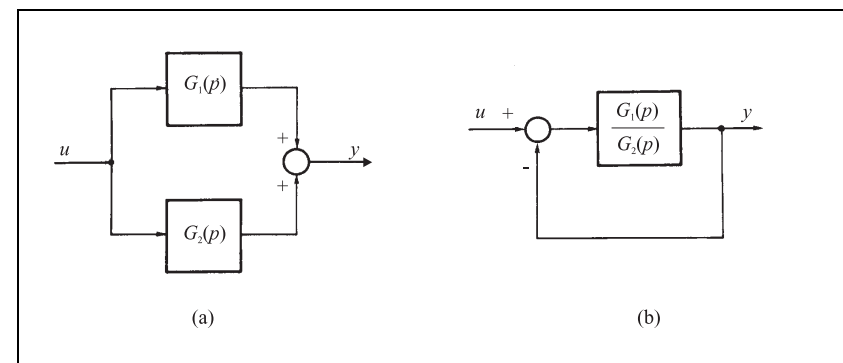
Il calcolo di poli e zeri dell'aggregato è, quindi, immediato, tranne per gli zeri dei sistemi in parallelo e per i poli dei sistemi in retroazione. Questi due casi possono, tuttavia, essere ritenuti equivalenti, pur di notare che gli zeri della funzione di trasferimento

$$G(p) = G_1(p) + G_2(p)$$

del sistema di Fig. 24a coincidono con i poli della funzione di trasferimento

$$G(p) = \frac{\frac{G_1(p)}{G_2(p)}}{1 + \frac{G_1(p)}{G_2(p)}} = \frac{G_1(p)}{G_1(p) + G_2(p)}$$

del sistema di Fig. 24b.



**Figura 24** Gli zeri del sistema (a) coincidono con i poli del sistema (b)

Si può così affermare che l'unico vero problema di soluzione non immediata è quello della determinazione dei poli di un sistema retroazionato. È questo il problema centrale della teoria classica del controllo, essenzialmente mirata alla determinazione di sistemi retroazionati con opportune proprietà dinamiche tra cui, fondamentale, la stabilità esterna. Nelle applicazioni è poi spesso importante poter determinare poli e zeri al variare di qualche parametro (tipicamente un parametro di progetto). Benché tutto ciò sia oggi facilmente fattibile per mezzo di software specialistico, riportiamo nel prossimo paragrafo il metodo del *luogo delle radici*, usatissimo in passato nella sintesi dei sistemi di controllo, e ancor oggi di grande valore per la discussione della stabilità dei sistemi retroazionati.



## 29. Il luogo delle radici

Facciamo d'ora in avanti riferimento al sistema retroazionato negativamente di Fig. 25 e scriviamo le due funzioni di trasferimento  $G(p)$  e  $H(p)$  nella forma

$$G(p) = \rho_G \frac{(p - z_1^G) \cdots (p - z_{n_G}^G)}{(p - p_1^G) \cdots (p - p_{n_G}^G)} \quad H(p) = \rho_H \frac{(p - z_1^H) \cdots (p - z_{n_H}^H)}{(p - p_1^H) \cdots (p - p_{n_H}^H)}$$

dove  $z_j^G$  [ $z_j^H$ ] e  $p_j^G$  [ $p_j^H$ ] sono gli zeri e i poli di  $G$  [ $H$ ] e  $\rho_G$  [ $\rho_H$ ] è la costante di trasferimento di  $G$  [ $H$ ].

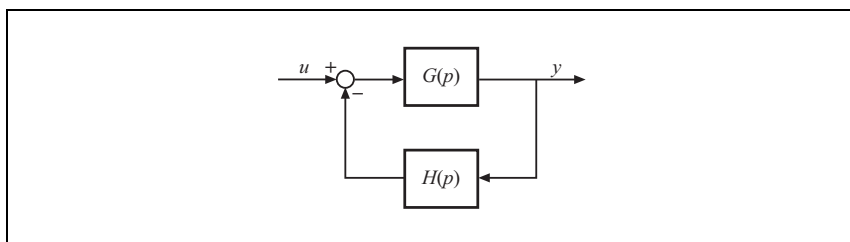


Figura 25 Sistema retroazionato negativamente.

La funzione di trasferimento  $G(p)H(p)$  si chiama *funzione di trasferimento d'anello* (o *funzione di trasferimento in anello aperto*) e i suoi poli e zeri si dicono anche poli e zeri *in anello aperto*. Ricordando che, in un sistema a tempo continuo, il guadagno  $\mu$  coincide con  $G(0)$ , si può scrivere

$$\mu = \rho \frac{\prod(-z_j)}{\prod(-p_j)}$$

Da questa formula segue che il guadagno  $\mu$  è nullo se uno zero è nullo e che  $\mu$  e  $\rho$  sono dello stesso segno se il numero di singolarità (poli e zeri) con parte reale positiva è pari. Quindi,  $\mu$  e  $\rho$  hanno lo stesso segno nel caso "normale" dei sistemi esternamente stabili e a sfasamento minimo, o nel caso in cui le "anomalie" (intese come non negatività di poli e zeri) siano in numero pari.

La funzione di trasferimento  $F(p)$  del sistema retroazionato (detto anche sistema *ad anello chiuso*) è

$$F(p) = \frac{G(p)}{1 + G(p)H(p)}$$

e i suoi poli (detti anche *poli ad anello chiuso*) sono le radici dell'equazione

$$1 + G(p)H(p) = 0$$

detta *equazione caratteristica*. Poiché in tale equazione interviene soltanto la funzione di trasferimento d'anello  $G(p)H(p)$ , si comprende come non interessi, in generale, distinguere i poli e gli zeri di  $G(p)$  da quelli di  $H(p)$ . Nel seguito, indicheremo quindi con  $z_j$  e  $p_j$  gli zeri e i poli in anello aperto. L'equazione caratteristica può quindi essere utilmente scritta nella forma

$$k \prod_{j=1}^{n-r} (p - z_j) = - \prod_{j=1}^n (p - p_j) \quad (34)$$

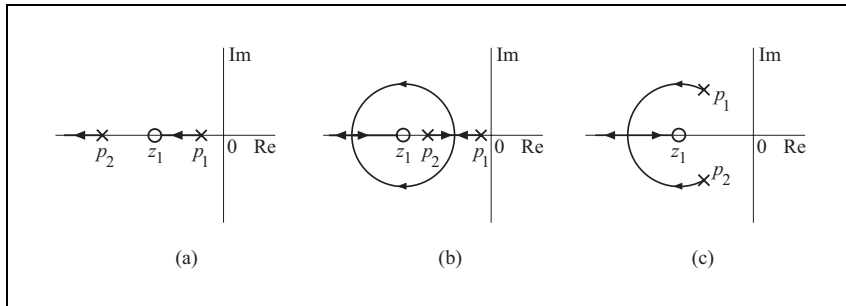
dove  $n = n_G + n_H$  è il numero totale di poli,  $r = r_G + r_H$  è l'eccesso di poli (grado relativo) di  $G(p)H(p)$  e  $k$  è il prodotto delle costanti di trasferimento, cioè

$$k = \rho_G \rho_H$$

Il luogo delle radici è, per definizione, il luogo percorso nel piano complesso dai poli del sistema ad anello chiuso al variare delle costanti di trasferimento dei due sottosistemi. Dal punto di vista formale il luogo delle radici è, pertanto, il luogo dei punti  $p$  del piano complesso che soddisfano l'equazione caratteristica (34) al variare di  $k$  da  $-\infty$  a  $+\infty$ . È peraltro utile distinguere tra luogo delle radici *diretto* ( $k$  positivo) e luogo delle radici *inverso* ( $k$  negativo), perché spesso interessa tracciare soltanto uno di questi due luoghi. Infatti, nelle applicazioni il parametro di progetto che si fa variare è di norma un guadagno che è vincolato, per motivi fisici, ad avere un ben determinato segno. Riferendoci ancora al caso dei sistemi a tempo continuo, il luogo di interesse è quello diretto nel caso "normale" di retroazione negativa, guadagni positivi e sistemi esternamente stabili e a sfasamento minimo, perché in tal caso  $k = \rho_G \rho_H > 0$ . Ma è comunque il luogo diretto che interessa tracciare se il numero di "anomalie" è pari, intendendo per anomalia non solo la positività di uno zero o di un polo, ma anche il fatto che la retroazione sia positiva (anziché negativa) o che il guadagno di un sistema sia negativo (anziché positivo).

Il luogo delle radici viene usualmente rappresentato in un piano (il piano complesso) in cui si riportano con delle croci ( $\times$ ) gli  $n = n_G + n_H$  poli ad anello aperto (i poli delle funzioni di trasferimento  $G(p)$  e  $H(p)$ ) e con dei cerchi ( $\circ$ ) gli  $n - r = (n_G + n_H) - (r_G + r_H)$  zeri ad anello aperto (zeri di  $G(p)$  e  $H(p)$ ). Il luogo delle radici è composto da  $n$  rami parametrizzati in  $k$ , ognuno dei quali mostra come si sposta nel piano complesso, al variare di  $k$ , uno degli  $n$  poli del sistema ad anello

chiuso. Per comodità, sui rami del luogo viene riportata una freccia che indica il verso secondo cui  $k$  cresce in modulo. La Fig. 26 riporta, a titolo di esempio, tre luoghi diretti corrispondenti a funzioni di trasferimento d'anello  $G(p)H(p)$  con due poli e uno zero.



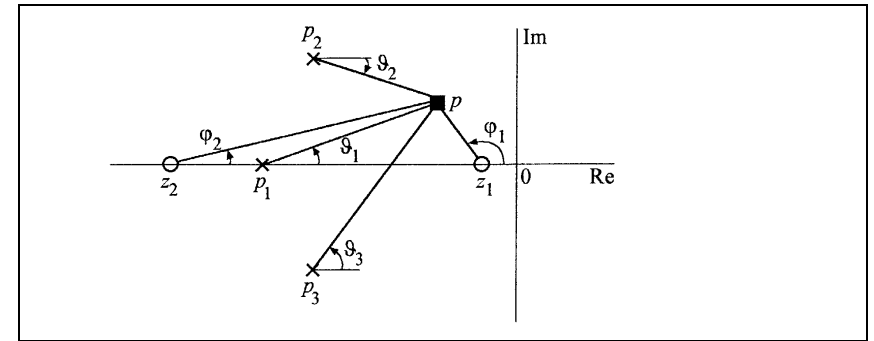
**Figura 26** Luogo delle radici diretto corrispondente a funzioni di trasferimento d'anello con due poli e uno zero: (a) e (b) poli reali, (c) poli complessi.

La figura mette in evidenza tre proprietà generali del luogo delle radici:

1. Il luogo delle radici è simmetrico rispetto all'asse reale.
2. Ogni polo ad anello aperto è punto di partenza di un ramo del luogo delle radici.
3. Ogni zero ad anello aperto è punto di arrivo di un ramo del luogo delle radici.

La prima proprietà è conseguenza diretta del fatto che l'insieme dei poli complessi di un sistema dinamico è formato da coppie di numeri complessi coniugati. La seconda e la terza sono invece conseguenza immediata della (34) per  $k \rightarrow 0$  e  $k \rightarrow \infty$ .

Mettiamo ora in evidenza la proprietà geometrica fondamentale del luogo delle radici. Per questo, notiamo innanzitutto che ogni termine  $(p - z_j)$  a primo membro della (34) è un numero complesso che può, quindi, essere scritto nella forma esponenziale  $(\rho'_j e^{i\varphi_j})$ . Analogamente, ogni termine  $(p - p_j)$  a secondo membro della (34) può essere scritto nella forma  $(\rho''_j e^{i\vartheta_j})$ . La Fig. 27 riporta, a titolo di esempio, gli angoli  $\varphi_j$  e  $\vartheta_j$  (positivi in senso orario) corrispondenti a un particolare punto  $p$  per un sistema con tre poli  $(p_1, p_2, p_3)$  e due zeri  $(z_1, z_2)$  ad anello aperto.



**Figura 27** Gli angoli  $\varphi_j$  e  $\vartheta_j$  corrispondenti a un particolare punto  $p$ .

Pertanto, la (34) può essere scritta nella forma

$$k\rho' e^{i\varphi} = -\rho'' e^{i\vartheta}$$

con

$$\varphi = \sum_j \varphi_j \quad \vartheta = \sum_j \vartheta_j$$

Tenendo conto del segno di  $k$  e del fatto che  $e^{i\pi} = -1$ , si può quindi enunciare la seguente proprietà:

4. Un punto  $p$  del piano complesso appartiene al luogo delle radici diretto se

$$\sum_j \varphi_j = \sum_j \vartheta_j + \pi$$

e al luogo delle radici inverso se

$$\sum_j \varphi_j = \sum_j \vartheta_j$$

Naturalmente queste relazioni devono essere intese modulo  $2\pi$ , poiché  $e^{ih2\pi} = 1$  e  $e^{i(\pi+2h\pi)} = -1$  per qualsiasi  $h$  intero.

In ogni punto dell'asse reale una delle due relazioni citate nella proprietà 4 è verificata, per cui tale asse è sempre parte del luogo delle radici. Tenendo conto che gli angoli  $\varphi_j$  e  $\vartheta_j$  sono nulli se  $p$  è a destra di  $z_j$  e  $p_j$  e uguali a  $\pi$  se  $p$  è a sinistra di  $z_j$  e  $p_j$ , si può facilmente dedurre quali parti dell'asse reale appartengono al luogo diretto e quali al luogo inverso. Vale infatti la seguente regola.

5. I punti dell'asse reale che hanno sulla propria destra un numero dispari [pari] di singolarità (poli e zeri ad anello aperto) appartengono al luogo diretto [inverso].

La regola 4 può essere usata per determinare l'angolo  $\vartheta_1^*$  secondo cui un ramo del luogo si diparte da un polo complesso, per comodità indicato con  $p_1$ . Infatti, se  $k$  è estremamente piccolo (a rigore infinitesimo), per la proprietà 2 un punto  $p$  del luogo è estremamente vicino a  $p_1$  e forma con  $p_1$  un angolo  $\vartheta_1^*$  e con il coniugato  $p_2$  di  $p_1$  un angolo  $\pi/2$ . Indicati con  $\varphi_j^*$  e  $\vartheta_j^*$  gli angoli che il polo  $p_1$  forma con gli zeri e con gli altri poli, nel caso del luogo diretto si può pertanto scrivere

$$\sum_j \varphi_j^* = \vartheta_1^* + \frac{\pi}{2} + \sum_{j \neq 1,2} \vartheta_j^* + \pi$$

mentre nel caso di luogo inverso la relazione è

$$\sum_j \varphi_j^* = \vartheta_1^* + \frac{\pi}{2} + \sum_{j \neq 1,2} \vartheta_j^*$$

Risolte rispetto a  $\vartheta_1^*$  queste due relazioni forniscono la seguente regola.

6. Se  $p_1$  e  $p_2$  sono una coppia di poli complessi coniugati ad anello aperto, l'angolo  $\vartheta_1^*$  secondo cui il luogo delle radici si diparte da  $p_1$  è dato da

$$\vartheta_1^* = \sum_j \varphi_j^* - \sum_{j \neq 1,2} \vartheta_j^* \pm \frac{\pi}{2}$$

dove nella formula va preso il segno (+) se il luogo è quello diretto e il segno (-) se il luogo è quello inverso.

L'utilità delle ultime due regole si può comprendere constatando che esse permettono di tracciare in modo immediato e corretto i luoghi delle radici di Fig. 24. In particolare, la regola 6 permette di dedurre che il luogo delle radici di Fig. 24(c) è perpendicolare nel polo complesso  $p_1$  alla congiungente  $p_1$  e  $z_1$  (vedi Problema 54).

Poiché i rami del luogo delle radici sono  $n$  e  $(n-r)$  di essi terminano negli zeri ad anello aperto, ci si può chiedere con quale pendenza i rimanenti  $r$  rami tendano all'infinito (si ricordi che  $r$  è l'eccesso di poli). Per la simmetria del luogo (proprietà 1) se  $r=1$  il ramo che tende all'infinito non può che essere sull'asse reale. Se  $r=2$ , sempre a causa della simmetria, i due rami tenderanno all'infinito con angoli pari a  $\pm\psi_2$ . Se  $r=3$  un ramo sarà sull'asse reale e gli altri due, dovendo essere simmetrici, tenderanno all'infinito con angoli  $\pm\psi_3$ . E così via. Indicato allora con  $\psi_r$  l'angolo

secondo cui va all'infinito un ramo del luogo delle radici di un sistema con  $n$  poli e  $(n-r)$  zeri ad anello aperto, per la regola 4, applicata ad un punto del ramo in questione per  $k \rightarrow \infty$ , dovrà essere

$$\begin{aligned} (n-r)\psi_r &= n\psi_r + \pi && \text{luogo diretto} \\ (n-r)\psi_r &= n\psi_r && \text{luogo inverso} \end{aligned}$$

Poiché queste relazioni sono da intendersi modulo  $2\pi$ , esse possono anche essere scritte nella forma

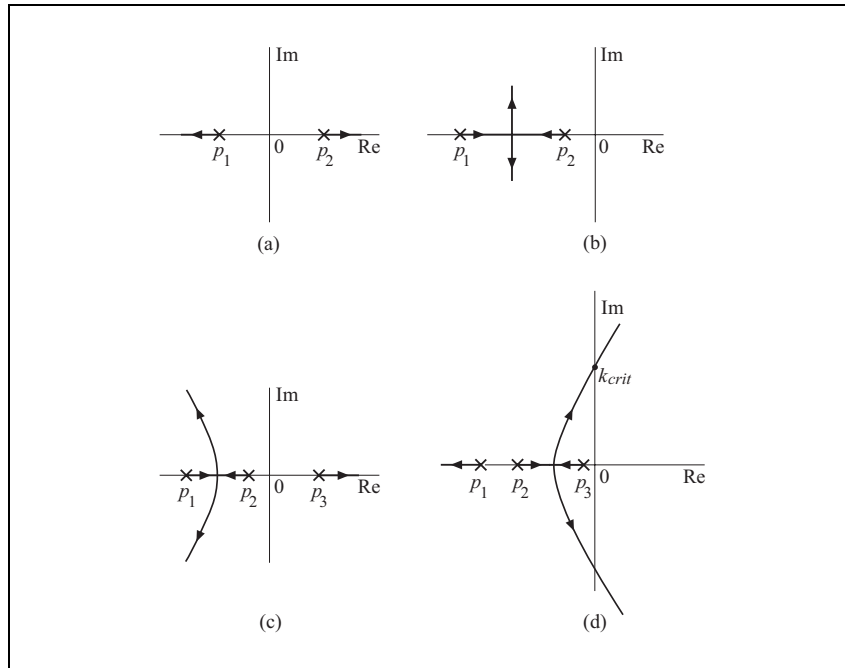
$$\begin{aligned} r\psi_r &= \pi + 2h\pi && \text{luogo diretto} \\ r\psi_r &= 2h\pi && \text{luogo inverso} \end{aligned}$$

dove  $h$  è un intero a cui si possono assegnare i valori  $0, 1, \dots, r-1$ . Si ricava così la seguente regola.

7. Il luogo delle radici di un sistema con  $n$  poli e  $(n-r)$  zeri ad anello aperto ha  $r$  rami che tendono all'infinito secondo gli angoli

$$\begin{aligned} \psi_0 &= \frac{\pi}{r} & \psi_1 &= \frac{\pi}{r} + \frac{2\pi}{r} & \psi_2 &= \frac{\pi}{r} + \frac{4\pi}{r} & \dots & \psi_{r-1} &= -\frac{\pi}{r} && \text{luogo diretto} \\ \psi_0 &= 0 & \psi_1 &= \frac{2\pi}{r} & \psi_2 &= \frac{4\pi}{r} & \dots & \psi_{r-1} &= -\frac{2\pi}{r} && \text{luogo inverso} \end{aligned}$$

Ciò significa che i rami che tendono all'infinito, oltre ad essere simmetrici rispetto all'asse reale, sono regolarmente disposti a "r-stella" formando tra loro angoli di  $2\pi/r$ . A titolo di esempio, in Fig. 28 sono riportati quattro luoghi delle radici (due inversi e due diretti) per sistemi con eccesso di poli pari a 2 o a 3.



**Figura 28** Quattro luoghi delle radici per sistemi con due o tre poli e nessuno zero ad anello aperto: (a) e (c) sono luoghi inversi; (b) e (d) sono luoghi diretti.

I due luoghi diretti di Fig. 28 illustrano in modo grafico due risultati che abbiamo già messo in evidenza studiando la stabilità. Infatti, il luogo delle radici di Fig. 28(b), che giace interamente nel semipiano sinistro, afferma che retroazionando negativamente due sistemi  $\Sigma_1$  e  $\Sigma_2$  del primo ordine asintoticamente stabili con guadagni  $\mu_1$  e  $\mu_2$  positivi si ottiene un sistema asintoticamente stabile per qualsiasi valore del guadagno d'anello  $\mu = \mu_1\mu_2$ . Il luogo delle radici di Fig. 28(d) afferma invece che, se i sistemi del primo ordine sono tre anziché due, il sistema retroazionato è instabile se il guadagno d'anello  $\mu = \mu_1\mu_2\mu_3$  è superiore a un valore critico  $\mu_{crit}$ .

Il valore di  $\mu_{crit}$  (o, meglio, il valore di  $k_{crit}$ , da cui si può facilmente risalire a  $\mu_{crit}$ ) è ricavabile dal luogo delle radici applicando la regola riportata qui di seguito (diretta conseguenza della (34)) nel punto  $p$  in cui uno dei rami del luogo delle radici taglia l'asse immaginario.

8. Se  $p$  è un punto del luogo delle radici corrispondente al valore  $k$  della costante di trasferimento e  $|p - p_j|$  e  $|p - z_j|$  sono le distanze di  $p$  dai poli e dagli zeri ad anello aperto, il valore di  $|k|$  è dato da

$$|k| = \frac{\prod_j |p - p_j|}{\prod_j |p - z_j|}$$

Riportiamo ora un'ultima regola, nota come "regola del baricentro", che è particolarmente utile per determinare la posizione degli asintoti dei rami verticali del luogo delle radici (vedi, ad esempio, la Fig. 28(b)).

9. Se l'eccesso di poli  $r$  è maggiore o uguale a 2, la somma degli  $n$  poli ad anello chiuso è indipendente da  $k$ .

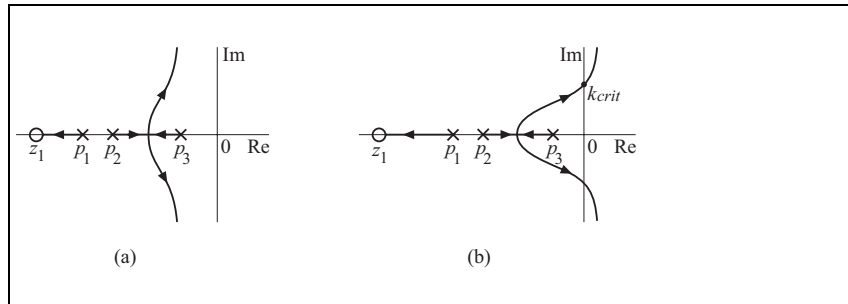
La dimostrazione di questa regola è immediata. Basta scrivere l'equazione caratteristica (34) nella forma  $p^n + \gamma_1 p^{n-1} + \dots + \gamma_n = 0$  e notare che  $\gamma_1$ , che è la somma delle radici di tale equazione (e quindi dei poli ad anello chiuso) cambiata di segno, non dipende da  $k$  se  $r \geq 2$ . Applicata al caso di Fig. 26(b), la regola 9 afferma che il punto in cui i due rami orizzontali del luogo si incontrano e da cui partono i due rami verticali è il punto equidistante dai due poli ad anello aperto (si ricordi che per  $k = 0$  i poli ad anello chiuso coincidono con quelli ad anello aperto).

### Esempio 12 (determinazione del guadagno critico)

Si supponga di avere a che fare con un sistema retroazionato negativamente (Fig. 25) con guadagno d'anello positivo e con tre poli reali e un solo zero ad anello aperto. Inoltre, si supponga che zeri e poli soddisfino la condizione

$$z_1 < p_1 < p_2 < p_3 < 0$$

e che sia di interesse sapere quali ulteriori condizioni devono essere soddisfatte da zeri e poli affinché il sistema retroazionato sia strutturalmente stabile, cioè esternamente stabile per tutti i valori di  $\mu$ . Il problema è ben posto, perché dalle regole 1, 2, 3, 5 e 7 si può immediatamente dedurre che il luogo delle radici diretto (che è quello che interessa tracciare, non essendoci in questo caso alcuna anomalia) è "qualitativamente" come mostrato in Fig. 29, così che il sistema può essere sia strutturalmente stabile (Fig. 29(a)) che condizionatamente stabile, cioè stabile se  $\mu < \mu_{crit}$  (Fig. 29(b)).



**Figura 29** Due possibili luoghi delle radici diretti di un sistema con tre poli e uno zero ad anello aperto: (a) sistema strutturalmente stabile; (b) sistema condizionatamente stabile ( $\mu_{crit} = k_{crit}z_1 / (p_1 p_2 p_3)$ ).

Per determinare la condizione che zeri e poli devono soddisfare per essere nel caso di Fig. 29(a), si può applicare la regola del baricentro per valori di  $k$  molto elevati (a rigore per  $k \rightarrow \infty$ ). In tali condizioni, un polo ad anello chiuso coincide praticamente con  $z_1$  e gli altri due sono complessi coniugati (con parte immaginaria molto grande), per cui la loro somma è pari a  $2x$ , dove  $x$  è l'ascissa degli asintoti dei rami verticali del luogo. Per la regola del baricentro si ha

$$z_1 + 2x = p_1 + p_2 + p_3$$

per cui la stabilità strutturale ( $x < 0$ ) implica ed è implicata da

$$z_1 > p_1 + p_2 + p_3$$

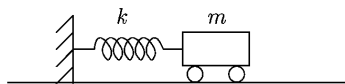


**Problema 54 (T, III)**

Dimostrare, usando la proprietà 4, che le parti non rettilinee dei luoghi delle radici riportati in Fig. 24(b) e (c) sono circonferenze.

**Problema 55 (A, II)**

Si studi il semplice sistema meccanico massa-molla rappresentato in figura



interpretandolo come un sistema non soggetto ad attrito (oscillatore puro) retroazionato negativamente con un derivatore che interpreta l'attrito di tipo viscoso. In

particolare, si dimostri che se il coefficiente d'attrito è sufficientemente basso il sistema è un fuoco stabile mentre se tale coefficiente è, al contrario, sufficientemente alto il sistema è un nodo stabile.

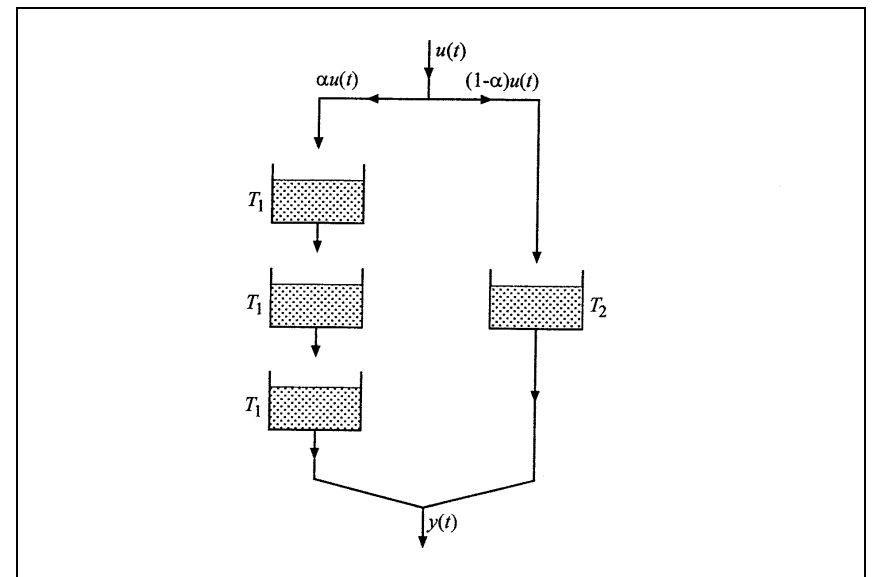
**Problema 56 (T, II)**

Si dimostri che retroazionando negativamente tre sistemi del primo ordine asintoticamente stabili con la stessa costante di tempo e con guadagni  $\mu_1, \mu_2$  e  $\mu_3$  si ottiene un sistema asintoticamente stabile se e solo se il guadagno d'anello  $\mu = \mu_1 \mu_2 \mu_3$  è inferiore a 8 (si noti che il luogo delle radici deve corrispondere a quello di Fig. 26(d) nel caso degenerare  $p_1 = p_2 = p_3$ ).

**Problema 57 (A, II)**

Si consideri il sistema idrico mostrato in figura, in cui i tre serbatoi collegati in cascata hanno la stessa costante di tempo  $T_1$  mentre il serbatoio sul ramo alimentato dalla portata  $(1-\alpha)u(t)$  ha costante di tempo  $T_2$ .

Si mostri, per mezzo del luogo delle radici, che il sistema può essere a sfasamento non minimo per valori opportuni di  $T_1, T_2$  e  $\alpha$  (si tenga presente la Fig. 24). Indi si verifichi il risultato calcolando la funzione di trasferimento  $G(s) = N(s) / D(s)$  del sistema e applicando il criterio di Hurwitz o di Routh al polinomio  $N(s)$ .



### 30. Risposte canoniche e loro importanza

In questo capitolo si precisa come un sistema lineare risponda all'applicazione di ingressi semplici ma allo stesso tempo significativi come l'*impulso*, lo *scalino*, la *rampa* e la *sinusoide*. Questi ingressi vengono a volte detti *canonici* e l'uscita corrispondente è chiamata *risposta canonica*.

Lo studio delle risposte canoniche ha un'importanza triplice. In primo luogo, gli ingressi canonici sono frequentemente applicati a molti sistemi in condizioni di funzionamento del tutto normali (ad esempio, a una rete elettrica è spesso applicata una tensione sinusoidale). È quindi frequente dover calcolare la risposta canonica di un assegnato sistema. In secondo luogo, gli ingressi canonici, proprio per la loro semplicità, si prestano a essere utilizzati in laboratorio o sul campo come ingressi campione di un sistema di cui non si conosca una descrizione matematica, allo scopo di sfruttare le informazioni fornite dalla corrispondente risposta canonica per *identificare*, ad esempio, il modello ARMA di trasferimento. Infine, alcune risposte canoniche, in particolare quelle all'impulso e alla sinusoide, possono essere usate, come specificato nel seguito, per determinare le risposte del sistema a ingressi qualsiasi (o comunque non canonici).

Per semplicità, ci occuperemo soltanto di sistemi completamente raggiungibili e osservabili, in cui, quindi, la funzione di trasferimento descrive completamente il comportamento dinamico del sistema.

### 31. Risposta all'impulso

L'impulso è un ingresso di forte intensità applicato a un sistema per un intervallo di tempo molto breve. Si pensi, ad esempio, all'assunzione di un farmaco ipotensivo per mezzo di una pillola, alla sollecitazione meccanica impressa alle ali di un aereo da un vuoto d'aria, o a un consistente versamento sul proprio conto corrente bancario. Naturalmente, affinché si possa parlare di impulso è necessario che l'intervallo di tempo durante il quale l'ingresso è diverso da zero sia breve (anzi, molto breve) rispetto alla costante di tempo dominante del sistema. Per esempio, nel caso dell'aereo l'attraversamento del vuoto d'aria dura normalmente pochi centesimi di secondo mentre la costante di tempo dominante è dell'ordine di uno o più secondi.

Nel caso a tempo continuo, la funzione *impulso*, che indicheremo con  $\text{imp}(t)$ , è definita nel modo seguente. Si consideri dapprima la funzione (Fig. 30), che possiamo definire *impulso di durata finita*:

$$p_\delta(t) = \begin{cases} 1/\delta & , 0 \leq t \leq \delta \\ 0 & , \text{altrove} \end{cases}$$

dove  $\delta > 0$ , e si noti che  $p_\delta(t)$  sottende un'area unitaria. L'impulso  $\text{imp}(t)$  è definito allora come il limite della funzione  $p_\delta(t)$  quando  $\delta$  tende a zero (Fig. 31(a)). Pertanto, l'impulso sottende un'area unitaria ed è non nullo solo in  $t = 0$ , dove ha ampiezza infinita. Vale la pena notare che, per come è definito,  $\text{imp}(t)$  è un oggetto matematicamente un po' delicato, la cui trattazione rigorosa renderebbe necessarie conoscenze che vanno al di là di quelle previste in questo testo. Tuttavia, le poche proprietà sopra evidenziate saranno sufficienti per i nostri scopi.

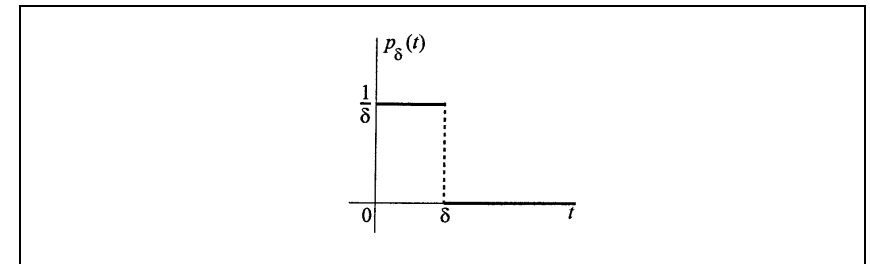


Figura 30 Impulso di durata finita.

Nel caso a tempo discreto, l'impulso  $\text{imp}(t)$  è invece definito come (Fig. 31(b))

$$\text{imp}(t) = \begin{cases} 1 & , t = 0 \\ 0 & , t > 0 \end{cases}$$

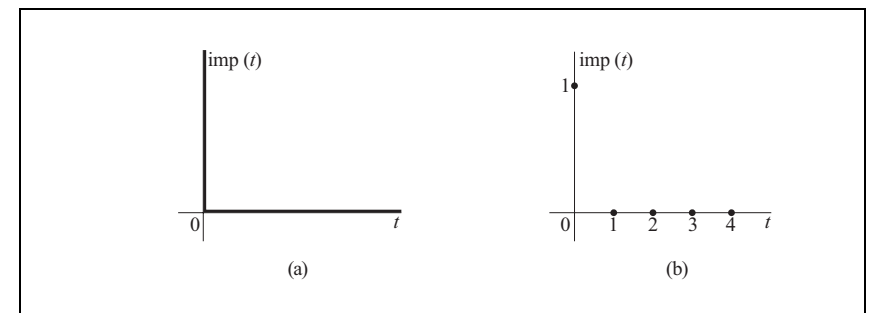


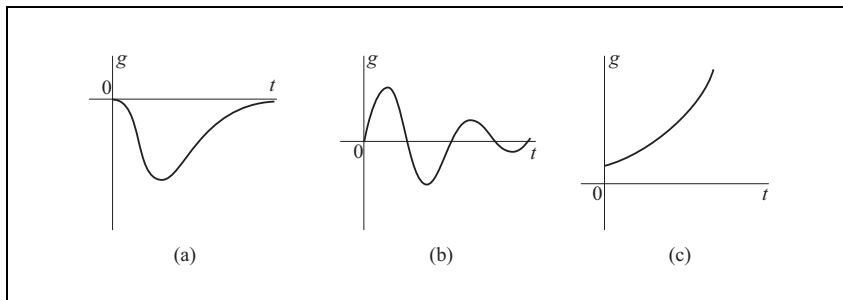
Figura 31 La funzione  $\text{imp}(t)$  nel caso a tempo continuo (a) e a tempo discreto (b).

La definizione seguente precisa il concetto di *risposta all'impulso* di un sistema lineare.

**Definizione 4** (risposta all'impulso)

La risposta all'impulso di un sistema lineare, indicata nel seguito con  $g(\cdot)$ , è l'uscita forzata del sistema corrispondente a ingresso impulsivo, cioè l'uscita del sistema inizialmente a riposo ( $\mathbf{x}(0) = \mathbf{0}$ ) cui sia stato applicato l'ingresso  $u(t) = \text{imp}(t)$ .

In Fig. 32 sono riportate le risposte all'impulso dei tre esempi prima citati. La prima è la variazione di pressione arteriosa caratterizzante il sistema cardiocircolatorio, la seconda è la quota della punta dell'ala dell'aereo rispetto alla posizione di riposo e la terza è l'ammontare del deposito bancario. La risposta  $g(t)$  tende a zero in alcune ore nel primo caso, in alcuni secondi nel secondo caso, mentre nell'ultimo la risposta all'impulso è indefinitamente crescente a causa dell'interesse bancario.



**Figura 32** Tre risposte all'impulso: (a) variazione della pressione arteriosa; (b) freccia dell'ala di un aereo; (c) deposito bancario.

La risposta all'impulso può essere facilmente legata alla quaterna  $(\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{c}^T, d)$ . Infatti, nel caso a tempo continuo ponendo  $\mathbf{x}(0) = \mathbf{0}$  nella formula di Lagrange si ottiene

$$g(t) = \mathbf{c}^T \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\xi)} \mathbf{b} \text{imp}(\xi) d\xi + d \text{imp}(t)$$

Ma  $\text{imp}(\xi)$  è nullo per ogni  $\xi \neq 0$ , per cui

$$g(t) = \mathbf{c}^T \int_0^+ e^{\mathbf{A}(t-\xi)} \mathbf{b} \text{imp}(\xi) d\xi + d \text{imp}(t) = \mathbf{c}^T e^{\mathbf{A}t} \mathbf{b} \int_0^+ \text{imp}(\xi) d\xi + d \text{imp}(t) = \mathbf{c}^T e^{\mathbf{A}t} \mathbf{b} + d \text{imp}(t)$$

Analogamente, nel caso a tempo discreto, la risposta all'impulso si ottiene applicando ripetutamente l'equazione di stato con  $\mathbf{x}(0) = \mathbf{0}$  e  $u(t) = \text{imp}(t)$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(0) &= \mathbf{0} & g(0) &= \mathbf{c}^T \mathbf{x}(0) + d u(0) = d \\ \mathbf{x}(1) &= \mathbf{A} \mathbf{x}(0) + \mathbf{b} u(0) = \mathbf{b} & g(1) &= \mathbf{c}^T \mathbf{x}(1) + d u(1) = \mathbf{c}^T \mathbf{b} \\ \mathbf{x}(2) &= \mathbf{A} \mathbf{x}(1) + \mathbf{b} u(1) = \mathbf{A} \mathbf{b} & g(2) &= \mathbf{c}^T \mathbf{x}(2) + d u(2) = \mathbf{c}^T \mathbf{A} \mathbf{b} \\ &\vdots & &\vdots \end{aligned}$$

Tutto ciò si può riassumere con il seguente teorema.

**Teorema 16** (risposta all'impulso di sistemi a tempo continuo e discreto)

La risposta all'impulso  $g(\cdot)$  di un sistema lineare  $(\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{c}^T, d)$  è data da

$$\begin{aligned} g(t) &= \mathbf{c}^T e^{\mathbf{A}t} \mathbf{b} + d \text{imp}(t) && \text{tempo continuo} \\ g(t) &= \begin{cases} d & , t = 0 \\ \mathbf{c}^T \mathbf{A}^{t-1} \mathbf{b} & , t > 0 \end{cases} && \text{tempo discreto} \end{aligned}$$

È immediato constatare che, nel caso di sistema a tempo continuo proprio ( $d = 0$ ), la risposta all'impulso

$$g(t) = \mathbf{c}^T e^{\mathbf{A}t} \mathbf{b}$$

coincide con la risposta libera del sistema qualora lo stato iniziale valga  $\mathbf{x}(0) = \mathbf{b}$ . In altre parole, l'impulso trasferisce lo stato del sistema da  $\mathbf{0}$  a  $\mathbf{b}$  in un intervallo di tempo infinitesimo, cui segue l'evoluzione libera del sistema. Nel caso a tempo discreto, invece, l'impulso porta lo stato del sistema da  $\mathbf{0}$  a  $\mathbf{b}$  in una transizione, cioè all'istante  $t = 1$ . Nel caso di sistema improprio ( $d \neq 0$ ), a questa risposta si somma un impulso di "ampiezza"  $d$ .

Qualora il sistema sia sottoposto a un ingresso  $u(\cdot)$  qualsiasi, l'uscita forzata  $y_{for}(\cdot)$  (cioè l'uscita corrispondente a  $\mathbf{x}(0) = \mathbf{0}$ ) è data dalla formula di Lagrange

$$y_{for}(t) = \int_0^t \mathbf{c}^T e^{\mathbf{A}(t-\xi)} \mathbf{b} u(\xi) d\xi + d u(t)$$

per cui, dal Teorema 17, segue che

$$\begin{aligned} y_{for}(t) &= \int_0^t [\mathbf{c}^T e^{\mathbf{A}(t-\xi)} \mathbf{b} u(\xi) + d u(\xi)] d\xi + d u(t) \\ &= \int_0^t g(t-\xi) u(\xi) d\xi + d \int_0^t \text{imp}(t-\xi) u(\xi) d\xi + d u(t) \\ &= \int_0^t g(t-\xi) u(\xi) d\xi \end{aligned}$$

La relazione

$$y_{for}(t) = \int_0^t g(t-\xi)u(\xi)d\xi \quad (35)$$

è nota come *integrale di convoluzione* e mostra come la conoscenza della risposta all'impulso sia necessaria e sufficiente a determinare l'uscita forzata del sistema in corrispondenza di un qualsiasi ingresso. In altre parole, nella risposta all'impulso è contenuta tutta la descrizione del sistema per quanto riguarda la relazione tra ingresso e uscita con stato iniziale nullo. Questo fatto sarà ulteriormente dettagliato nel prossimo paragrafo.

### 32. Equivalenza tra risposta all'impulso e funzione di trasferimento

Dal momento che la risposta all'impulso  $g(\cdot)$  permette di determinare, attraverso l'operazione di convoluzione, l'uscita forzata  $y_{for}(\cdot)$  corrispondente a un qualsiasi ingresso  $u(\cdot)$ , essa deve essere equivalente alla funzione di trasferimento  $G(\cdot)$  del sistema.

In effetti, data la funzione di trasferimento  $G(\cdot)$ , è immediato ricavare la risposta all'impulso. Ad esempio, nel caso a tempo discreto si può scrivere

$$y(t) = -\alpha_1 y(t-1) + \dots - \alpha_n y(t-n) + \beta_0 u(t) + \beta_1 u(t-1) + \dots + \beta_n u(t-n)$$

dove  $n$  indica l'ordine del sistema, per cui, ponendo  $y(t-1) = y(t-2) = \dots = y(t-n) = 0$  (sistema inizialmente a riposo) e

$$u(t) = \text{imp}(t) = \begin{cases} 1, & t = 0 \\ 0, & t > 0 \end{cases}$$

si ricava

$$\begin{aligned} g(0) &= \beta_0 \\ g(1) &= -\alpha_1 \beta_0 + \beta_1 \\ g(2) &= -\alpha_1(-\alpha_1 \beta_0 + \beta_1) - \alpha_2 \beta_0 + \beta_2 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Viceversa, nota la risposta all'impulso che, per il *Teorema 16*, può essere scritta nella forma

$$g(t) = \begin{cases} d, & t = 0 \\ \mathbf{c}^T \mathbf{A}^{t-1} \mathbf{b}, & t > 0 \end{cases}$$

è possibile costruire la serie di potenze

$$\sum_{t=0}^{\infty} \frac{g(t)}{z^t} = d + \frac{\mathbf{c}^T \mathbf{b}}{z} + \frac{\mathbf{c}^T \mathbf{A} \mathbf{b}}{z^2} + \frac{\mathbf{c}^T \mathbf{A}^2 \mathbf{b}}{z^3} + \dots = d + \sum_{t=1}^{\infty} \frac{\mathbf{c}^T \mathbf{A}^{t-1} \mathbf{b}}{z^t}$$

In un opportuno insieme del piano complesso, tale serie converge a

$$d + \mathbf{c}^T (z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{b}$$

che, in base a quanto visto nel *Paragrafo 3* (equazione 12), è la funzione di trasferimento del sistema. Si può quindi affermare che

$$G(z) = \sum_{t=0}^{\infty} \frac{g(t)}{z^t}$$

L'equivalenza tra risposta all'impulso e funzione di trasferimento diventa estremamente chiara ed efficace qualora si faccia ricorso alla *trasformata di Laplace* (nel caso a tempo continuo) o alla *trasformata Zeta* (nel caso a tempo discreto), vale a dire a trasformazioni funzionali le cui definizioni e proprietà fondamentali sono riportate in Appendice.

#### Teorema 17 (risposta all'impulso e funzione di trasferimento)

La funzione di trasferimento di un sistema lineare  $(\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{c}^T, d)$  a tempo continuo [discreto] è la trasformata di Laplace [trasformata Zeta] della risposta all'impulso  $g(\cdot)$ .

La validità di questo teorema può essere verificata molto semplicemente. Ad esempio, nel caso di un sistema a tempo continuo, ricordando il *Teorema 16* si ottiene

$$L[g(t)] = L[\mathbf{c}^T e^{\mathbf{A}t} \mathbf{b} + d \text{imp}(t)] = \mathbf{c}^T L[e^{\mathbf{A}t}] \mathbf{b} + d L[\text{imp}(t)]$$

che, tenendo conto delle proprietà (vedi Appendice)

$$L[e^{\mathbf{A}t}] = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \quad L[\text{imp}(t)] = 1$$

fornisce

$$L[g(t)] = \mathbf{c}^T (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{b} + d$$

che è, appunto, la funzione di trasferimento  $G(s)$ .



Ricordando le formule di convoluzione e tenendo conto che (vedi Appendice) l'operazione di prodotto di due trasformate corrisponde, nel dominio del tempo, all'operazione di convoluzione, dal *Teorema 18* discende il seguente fondamentale risultato.

**Teorema 18** (risposta forzata e funzione di trasferimento)

Le trasformate di Laplace [trasformate Zeta]  $Y_{for}(\cdot)$  e  $U(\cdot)$  dell'uscita forzata  $y_{for}(\cdot)$  e dell'ingresso  $u(\cdot)$  di un sistema lineare a tempo continuo [discreto] avente funzione di trasferimento  $G(\cdot)$  sono legate dalla relazione

$$Y_{for}(p) = G(p)U(p) \tag{36}$$

Il *Teorema 18* afferma che, pur di lavorare nel dominio delle trasformate, la risposta forzata può essere calcolata dall'ingresso per mezzo di una semplice relazione algebrica anziché per mezzo di una relazione integrale (la formula di Lagrange). Tale relazione algebrica è, in un certo senso, simile alla relazione (vedi *Paragrafo 6*)

$$\bar{y} = \mu \bar{u}$$

che afferma che il rapporto tra uscita e ingresso di equilibrio è un invariante, chiamato *guadagno* del sistema. Anzi, proprio per questo motivo, la funzione di trasferimento è, a volte, chiamata (impropriamente) guadagno.

La semplicità del *Teorema 18* è, purtroppo, solo apparente. Infatti, per calcolare la risposta forzata di un assegnato sistema usando la (36) è necessario innanzitutto trasformare la funzione di ingresso  $u(\cdot)$  e poi antitrasformare la risposta  $Y_{for}(\cdot)$  e le operazioni di trasformazione e antitrasformazione non sono, in generale, agevoli. Tuttavia, nel caso di ingressi particolarmente semplici, come impulso, scalino e rampa, tali operazioni risultano possibili, come illustrato nel prossimo paragrafo.

**Problema 58** (N, II)

La risposta all'impulso  $g(t)$  di un sistema a tempo discreto è

$t$	0	1	2	3	4	5	6	7	8...
$u(t)$	1	0	0	0	0	0	0	0	0...
$g(t)$	0	1	1	2	3	5	8	13	21...

Si ricavi la funzione di trasferimento  $G(z)$  del sistema.

**33. Calcolo delle risposte all'impulso, allo scalino e alla rampa**

Gli ingressi canonici più semplici e, per questo, più spesso presi in considerazione sono l'impulso, lo scalino e la rampa, rappresentati in *Fig. 33* nel caso a tempo continuo, che è l'unico caso che tratteremo in questo paragrafo. L'impulso è già stato definito nel *Paragrafo 28* e rappresenta una sollecitazione intensa a cui il sistema viene sottoposto per un breve intervallo di tempo.

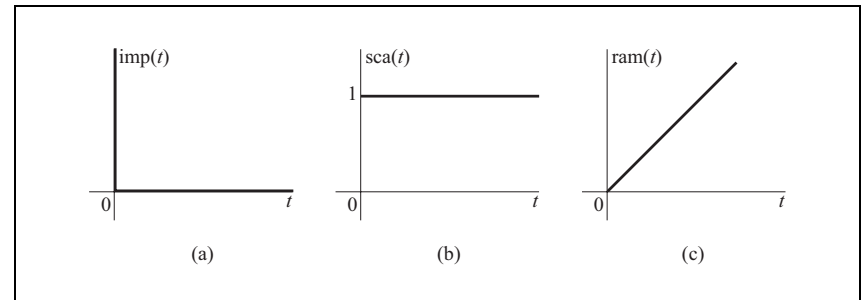
Lo scalino (da alcuni chiamato "gradino") rappresenta invece una variazione brusca dell'ingresso, quale quella usata per trasferire un sistema da una condizione operativa (tipicamente uno stato di equilibrio) a un'altra, come avviene ad esempio alla messa in moto di un impianto o di un'apparecchiatura. È quindi definito nel modo seguente

$$u(t) = \text{sca}(t) = \begin{cases} 0 & , t = 0 \\ 1 & , t > 0 \end{cases}$$

Infine, la rampa

$$u(t) = \text{ram}(t) = t \quad , \quad t \geq 0$$

viene impiegata per rappresentare, ad esempio, l'ingresso che viene applicato per l'avvio (o, in generale, il cambiamento di condizioni operative) di sistemi che per qualche motivo non sopportano variazioni brusche (cioè a scalino) dell'ingresso.



**Figura 33** Ingressi canonici per sistemi a tempo continuo: (a) impulso, (b) scalino e (c) rampa.

Poiché lo scalino è l'integrale dell'impulso la risposta allo scalino è l'integrale di quella all'impulso. Infatti, la risposta allo scalino è data da

$$y_{for}(t) = \int_0^t \mathbf{c}^T e^{\mathbf{A}(t-\xi)} \mathbf{b} \text{sca}(\xi) d\xi + d \text{sca}(t) = \int_0^t \mathbf{c}^T e^{\mathbf{A}(t-\xi)} \mathbf{b} d\xi + d$$

che, tenendo conto del *Teorema 17*, fornisce

$$y_{for}(t) = \int_0^t g(t-\xi)d\xi - d \int_0^t \text{imp}(t-\xi)d\xi + d = \int_0^t g(\xi)d\xi$$

Analogamente, la rampa è l'integrale dello scalino e, pertanto, anche le corrispondenti risposte sono una l'integrale dell'altra.

Il calcolo delle risposte canoniche di un sistema può essere effettuato in molti modi che differiscono tra loro a seconda che il sistema sia assegnato per mezzo della quaterna  $(\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{c}^T, d)$  o della funzione di trasferimento. Nel primo caso si potrebbe pensare di calcolare  $g(t)$  usando la formula riportata nel *Teorema 16* e poi eventualmente integrare nel tempo una o due volte per ottenere la risposta allo scalino o alla rampa. Questo procedimento non è però interessante, poiché le risposte canoniche possono essere ottenute per simulazione diretta, vale a dire risolvendo le equazioni di stato che descrivono il sistema per mezzo di un opportuno metodo di integrazione numerica.

Se il sistema è, invece, assegnato per mezzo della sua funzione di trasferimento  $G(s) = N(s)/D(s)$ , per effettuare la simulazione si può usare il corrispondente modello ARMA  $y(t)D(s) = N(s)u(t)$ . Alternativamente, si può ricorrere al *metodo di Heaviside*, molto usato in passato ma oggi non più giustificato a causa della disponibilità di eccellenti mezzi di calcolo. Tale metodo può essere applicato quando si conoscano i poli  $p_i$  (con le loro molteplicità  $a_i$ ) della funzione di trasferimento  $G(s) = N(s)/D(s)$ , per cui dalla (36) risulta

$$Y_{for}(s) = \frac{N(s)}{D(s)} \frac{1}{s^r} = \frac{N(s)}{s^r (s-p_1)^{a_1} (s-p_2)^{a_2} \dots (s-p_k)^{a_k}} \quad (37)$$

dove  $r = 0, 1$  o  $2$  a seconda che si tratti di risposta all'impulso, allo scalino o alla rampa (si veda l'Appendice). Il teorema di Heaviside (qui non dimostrato) afferma che la funzione  $Y_{for}(s)$  può sempre essere scomposta (in modo univoco) nel modo seguente

$$Y_{for}(s) = \gamma_{00} + \frac{\gamma_{01}}{s} + \frac{\gamma_{02}}{s^2} + \frac{\gamma_{11}}{(s-p_1)} + \frac{\gamma_{12}}{(s-p_1)^2} + \dots + \frac{\gamma_{1a_1}}{(s-p_1)^{a_1}} + \dots + \frac{\gamma_{k1}}{(s-p_k)} + \frac{\gamma_{k2}}{(s-p_k)^2} + \dots + \frac{\gamma_{ka_k}}{(s-p_k)^{a_k}} \quad (38)$$

I coefficienti  $\gamma_{ij}$  possono essere determinati imponendo l'identità della (37) con la (38). Una volta ottenuti i valori numerici dei coefficienti  $\gamma_{ij}$ , l'antitrasformazione della (38) è immediata in quanto

$$L^{-1}\left[\frac{\gamma}{(s-p)^j}\right] = \frac{\gamma t^{j-1} e^{pt}}{(j-1)!}$$

Per la linearità della trasformata di Laplace, la risposta canonica è, quindi, la somma di termini di tipo esponenziale o, nel caso  $p$  sia complesso, sinusoidale modulato esponenzialmente (eventualmente moltiplicati per una potenza di  $t$ ).

Spesso, non interessa tanto calcolare esattamente la risposta canonica quanto saperne determinare alcune caratteristiche qualitative, quali il comportamento asintotico, la presenza o meno di oscillazioni (o, più in generale, di massimi e/o minimi) e il comportamento nei primissimi istanti. D'altra parte, sono queste le caratteristiche più significative che è possibile catturare a colpo d'occhio guardando il grafico di una risposta canonica. Per esempio, in *Fig. 32* appare chiaramente che il comportamento asintotico del terzo sistema è esplosivo mentre quello degli altri due è evanescente, che il secondo sistema è l'unico ad essere caratterizzato da oscillazioni e che la reattività nei primissimi istanti è debole nel primo sistema e fortissima nel terzo.

Alcune di queste proprietà sono facilmente deducibili dalla funzione di trasferimento del sistema. Infatti, per quanto visto in precedenza, la risposta all'impulso di un sistema tende asintoticamente a zero se e solo se il sistema è esternamente stabile. Dalla *Fig. 32* segue pertanto che il sistema cardiocircolatorio e l'ala dell'aeroplano sono esternamente stabili mentre il conto corrente è un sistema esternamente instabile. Analogamente, la risposta allo scalino tende per  $t \rightarrow \infty$  a un valore costante  $\bar{y}$  se e solo se il sistema è esternamente stabile. Inoltre, dato che lo scalino è unitario,  $\bar{y}$  coincide con il guadagno  $\mu$  del sistema che è facilmente ricavabile dalla funzione di trasferimento poiché, nei sistemi a tempo continuo

$$\mu = G(0)$$

Per quanto riguarda la reattività del sistema nei primissimi istanti si può dimostrare quanto segue.

**Teorema 19** (*derivata nell'origine delle risposte canoniche*)

La prima derivata non nulla per  $t = 0$  della risposta allo scalino [all'impulso] [alla rampa] di un sistema proprio a tempo continuo con eccesso di poli pari a  $r \geq 1$  con funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{\beta_r s^{n-r} + \dots + \beta_n}{s^n + \alpha_1 s^{n-1} + \dots + \alpha_n}$$

è la  $r$ -esima [( $r-1$ )-esima] [( $r+1$ )-esima] ed è pari a  $\beta_r$ .

Tenendo presente che questo risultato si può, ad esempio, dedurre dalle risposte all'impulso riportate in Fig. 32 che la funzione di trasferimento del sistema cardiocircolatorio ha eccesso di poli pari almeno a tre, che quella dell'ala dell'aereo ha eccesso di poli pari a due e che quella del conto corrente ha eccesso di poli pari a uno.

La presenza di oscillazioni (intese come sequenza di infiniti massimi e minimi nella risposta) è ovviamente dovuta alla presenza di poli complessi coniugati (oscillazioni smorzate, come quelle di Fig. 32(b), corrispondono ovviamente a poli stabili). Si noti, tuttavia, che la presenza di poli complessi è necessaria ma non sufficiente a dar luogo a oscillazioni. Infatti, se tali poli complessi non sono dominanti il numero di massimi e minimi risulta finito.

Nel caso in cui la funzione di trasferimento abbia tutti gli zeri e i poli reali e distinti, è possibile stabilire un interessante legame tra la posizione di zeri e poli sull'asse reale e il numero di estremi (massimi e minimi) della risposta allo scalino (si noti che tale numero coincide con il numero di zeri della risposta all'impulso). In tal caso, la  $G(s)$  si può scrivere nella forma

$$G(s) = \rho \frac{\prod_{i=1}^m (s - z_i)}{\prod_{i=1}^n (s - p_i)}$$

dove  $n$  è l'ordine del sistema e, limitandosi a considerare sistemi propri,  $m < n$ . Disponendo poli e zeri sull'asse reale (orientato positivamente verso destra) è possibile raggruppare gli  $m$  zeri del sistema in tre sottoinsiemi, corrispondenti agli *zeri superiori* (zeri a destra del polo dominante), *zeri inquadri* (zeri compresi tra il polo dominante e il polo più a sinistra) e *zeri inferiori* (zeri a sinistra del polo più a sinistra). Notiamo che tale partizione è ben definita avendo supposto reali gli zeri e i poli. Ora, nell'insieme degli zeri inquadri definiamo *bene inquadri* quelli che, nell'intervallo compreso tra il polo immediatamente alla loro destra e il polo immediatamente alla loro sinistra, hanno lo stesso numero di zeri alla propria destra e alla propria sinistra e *male inquadri* i rimanenti. È facile dedurre che questi ultimi sono sempre in numero pari.

Fatte queste premesse, vale il seguente risultato (che viene riportato senza dimostrazione).

**Teorema 20** (risposta allo scalino di sistemi con poli e zeri reali)

Si consideri un sistema proprio con funzione di trasferimento  $G(s)$  avente tutti gli zeri e i poli reali e distinti. Sia  $m_s$  il numero di zeri superiori e  $\delta$  il numero di zeri male inquadri. Il numero  $N$  di estremi della risposta allo scalino è limitato da

$$m_s \leq N \leq m_s + \delta$$

Inoltre,  $N$  è dispari [pari] se  $m_s$  è dispari [pari].

Nel caso  $\delta = 0$ , cioè quando non esistono zeri mal inquadri, il Teorema 20 permette di dedurre il numero esatto di estremi della risposta, come mostrato in Fig. 34.

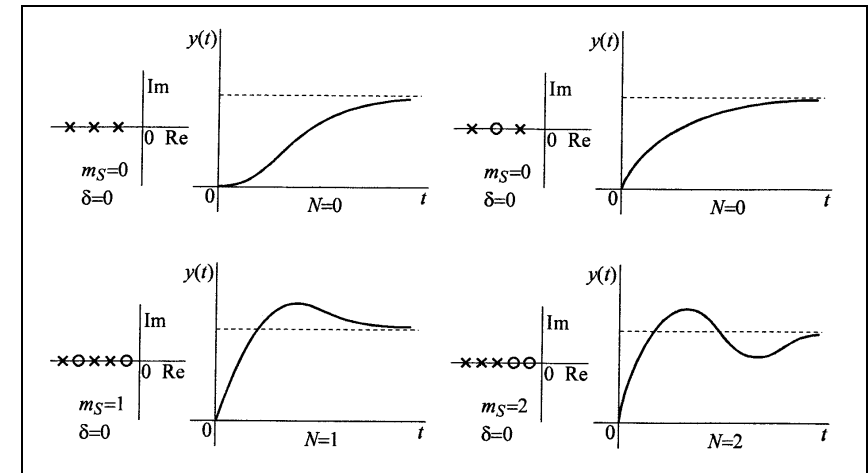


Figura 34 Quattro esempi di sistemi con zeri bene inquadri.

Se, invece, esistono zeri male inquadri, il Teorema 20 permette soltanto di restringere l'insieme dei possibili valori di  $N$ , come mostrato in Fig. 35.

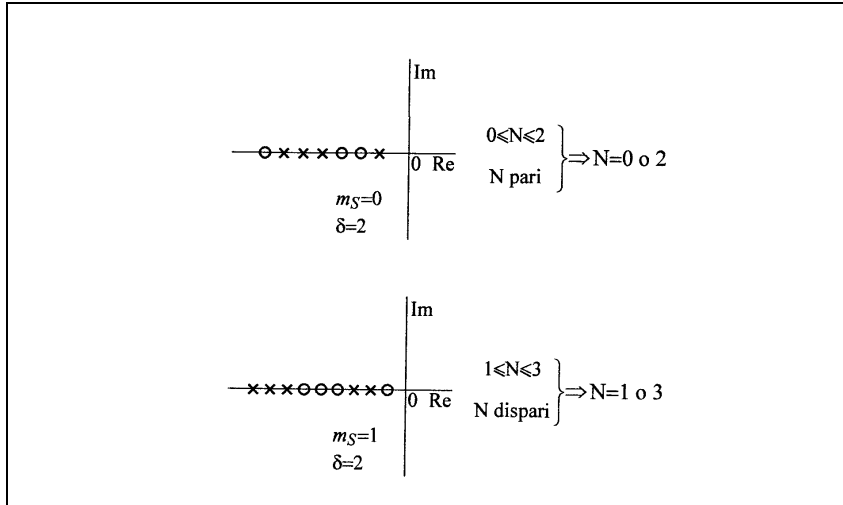


Figura 35 Due esempi di sistemi con zeri male inquadri.

Altre caratteristiche di particolare interesse nella risposta allo scalino dei sistemi esternamente stabili sono (vedi Fig. 36) il tempo di ritardo  $T_r$  (tempo necessario perché la risposta raggiunga il 50% del valore finale), il tempo si salita  $T_s$  (tempo necessario perché la risposta passi dal 10% al 90% del valore finale), il tempo di assestamento  $T_a$  (tempo a partire dal quale la risposta rimane per sempre entro il 5% del valore finale) e il tempo di massima sovravelongazione  $T_{max}$  (tempo al quale la risposta raggiunge il suo massimo valore). Tali tempi caratteristici, in particolare il tempo di assestamento, sono positivamente correlati con la costante di tempo dominante del sistema. Nel caso la risposta allo scalino abbia uno o più massimi di valore superiore a  $\bar{y}$ , indicando con  $y_{max}$  l'ampiezza del più grande di tali massimi (generalmente il primo), la sovravelongazione (relativa)  $\sigma$  si definisce nel modo seguente (vedi Fig. 36)

$$\sigma = \frac{y_{max} - \bar{y}}{\bar{y}}$$

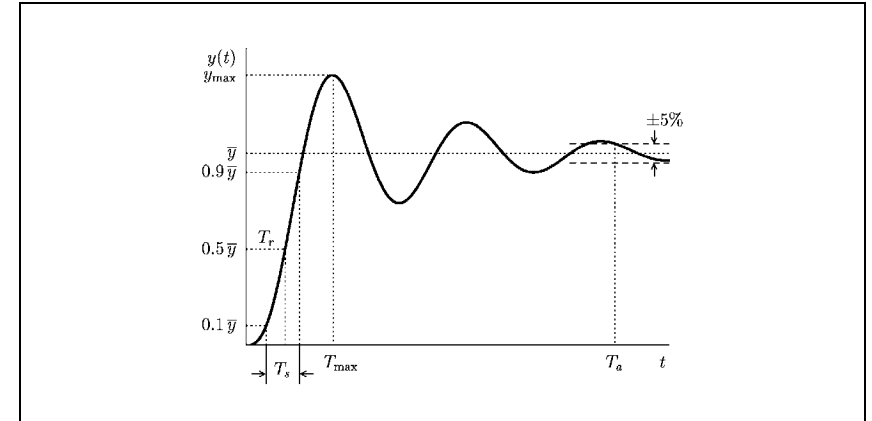
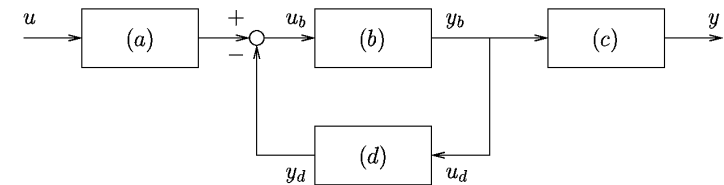


Figura 36 Risposta allo scalino con sovravelongazione e tempi caratteristici.

I tempi caratteristici di risposta e la sovravelongazione non possono essere dedotti banalmente dalla funzione di trasferimento  $G(s)$  del sistema, se non per sistemi di dimensione molto piccola ( $n \leq 2$ ).

**Problema 59 (N, II)**

Si determini, anche solo qualitativamente, la risposta all'impulso unitario del sistema rappresentato in figura



nell'ipotesi in cui i quattro sottosistemi siano così individuati:

a)  $G(s) = \frac{10}{1+10s}$

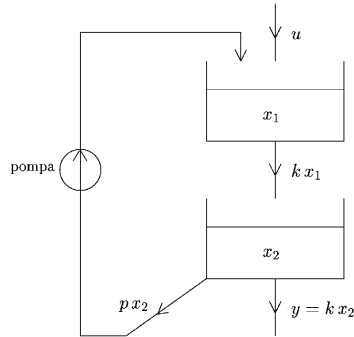
b) è descritto dall'equazione differenziale  $900\ddot{y}_b + 100\dot{y}_b + y_b = \frac{16}{9}\dot{u}_b$

c) è un integratore

d) è descritto dall'equazione  $\dot{y}_d = u_d$

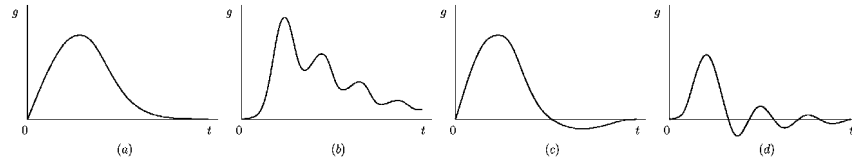
**Problema 60 (A, II)**

Si determini, anche solo qualitativamente, la risposta allo scalino del sistema idraulico rappresentato in figura, costituito da due serbatoi con riciclo



**Problema 61 (T, I)**

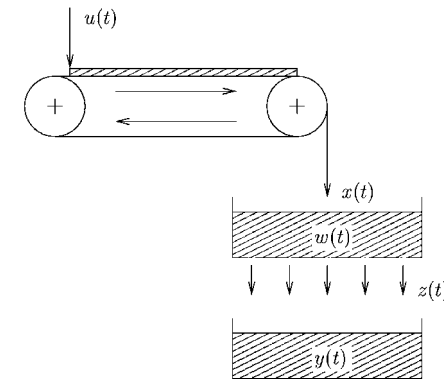
In figura sono riportate le risposte all'impulso di quattro sistemi diversi (a), (b), (c) e (d).



Quali di questi sistemi hanno risposta allo scalino monotona crescente?

**Problema 62 (A, I)**

Si consideri il sistema rappresentato schematicamente in figura, costituito da un nastro trasportatore di sabbia, da un setaccio e da un serbatoio.



Si supponga che la velocità del nastro trasportatore sia costante così che il tempo di trasporto  $\tau$  sia pure costante. Per quanto riguarda il setaccio si immagini che il flusso volumetrico in uscita  $z(t)$  sia proporzionale al volume di sabbia  $w(t)$  presente nel setaccio, cioè  $z(t) = kw(t)$ . Detto  $u(t)$  il flusso volumetrico di alimentazione e  $y(t)$  il volume di sabbia nel serbatoio si determini la funzione di trasferimento  $Y(s)/U(s)$  del sistema. Indi si determini la risposta all'impulso del sistema.

**34. Regime periodico**

Un sistema  $(\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{c}^T, d)$  si dice in *regime periodico* quando il suo ingresso, il suo stato e la sua uscita sono funzioni periodiche (di periodo  $T > 0$ ) del tempo, vale a dire

$$u(t) = u(t + T) \quad \mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(t + T) \quad y(t) = y(t + T) \quad \forall t$$

È interessante chiedersi sotto quali condizioni, fissato un qualsiasi ingresso periodico  $u_T(\cdot)$  di periodo  $T$ , esista e sia unico il regime periodico corrispondente. A questa domanda risponde il seguente teorema.

**Teorema 21 (regime periodico dei sistemi a tempo continuo)**

Un sistema lineare a tempo continuo  $(\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{c}^T, d)$  ammette uno e un solo regime periodico di periodo  $T$  per ogni ingresso periodico  $u_T(\cdot)$  se e solo se i suoi autovalori non hanno parte reale nulla.

Anziché dare una dimostrazione di questo teorema, vediamo, per mezzo di un esempio, perché esistenza o unicità della soluzione periodica vengono a mancare qualora il sistema abbia autovalori con parte reale nulla. Per questo consideriamo un semplice integratore (che è un sistema con un autovalore nullo) descritto dall'equazione di stato  $\dot{x} = u$ . Per integrazione sull'intervallo di tempo  $(0, T)$ , otteniamo

$$x(T) - x(0) = \int_0^T u_T(\xi) d\xi$$

Pertanto, la soluzione periodica  $(x(0) = x(T))$  esiste se e solo se l'ingresso periodico  $u_T(\cdot)$  ha valor medio nullo. Tuttavia, in questo caso viene a mancare l'unicità della soluzione periodica dato che  $(x(0) = x(T))$  è arbitrario.

Nel caso dei sistemi a tempo discreto è possibile dare una formula esplicita e compatta per il calcolo dell'uscita periodica  $y_T(\cdot)$ . È interessante notare che in tale formula, presentata senza dimostrazione nel teorema seguente, sono coinvolti la risposta all'impulso del sistema e i vettori di raggiungibilità e osservabilità introdotti nei paragrafi precedenti.

**Teorema 22 (regime periodico dei sistemi a tempo discreto)**

Si consideri il sistema lineare a tempo discreto  $(\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{c}^T, d)$  sottoposto a ingresso periodico  $u_T(\cdot)$  ( $T$  è un numero intero) e si supponga che gli autovalori  $\lambda_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$ , della matrice  $\mathbf{A}$  siano tali che

$$\lambda_j \neq e^{\frac{2k\pi}{T}}$$

per ogni  $k$  intero. Esiste allora uno e un solo regime periodico dell'uscita  $y_T(\cdot)$  dato da

$$\begin{bmatrix} y_T(0) \\ y_T(1) \\ \vdots \\ y_T(T-1) \end{bmatrix} = \left[ \mathbf{O}_{T-1} (\mathbf{I} - \mathbf{A}^T)^{-1} \mathbf{R}_T + \mathbf{D}^* \right] \begin{bmatrix} u_T(T-1) \\ u_T(T-2) \\ \vdots \\ u_T(0) \end{bmatrix} \quad (39)$$

dove

$$\mathbf{O}_{T-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{c}^T \\ \mathbf{c}^T \mathbf{A} \\ \vdots \\ \mathbf{c}^T \mathbf{A}^{T-1} \end{bmatrix} \quad \mathbf{R}_T = \begin{bmatrix} \mathbf{b} & \mathbf{A}\mathbf{b} & \dots & \mathbf{A}^{T-1}\mathbf{b} \end{bmatrix}$$

mentre  $\mathbf{D}^*$  è la seguente matrice di dimensione  $T \times T$

$$\mathbf{D}^* = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & g(0) \\ 0 & 0 & \dots & g(0) & g(1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & g(0) & \dots & g(T-3) & g(T-2) \\ g(0) & g(1) & \dots & g(T-2) & g(T-1) \end{bmatrix}$$

dove  $g(\cdot)$  è la risposta all'impulso del sistema.

I Teoremi 21 e 22 mettono in evidenza che a ogni ingresso periodico applicato a un sistema corrisponde uno e un solo movimento periodico (dello stesso periodo), eccezion fatta per alcuni valori critici del periodo che esistono soltanto qualora il sistema non sia iperbolico, cioè qualora il sistema possieda autovalori sulla "frontiera di stabilità" (vale a dire con parte reale nulla nel caso a tempo continuo o con modulo unitario nel caso a tempo discreto). Pertanto, i sistemi asintoticamente stabili non hanno periodi critici.

Una volta accertato che, in un dato sistema, il regime periodico esiste ed è unico, è lecito chiedersi se, applicando l'ingresso periodico  $u_T(\cdot)$  al sistema inizialmente in uno stato generico  $\mathbf{x}(0)$ , lo stato  $\mathbf{x}(t)$  tenda oppure no, al passare del tempo, verso il regime periodico  $\mathbf{x}_T(\cdot)$ . Per rispondere a questa domanda, introduciamo la variabile

$$\mathbf{e}(t) = \mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_T(t)$$

che rappresenta, componente per componente, lo scostamento tra il movimento  $\mathbf{x}(t)$  originato da uno stato iniziale  $\mathbf{x}(0)$  generico e il regime periodico  $\mathbf{x}_T(t)$ . In base alla formula di Lagrange si ha

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= \Phi(t)\mathbf{x}(0) + \Psi(t)u_T(\cdot) \\ \mathbf{x}_T(t) &= \Phi(t)\mathbf{x}_T(0) + \Psi(t)u_T(\cdot) \end{aligned}$$

da cui, sottraendo membro a membro, si ottiene

$$\mathbf{e}(t) = \Phi(t)\mathbf{e}(0)$$

È quindi evidente che il movimento del sistema tende al regime periodico qualunque sia lo stato iniziale  $\mathbf{x}(0)$  se e solo se  $\Phi(t) \rightarrow \mathbf{0}$ , cioè se e solo se il sistema è asintoticamente stabile. Inoltre, il tempo di convergenza e le caratteristiche del transitorio dipendono esclusivamente dagli autovalori della matrice  $\mathbf{A}$ .

### 35. Regime sinusoidale e risposta in frequenza dei sistemi a tempo continuo

Nell'ambito dello studio del regime periodico dei sistemi a tempo continuo è di grande importanza considerare il *regime sinusoidale*, vale a dire il comportamento del sistema quando l'ingresso è dato da

$$u_T(t) = U \operatorname{sen} \frac{2\pi}{T} t$$

L'importanza del regime sinusoidale risiede principalmente nel fatto che, sotto ipotesi quasi sempre verificate nelle applicazioni, un ingresso periodico  $u_T(\cdot)$  può essere scritto come somma di infinite sinusoidi (*serie di Fourier*):

$$u_T(t) = c + \sum_{k=1}^{\infty} u_k \operatorname{sen} \left( k \frac{2\pi}{T} t + \varphi_k \right) \quad (40)$$

o, in maniera del tutto equivalente, come

$$u_T(t) = c + \sum_{k=1}^{\infty} \left( a_k \operatorname{sen} k \frac{2\pi}{T} t + b_k \cos k \frac{2\pi}{T} t \right)$$

dove

$$u_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2} \quad \operatorname{sen} \varphi_k = \frac{b_k}{\sqrt{a_k^2 + b_k^2}} \quad \cos \varphi_k = \frac{a_k}{\sqrt{a_k^2 + b_k^2}}$$

La costante  $c$  è il valore medio dell'ingresso  $u_T(\cdot)$ . Il termine sinusoidale di periodo  $T$  nella (40) è detto *armonica fondamentale* o *prima armonica* mentre, in generale, il termine di periodo  $T/k$  è detto *k-esima armonica*. La costante  $c$  e i coefficienti  $a_k$  e  $b_k$  che individuano lo sviluppo della funzione  $u_T(\cdot)$  possono essere determinati mediante le relazioni

$$c = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} u_T(\xi) d\xi$$

$$a_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} u_T(\xi) \operatorname{sen} \left( k \frac{2\pi}{T} \xi \right) d\xi$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} u_T(\xi) \cos \left( k \frac{2\pi}{T} \xi \right) d\xi$$

Dato che il regime sinusoidale è un particolare regime periodico, per esso valgono i risultati visti nel precedente paragrafo (in particolare il *Teorema 21*). Ma valgono, in realtà, risultati più specifici, come illustrato nel seguente teorema ricavabile con il metodo del *bilanciamento armonico*.

#### **Teorema 23** (*risposta in frequenza dei sistemi a tempo continuo*)

Si consideri il sistema lineare completamente raggiungibile e osservabile a tempo continuo descritto dal modello ARMA

$$\Delta(s)y(t) = N(s)u(t)$$

Ad ogni ingresso sinusoidale di periodo  $T = 2\pi/\omega$

$$u_T(t) = U \operatorname{sen} \omega t$$

corrisponde un'unica uscita sinusoidale

$$y_T(t) = Y \operatorname{sen}(\omega t + \varphi)$$

se e solo se

$$\Delta(i\omega) \neq 0$$

In tal caso risulta

$$Y = R(\omega)U \quad \varphi = \varphi(\omega)$$

Alla coppia di funzioni  $(R(\cdot), \varphi(\cdot))$  si dà il nome di *risposta in frequenza*.

Il *Teorema 23* afferma che a un ingresso sinusoidale di pulsazione  $\omega$  è associata una e una sola uscita sinusoidale (con l'eccezione, al più, di alcuni valori critici di  $\omega$ ). Inoltre,

l'ampiezza della sinusoide d'uscita è proporzionale all'ampiezza della sinusoide d'ingresso.

Vale la pena notare che nei sistemi iperbolici (e in particolare in quelli asintoticamente stabili) le condizioni del *Teorema 23* sono sempre verificate. Viceversa, se

$$\Delta(i\omega) = 0$$

cioè se il sistema ha autovalori immaginari pari a  $\lambda = \pm i\omega$ , non esiste nessuna uscita sinusoidale associata all'ingresso di pulsazione  $\omega$  (è il caso, ad esempio, di un semplice circuito *LC* forzato da una sinusoide di pulsazione  $\omega = 1/\sqrt{LC}$ ).

Sebbene il *Teorema 23* affermi che, sotto certe condizioni, esiste ed è unica la sinusoide in uscita, ciò non significa necessariamente che non esistano altre uscite periodiche (ovviamente non sinusoidali) associate all'ingresso  $u_T(t) = U \sin \omega t$ . Ciò avviene, ad esempio, nel caso dell'integratore

$$\dot{y}(t) = u(t)$$

il quale ammette l'uscita periodica

$$y_T(t) = Y \sin(\omega t + \varphi) + c$$

con  $c$  qualsiasi. Un altro esempio si ha nel caso di un oscillatore puro con autovalori  $\lambda = \pm ik\omega$ ,  $k = 2, 3, \dots$ , forzato periodicamente alla pulsazione  $\omega$ . Tale sistema è descritto da

$$\ddot{y}(t) + k^2 \omega^2 y(t) = U \sin \omega t$$

e, pertanto, ammette la soluzione periodica (ma non sinusoidale) di periodo  $T = 2\pi/\omega$

$$y_T(t) = Y \sin(\omega t + \varphi) + \gamma \sin(k\omega t + \phi)$$

con  $\gamma$  e  $\phi$  qualsiasi.

Inoltre, qualora valgano le condizioni del *Teorema 24*, l'unica uscita sinusoidale  $y_T(t) = Y \sin(\omega t + \varphi)$  associata all'ingresso sinusoidale  $u_T(t) = U \sin \omega t$  viene raggiunta asintoticamente qualunque sia lo stato iniziale  $\mathbf{x}(0)$  del sistema se e solo se il sistema è asintoticamente stabile.

La risposta in frequenza  $(R(\cdot), \varphi(\cdot))$ , che stabilisce il legame tra ampiezza e sfasamento delle sinusoidi di ingresso e uscita, può essere determinata molto semplicemente dalla funzione di trasferimento, come posto in evidenza nel seguente fondamentale teorema.

### Teorema 25 (risposta in frequenza e funzione di trasferimento)

La risposta in frequenza  $(R(\cdot), \varphi(\cdot))$  di un sistema a tempo continuo con funzione di trasferimento  $G(\cdot)$  è data da

$$R(\omega) = |G(i\omega)| \quad \varphi(\omega) = \arg G(i\omega) \quad (41)$$

In regime sinusoidale è quindi immediato ricavare le caratteristiche dell'uscita note che siano quelle dell'ingresso, in quanto l'uscita è completamente individuata dalla pulsazione  $\omega$ , uguale a quella d'ingresso, dall'ampiezza  $Y$  e dallo sfasamento  $\varphi$ , facilmente ricavabili dalle (41), nota la funzione di trasferimento.

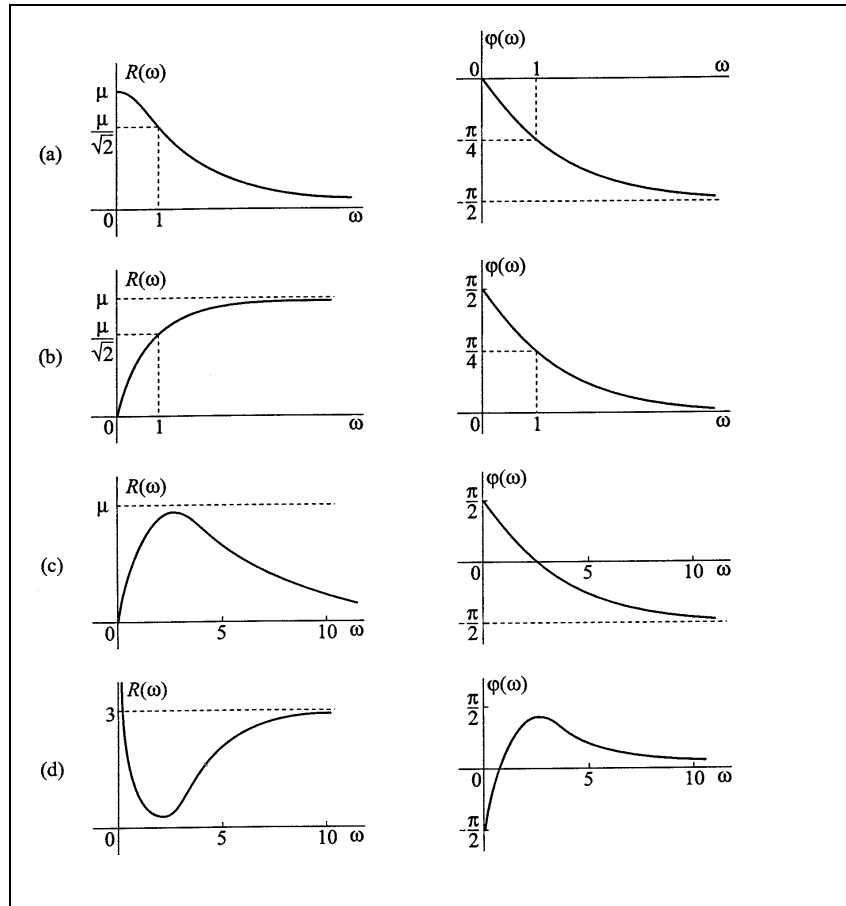
Qualora il sistema sia asintoticamente stabile, la risposta in frequenza può essere determinata sperimentalmente. Infatti, una volta applicato un ingresso sinusoidale  $u_T(t)$  di ampiezza  $U$  e pulsazione  $\omega$ , dopo un tempo sufficientemente lungo l'uscita  $y(t)$  coincide praticamente con  $y_T(t)$  qualsiasi sia lo stato iniziale  $\mathbf{x}(0)$  del sistema. È quindi possibile ricavare la coppia  $(R(\omega), \varphi(\omega))$  misurando l'ampiezza  $Y$  dell'uscita e lo sfasamento  $\varphi$  tra le sinusoidi d'ingresso e d'uscita. Ripetendo l'esperimento per ingressi di pulsazione differente, la risposta in frequenza  $(R(\cdot), \varphi(\cdot))$  potrà essere costruita per punti. Questo procedimento è, in effetti, la base per un semplice metodo di *identificazione* del sistema, in quanto, una volta determinata la risposta in frequenza, è possibile da essa risalire alla funzione di trasferimento  $G(\cdot)$  del sistema (si veda anche il successivo paragrafo).

Nella *Fig. 37* sono presentati quattro esempi di risposta in frequenza. I sistemi (a), (b) e (c) sono detti, per evidenti motivi, *filtri passa-basso*, *passa-alto* e *passa-banda*. L'intervallo di pulsazioni in cui  $R(\omega)$  è prossimo al suo valore massimo si chiama *banda passante*. Più precisamente, la banda passante di un sistema è convenzionalmente definita come l'intervallo di pulsazioni  $B = [\omega_1, \omega_2]$  all'interno del quale

$$\frac{R_{\max}}{\sqrt{2}} \leq R(\omega) \leq R_{\max}$$

Vedremo in seguito che questa definizione permette di approssimare gli estremi  $\omega_1$  e  $\omega_2$  della banda passante con gli inversi di due costanti di tempo del sistema. Il sistema (d) è invece detto *filtro elimina-banda*. Nei casi estremi, la banda di un sistema passa-banda (o l'insieme di pulsazioni attenuate in un sistema elimina-banda) può essere così stretta da riguardare praticamente una sola frequenza.





**Figura 37** Quattro esempi di risposta in frequenza: (a)  $G(s) = \mu/(1+s)$ ; (b)  $G(s) = \mu s/(1+s)$ ; (c)  $G(s) = \mu s / [(1+s)(1+0.1s)]$ ; (d)  $G(s) = 0.3(1+s)^2 / [s(1+0.1s)]$ .

**Problema 63 (A, II)**

La portata dell'immissario di un lago con costante di tempo pari a 2 giorni varia periodicamente durante il giorno a causa dello scioglimento delle nevi. Che rapporto c'è tra l'escursione giornaliera di portata dell'emissario e quella dell'immissario? Se l'emissario alimenta un secondo lago con costante di tempo di 3 giorni qual'è il rapporto tra l'escursione giornaliera di portata dell'emissario del secondo lago e quella dell'immissario del primo lago?

**36. Poli complessi e risonanza**

La risposta in frequenza di un sistema con una o più coppie di poli complessi è del tutto particolare e merita un'analisi approfondita.

Consideriamo il caso più semplice in cui la funzione di trasferimento  $G(s)$  ha due soli poli, nessuno zero e guadagno unitario. È quindi sempre possibile scriverla nella forma

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} \tag{42}$$

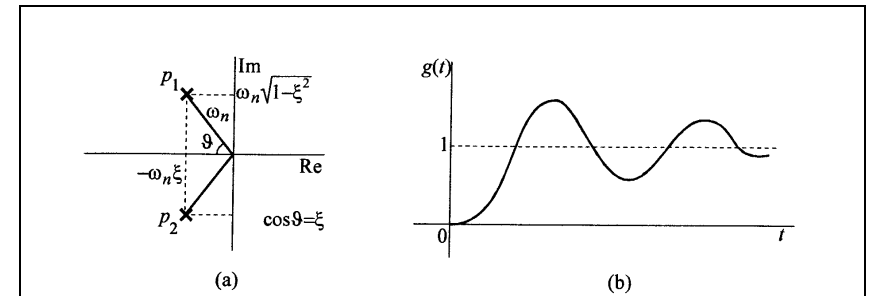
in cui i due parametri  $\omega_n > 0$  e  $\xi$  si chiamano, rispettivamente, *pulsazione naturale* e *smorzamento*. I due poli di  $G(s)$

$$p_{1,2} = -\omega_n (\xi \pm \sqrt{\xi^2 - 1})$$

sono effettivamente complessi qualora  $|\xi| < 1$ , nel qual caso hanno parte reale negativa per  $\xi > 0$  (sistema esternamente stabile) (Fig. 38(a)). La risposta allo scalino del sistema è del tipo rappresentato in Fig. 36(b), cioè presenta oscillazioni smorzate di pulsazione

$$\omega_{osc} = \text{Im}[p_{1,2}] = \omega_n \sqrt{1 - \xi^2}$$

La pulsazione di oscillazione  $\omega_{osc}$  è quindi minore della pulsazione naturale  $\omega_n$  e risulta  $\omega_{osc} \rightarrow \omega_n$  quando  $\xi \rightarrow 0$ , vale a dire quando i due poli sono immaginari.



**Figura 38** Sistema del secondo ordine con due poli complessi e senza zeri: (a) posizione dei poli nel piano complesso; (b) risposta allo scalino.

La risposta in frequenza del sistema è costituita dalla coppia di funzioni

$$R(\omega) = |G(i\omega)| = \left| \frac{\omega_n^2}{(i\omega)^2 + 2\xi\omega_n i\omega + \omega_n^2} \right| = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right)^2 + \left(2\xi \frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}}$$

$$\varphi(\omega) = \arg G(i\omega) = \arg \left( \frac{\omega_n^2}{(i\omega)^2 + 2\xi\omega_n i\omega + \omega_n^2} \right) = -\arg \left( 1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 + i \left(2\xi \frac{\omega}{\omega_n}\right) \right)$$

Le due funzioni sono rappresentate graficamente in Fig. 39 per vari valori di  $\xi$  nell'intervallo  $0 \leq \xi \leq 1$ . La Fig. 39(a) mette chiaramente in evidenza che, per  $\xi$  sufficientemente piccolo, il modulo della risposta in frequenza presenta un massimo, più o meno pronunciato, in corrispondenza di una *pulsazione di risonanza*  $\omega_r$  vicina a  $\omega_n$ . Più precisamente,  $\omega_r$  è la pulsazione tale per cui

$$\frac{dR(\omega)}{d\omega} = 0$$

e, a conti fatti, risulta

$$\omega_r = \omega_n \sqrt{1 - 2\xi^2}$$

(si noti che  $\omega_r < \omega_{osc} < \omega_n$  per  $\xi > 0$  e che  $\omega_r = \omega_{osc} = \omega_n$  nel caso limite  $\xi = 0$ ). Il fenomeno di risonanza esiste, pertanto, solo per  $\xi < 1/\sqrt{2} \cong 0.707$ , cioè quando l'angolo  $\vartheta$  di Fig. 38(a) è maggiore di  $\pi/4$ . In tal caso, l'ampiezza del picco di risonanza vale

$$R_{\max} = |G(i\omega_r)| = \frac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}}$$

Il picco di risonanza è, quindi, sempre più marcato al decrescere dello smorzamento  $\xi$  e tende a infinito per  $\xi \rightarrow 0$ .

La risonanza è un fenomeno piuttosto comune nei sistemi con  $n \geq 2$ . In corrispondenza di un intervallo piuttosto ristretto di frequenze, l'ampiezza dell'uscita è, a parità di ampiezza dell'ingresso, più alta (eventualmente anche molto più alta) che alle altre frequenze. Fenomeni di questo tipo sono presenti, ad esempio, nei sistemi meccanici (edifici, ponti, mezzi di locomozione, ...) e richiedono particolare attenzione in quanto comportano sollecitazioni di grande intensità (a volte non sopportabili) per la struttura.

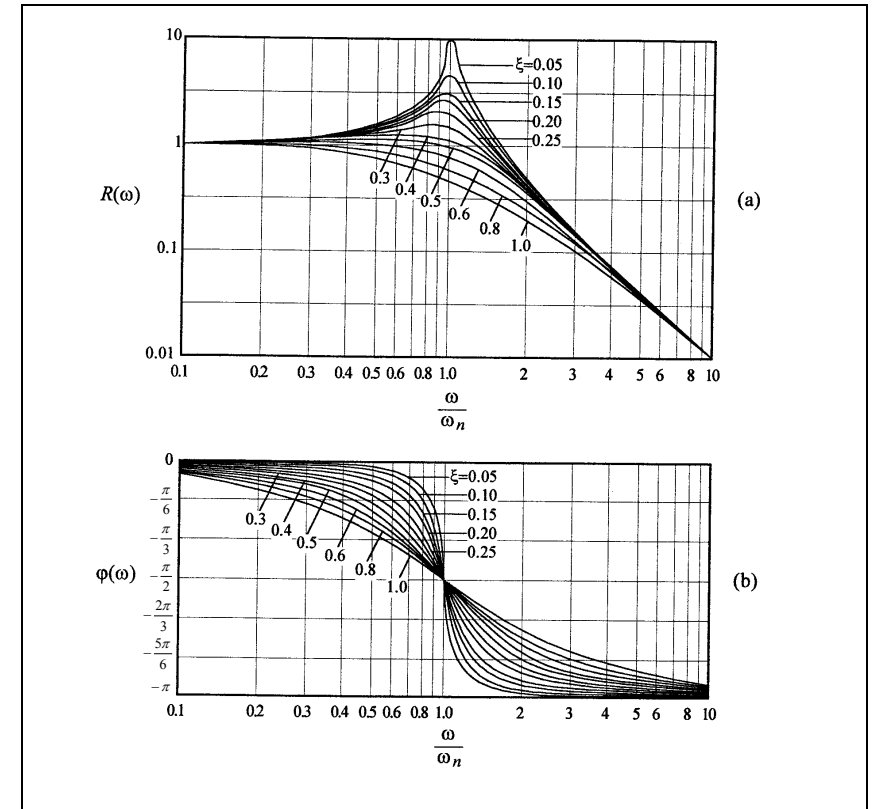


Figura 39 Risposta in frequenza del sistema con funzione di trasferimento (40).

### 37. Rappresentazioni della risposta in frequenza: generalità

Nel paragrafo precedente si è posta in luce l'importanza della risposta in frequenza, cioè della coppia di funzioni  $(R(\cdot), \varphi(\cdot))$ , nello studio dei sistemi lineari. È evidente la necessità di poter disporre di rappresentazioni grafiche di tale risposta in frequenza che siano agevoli da ottenere e, d'altro canto, di immediata ed efficace interpretazione. In questo paragrafo, limitandoci a studiare i sistemi a tempo continuo, analizzeremo due di tali rappresentazioni.

La prima (*diagrammi di Bode*) consiste di due diagrammi cartesiani in cui, su opportune scale logaritmiche, si rappresentano separatamente  $R(\cdot)$  e  $\varphi(\cdot)$ . Dei due diagrammi è di gran lunga più utilizzato quello di  $R(\cdot)$ , mentre tipicamente  $\varphi(\cdot)$  viene calcolato esplicitamente in corrispondenza di particolari pulsazioni di interesse. L'uso di

scale logaritmiche presenta un duplice vantaggio: è possibile considerare in uno stesso grafico ampi intervalli di ascisse e ordinate, cioè di  $\omega$  e di  $R(\omega)$ , e, come si vedrà, il tracciamento del diagramma risulta particolarmente semplice nel caso si facciano alcune approssimazioni.

Il diagramma di Bode di  $R(\cdot)$  presenta, con grande chiarezza e sintesi, la risposta di un sistema a sollecitazioni periodiche di varia frequenza. Il suo uso è molto comune: è facile, ad esempio, trovarlo sul libretto d'istruzioni degli amplificatori audio.

Nella seconda rappresentazione (*diagramma polare*) la risposta in frequenza ( $R(\cdot), \varphi(\cdot)$ ) è rappresentata come una linea punteggiata in  $\omega$  nel piano complesso. In altre parole, ad ogni  $\omega$  corrisponde in tale piano complesso il punto di modulo  $R(\omega)$  e di argomento  $\varphi(\omega)$  e il luogo geometrico di tali punti è una linea continua (con l'eccezione, al più, di un numero finito di discontinuità) che costituisce, per l'appunto, il diagramma polare.

Il diagramma polare è, rispetto ai diagrammi di Bode, di interpretazione meno immediata, ma è il supporto per l'applicazione di un famoso criterio per la stabilità esterna dei sistemi retroazionati, noto come *criterio di Nyquist*.

### 38. Diagrammi di Bode

Consideriamo un sistema con funzione di trasferimento  $G(s)$  e supponiamo, inizialmente, che  $G(s)$  abbia solo zeri e poli reali. È così possibile scrivere  $G(s)$  nella forma

$$G(s) = \mu \frac{\prod_{j=1}^{n_z} (1 + s\tau_j)}{s^h \prod_{j=1}^{n_p} (1 + sT_j)}$$

dove l'intero  $h$ , detto talvolta *tipo* del sistema, è il numero di poli nulli nel caso  $h > 0$  o il numero di zeri nulli nel caso  $h < 0$ ,  $\mu$  è una costante (che coincide con il guadagno del sistema nel caso  $h = 0$ ),  $z_j = -1/\tau_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, n_z$ , sono gli zeri non nulli del sistema e  $p_j = -1/T_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, n_p$ , sono i poli non nulli.

La risposta in frequenza di tale sistema è costituita dalla coppia di funzioni

$$R(\omega) = |G(i\omega)| = \mu \frac{\prod_{j=1}^{n_z} |1 + i\omega\tau_j|}{|i\omega|^h \prod_{j=1}^{n_p} |1 + i\omega T_j|} = \mu \frac{\prod_{j=1}^{n_z} \sqrt{1 + \omega^2 \tau_j^2}}{\omega^h \prod_{j=1}^{n_p} \sqrt{1 + \omega^2 T_j^2}}$$

$$\varphi(\omega) = \arg G(i\omega) = \arg \mu - h \frac{\pi}{2} + \sum_{j=1}^{n_z} \arg(1 + i\omega\tau_j) - \sum_{j=1}^{n_p} \arg(1 + i\omega T_j) \quad (43)$$

per  $0 < \omega < \infty$  (si noti che  $\arg \mu = 0$  [ $\pi$ ] qualora  $\mu > 0$  [ $\mu < 0$ ]). Il *diagramma di Bode del modulo*, cioè il diagramma della funzione  $R(\omega) = |G(i\omega)|$ , consiste nella rappresentazione di tale funzione in un diagramma cartesiano in cui l'asse delle ascisse è *logaritmico*. Detto in altri termini, ciò significa che tale asse è lineare nella variabile  $v = \log_{10} \omega$ . Questo implica che a ogni incremento [decremento] di  $v$  di un'unità corrisponde un incremento [decremento] di  $\omega$  di un fattore pari a 10. Un tale intervallo di pulsazioni (ad esempio, l'intervallo  $0.01 \leq \omega \leq 0.1$ , oppure  $10 \leq \omega \leq 100$ ) viene detto *decade*.

Sull'asse delle ordinate è riportato  $R(\omega)$  misurato in *decibel* (dB). Ricordiamo che, data una variabile  $Q > 0$ , la sua misura in dB è definita come segue

$$Q_{dB} = 20 \log_{10} Q$$

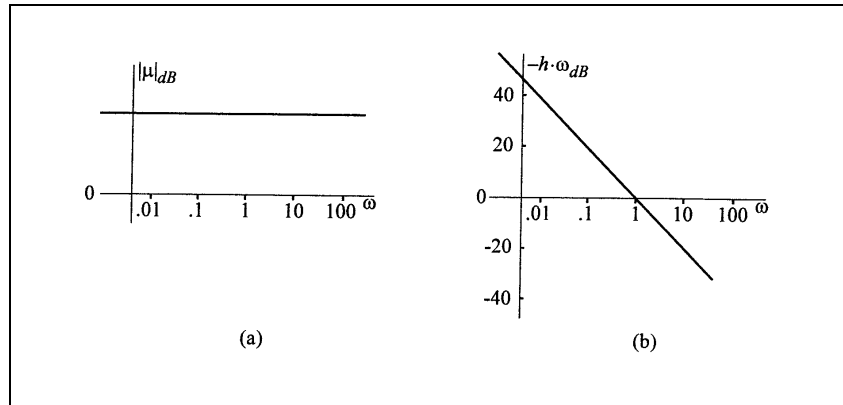
A una moltiplicazione [divisione] di  $Q$  per un fattore 10 corrisponde pertanto un aumento [diminuzione] di  $Q_{dB}$  di 20 dB, come confermato dalla seguente tabella di corrispondenza:

$Q$	...	0.01	0.1	1	10	100	...
$Q_{dB}$	...	-40	-20	0	20	40	...

A causa di questa scelta, il tracciamento del diagramma di  $R(\omega)$  è particolarmente agevole. Infatti, in primo luogo si ha

$$\begin{aligned} R(\omega)_{dB} &= 20 \log_{10} |\mu| - h 20 \log_{10} \omega + \sum_{j=1}^{n_z} 20 \log_{10} \sqrt{1 + \omega^2 \tau_j^2} - \sum_{j=1}^{n_p} 20 \log_{10} \sqrt{1 + \omega^2 T_j^2} \\ &= |\mu|_{dB} - h \cdot \omega_{dB} + \sum_{j=1}^{n_z} |1 + i\omega\tau_j|_{dB} - \sum_{j=1}^{n_p} |1 + i\omega T_j|_{dB} \end{aligned}$$

Ciò significa che il diagramma di  $R(\omega)_{dB}$  è ottenibile sommando i diagrammi elementari relativi a ciascun addendo di quest'ultima relazione. Per i primi due addendi tale diagramma elementare è estremamente semplice (*Fig. 40*). Il diagramma di  $|\mu|_{dB}$  non è altro che una retta orizzontale di ordinata pari al valore  $|\mu|_{dB}$ , mentre il termine  $-h \cdot \omega_{dB} = -h 20 \log_{10} \omega$  corrisponde (si ricordi che l'asse delle ascisse è lineare in  $v = \log_{10} \omega$ ) a una retta di pendenza  $-h 20$  dB/decade, che interseca l'asse delle ascisse (0 dB) nel punto  $\omega = 1$ . Tale retta ha pendenza negativa [positiva] nel caso la funzione di trasferimento  $G(s)$  abbia poli [zeri] nulli ( $h > 0$ ) [( $h < 0$ )].



**Figura 40** Diagramma di Bode delle funzioni: (a)  $|\mu|_{dB}$  e (b)  $-h \cdot \omega_{dB}$  nel caso  $h = 1$ .

Consideriamo ora i termini relativi agli zeri (non nulli) del sistema, cioè i termini del tipo

$$|1 + i\omega\tau_j|_{dB} = 20\log_{10} \sqrt{1 + \omega^2\tau_j^2}$$

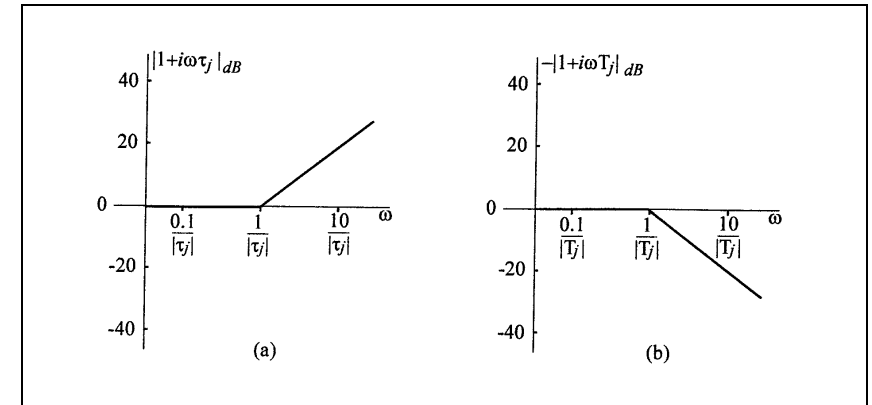
Notiamo dapprima che, per  $\omega^2\tau_j^2 \ll 1$ , cioè per  $\omega \ll 1/|\tau_j|$ , risulta

$$20\log_{10} \sqrt{1 + \omega^2\tau_j^2} \cong 0$$

cosicché, alle *basse frequenze*, il diagramma praticamente coincide con l'asse delle ascisse (0 dB). Al contrario, per  $\omega^2\tau_j^2 \gg 1$ , cioè per  $\omega \gg 1/|\tau_j|$ , risulta

$$20\log_{10} \sqrt{1 + \omega^2\tau_j^2} \cong 20\log_{10} \omega |\tau_j| = 20\log_{10} \omega + 20\log_{10} |\tau_j|$$

cioè, alle *alte frequenze*, il diagramma praticamente coincide con la retta di pendenza 20 dB/decade che interseca l'asse delle ascisse nel punto  $\omega = 1/|\tau_j|$ . L'*approssimazione* che caratterizza i diagrammi di Bode consiste nell'estendere i due comportamenti alle basse e alte frequenze fin nell'intorno della frequenza  $\omega = 1/|\tau_j|$ . Il diagramma elementare relativo al termine  $|1 + i\omega\tau_j|_{dB}$  è pertanto costituito dalla linea spezzata riportata in Fig. 41(a).



**Figura 41** Diagramma di Bode delle funzioni: (a)  $|1 + i\omega\tau_j|_{dB}$  e (b)  $-|1 + i\omega T_j|_{dB}$ .

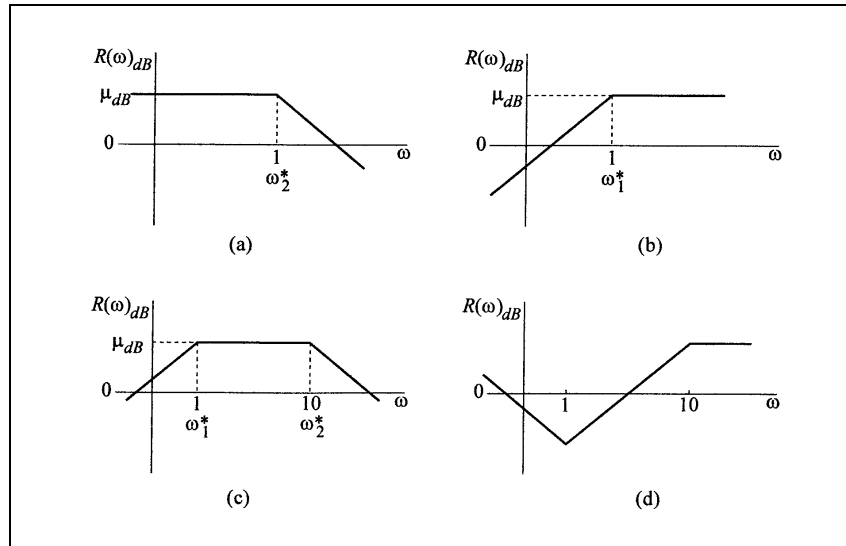
In sostanza, al diagramma elementare esatto di  $|1 + i\omega\tau_j|_{dB}$  si sostituisce quello approssimato di Fig. 41(a). Nel fare ciò si commette un errore che, come è facile verificare, è massimo per  $\omega = 1/|\tau_j|$ . A tale pulsazione il diagramma approssimato vale 0 dB, mentre quello esatto vale

$$20\log_{10} \sqrt{1 + \frac{1}{\tau_j^2}\tau_j^2} = 20\log_{10} \sqrt{2} \cong 3\text{dB}$$

Considerazioni del tutto analoghe valgono per i termini relativi ai poli (non nulli) del sistema, cioè per i termini

$$-|1 + i\omega T_j|_{dB} = -20\log_{10} \sqrt{1 + \omega^2 T_j^2}$$

Il diagramma elementare relativo a ciascuno di questi termini è riportato in Fig. 41(b). Esso è, a causa del segno meno, l'opposto del diagramma relativo a uno zero.



**Figura 42** Diagramma di Bode dei quattro sistemi di Fig. 35.

Nella Fig. 42 sono riportati i diagrammi di Bode dei quattro sistemi già considerati in Fig. 37. Il diagramma di Bode permette di determinare approssimativamente la *banda passante* del sistema. Infatti, alle frequenze  $\omega_1^*$  e  $\omega_2^*$  che delimitano l'intervallo di frequenze in cui il diagramma di Bode è massimo, l'errore tra diagramma esatto e diagramma di Bode è circa pari a 3 dB, per cui

$$R(\omega_1^*) \cong R(\omega_2^*) \cong \frac{R_{\max}}{\sqrt{2}}$$

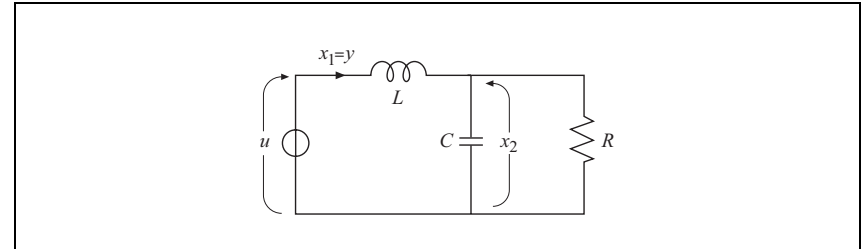
e questo implica, ricordando la definizione di banda  $B = [\omega_1, \omega_2]$ , che

$$\omega_1 \cong \omega_1^* \quad \omega_2 \cong \omega_2^*$$

Nel sistema di Fig. 42(a) (passa-basso) la banda passante è quindi l'intervallo  $0 < \omega \leq 1$ , nel caso di Fig. 42(b) (passa-alto) è l'intervallo  $1 \leq \omega < \infty$ , mentre nel caso di Fig. 42(c) (passa-banda) è l'intervallo  $1 \leq \omega \leq 10$ .

**Esempio 13 (rete elettrica)**

Si consideri la rete elettrica rappresentata in Fig. 43 e si supponga che i parametri  $R, L$  e  $C$  soddisfino la relazione  $4R^2C/L < 1$ .



**Fig. 43** Rete elettrica alimentata in tensione.

Indicando con  $x_1 (= y)$  la corrente nell'induttore e con  $x_2$  la tensione sul condensatore, le equazioni di stato e di uscita sono le seguenti

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \frac{1}{L}(u - x_2) \\ \dot{x}_2 &= \frac{1}{C}\left(x_1 - \frac{1}{R}x_2\right) \\ y &= x_1 \end{aligned}$$

Da queste si può ricavare la funzione di trasferimento del sistema, che risulta

$$G(s) = \mu \frac{1 + s\tau}{(1 + sT_1)(1 + sT_2)}$$

dove

$$\mu = \frac{1}{R} \quad \tau = RC \quad T_1 = \frac{L}{2R} \left( 1 + \sqrt{1 - 4\frac{R^2C}{L}} \right) \quad T_2 = \frac{L}{2R} \left( 1 - \sqrt{1 - 4\frac{R^2C}{L}} \right)$$

È facile constatare che  $T_1 > T_2$  e che, dall'ipotesi  $4R^2C/L < 1$ , discende che  $T_1 > \tau$ . Il diagramma di Bode della rete dovrà essere pertanto uno dei due di Fig. 44.

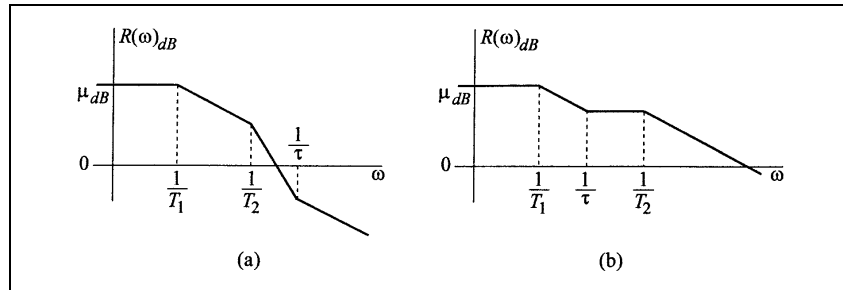


Fig. 44 Diagramma di Bode della rete elettrica di Fig. 43: (a)  $T_2 > \tau$ ; (b)  $T_2 < \tau$ .

In entrambi i casi, la rete elettrica è un sistema passa-basso con banda passante approssimativamente data da  $B = [0, 1/T_1]$ .



Consideriamo ora il caso di zeri e/o poli complessi, eventualità che, per rendere più chiara la trattazione, avevamo finora escluso. Come mostrato nel paragrafo precedente, una funzione di trasferimento che possieda una coppia di poli complessi coniugati può essere scritta nella forma

$$G(s) = \mu \frac{\prod(1 + s\tau_j)}{s^h \prod(1 + sT_j)} \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

Le radici del polinomio  $(s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2)$  sono effettivamente una coppia di poli complessi coniugati qualora  $|\xi| < 1$  e, in questa evenienza, sono stabili per  $\xi > 0$ .

Il diagramma di Bode di  $R(\omega)$  sarà costituito dalla somma di vari diagrammi elementari, dei quali non ci resta che analizzare quello relativo al termine

$$\frac{\omega_n^2}{(i\omega)^2 + 2\xi\omega_n i\omega + \omega_n^2}$$

il cui modulo vale

$$\left| \frac{\omega_n^2}{(i\omega)^2 + 2\xi\omega_n i\omega + \omega_n^2} \right| = \frac{\omega_n^2}{\sqrt{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + (2\xi\omega_n\omega)^2}} \quad (44)$$

È facile verificare (si veda anche il Paragrafo 34) che la (44) è circa pari a 1 (cioè a 0 dB) per  $\omega \ll \omega_n$ , mentre per  $\omega \gg \omega_n$  tende a  $\omega_n^2 / \omega^2$  che, espresso in deciBel, risulta

$$20 \log_{10} \frac{\omega_n^2}{\omega^2} = 2 \cdot 20 \log_{10} \omega_n - 2 \cdot 20 \log_{10} \omega$$

La (42) tende quindi, alle alte frequenze, ad allinearsi con la retta di pendenza  $-40$  dB/decade che interseca l'asse delle ascisse nel punto  $\omega = \omega_n$ . Anche in questo caso, i comportamenti alle basse e alte frequenze vengono estesi fino a  $\omega = \omega_n$ , dando origine al diagramma di Bode di Fig. 45(a). Si noti che tale diagramma coincide con quello relativo a una coppia di poli reali entrambi con  $|T_j| = 1/\omega_n$ . Il diagramma esatto della (44) nell'intorno di  $\omega = \omega_n$  può essere in realtà molto diverso da quello approssimato. Infatti, se i poli complessi hanno smorzamento  $\xi$  molto piccolo l'andamento esatto della (44) nell'intorno di  $\omega = \omega_n$  presenta una marcata risonanza e quindi si discosta decisamente dal corrispondente diagramma di Bode il quale, in questi casi, è pertanto da ritenersi puramente indicativo.

Nel caso la funzione di trasferimento presenti una coppia di zeri complessi coniugati, cioè contenga un termine del tipo

$$\frac{(i\omega)^2 + 2\xi\omega_n i\omega + \omega_n^2}{\omega_n^2}$$

il corrispondente diagramma di Bode è quello riportato in Fig. 45(b). Anche in questo caso il diagramma esatto della risposta in frequenza può discostarsi notevolmente da quello di Bode.

Il diagramma di Bode di  $R(\omega)$  è quindi costituito dalla somma di diagrammi elementari, ciascuno relativo a un termine della funzione di trasferimento. Il tracciamento del diagramma, pertanto, si può effettuare tracciando tutti i diagrammi elementari e poi sommandoli pulsazione per pulsazione. È tuttavia possibile (e decisamente conveniente) seguire un metodo diverso per il tracciamento, basato sull'osservazione che ogni diagramma elementare relativo a uno zero [polo] non nullo vale 0 dB per  $\omega \leq \omega_i$ , dove con  $\omega_i$  si è indicata la pulsazione caratteristica dello zero [polo] ( $1/|\tau|$  [ $1/T$ ] per uno zero [polo] reale e  $\omega_n$  per uno zero [polo] complesso) ed è invece diverso da zero per  $\omega > \omega_i$ . Pertanto, lo zero [polo] dà contributo nullo alla somma dei diagrammi elementari per ogni  $\omega \leq \omega_i$ . Viceversa, per  $\omega > \omega_i$  dà un contributo che, partendo da zero per  $\omega = \omega_i$ , cresce [decrece] di 20 dB/decade. Da queste osservazioni, oltre che da quanto visto per i diagrammi elementari di  $\mu$  e di  $1/s^h$ , discende la seguente procedura per il tracciamento del diagramma. Il lettore è invitato a verificarla ritracciando i quattro diagrammi di Fig. 42.

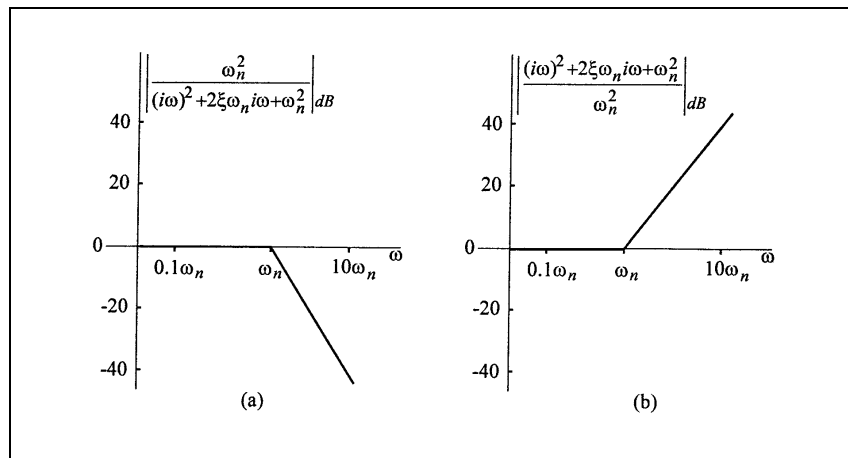


Figura 45 Diagramma di Bode nel caso di poli (a) e zeri (b) complessi coniugati.

#### Procedura per il tracciamento del diagramma di Bode di $R(\omega)$

1) Si ordinino in modo non decrescente le pulsazioni caratteristiche  $\omega_i$  relative a zeri e poli non nulli:

$$\omega_1 \leq \omega_2 \leq \dots \leq \omega_q$$

dove  $q = n_z + n_p$  (numero di zeri non nulli) + (numero di poli non nulli) (poli e/o zeri aventi la stessa pulsazione caratteristica devono quindi essere contati più volte).

2) Si tracci la retta di pendenza ( $-h$  20) dB/decade che vale  $|\mu|_{dB}$  per  $\omega = 1$  (tale retta è l'asse a 0 dB se  $|\mu| = 1$  e  $h = 0$ ). La semiretta relativa all'intervallo  $0 < \omega \leq \omega_1$  di tale retta costituisce la parte del diagramma di Bode alle "basse frequenze".

3) Partendo dalla pulsazione  $\omega_1$  si completi il tracciamento del diagramma per  $\omega$  crescente mantenendo la pendenza costante tra ogni pulsazione  $\omega_i$  e la successiva e aumentando [diminuendo] di 20 dB/decade la pendenza del diagramma alla pulsazione  $\omega_i$  se essa è relativa a uno zero [polo] (i contributi di poli e/o zeri doppi, tripli, ... devono quindi essere raddoppiati, triplicati, ...).

Come accennato all'inizio di questo paragrafo, non ci occupiamo del tracciamento del diagramma di Bode dell'argomento della risposta in frequenza, il quale è sicuramente di interesse minore. Il più delle volte, infatti, il calcolo di  $\varphi(\omega)$  è richiesto solo in corrispondenza di particolari valori della pulsazione e, essendo in tali casi richiesto un

calcolo preciso, non si impiegano diagrammi per loro natura approssimati ma si utilizza direttamente la (43).

È interessante notare che il diagramma elementare di  $R(\omega)$  relativo a un termine del tipo  $|1 + i\omega\tau_j|_{dB}$ , cioè relativo a uno zero reale non nullo, dipende solo dal modulo di  $\tau_j$  e non dal suo segno. In altre parole, fissato  $|\tau_j|$  il diagramma è lo stesso sia per  $\tau_j > 0$  (zero stabile) che per  $\tau_j < 0$  (zero instabile). Lo stesso vale per il diagramma elementare di ogni termine del tipo  $-|1 + i\omega T_j|_{dB}$ , cioè relativo a un polo non nullo, il quale, fissato  $|T_j|$ , è lo stesso sia per  $T_j > 0$  (polo stabile) che per  $T_j < 0$  (polo instabile). Anche il diagramma relativo a una coppia di poli complessi coniugati, cioè

$$\left| \frac{\omega_n^2}{(i\omega)^2 + 2\xi\omega_n i\omega + \omega_n^2} \right|$$

è lo stesso sia per  $\xi > 0$  (poli stabili) che per  $\xi < 0$  (poli instabili). Tutto ciò si può riassumere dicendo che il diagramma di Bode non dipende dal *segno* della parte reale degli zeri e dei poli della  $G(s)$ , ma solo dal valore assoluto di tale parte reale. Questo significa che, assegnato un diagramma di Bode, vi è un insieme di funzioni di trasferimento  $G(s)$  che ammettono tale diagramma come diagramma di Bode. Ad esempio, le funzioni di trasferimento

$$G(s) = \pm \mu \frac{1 \pm s\tau}{(1 \pm sT_1)(1 \pm sT_2)}$$

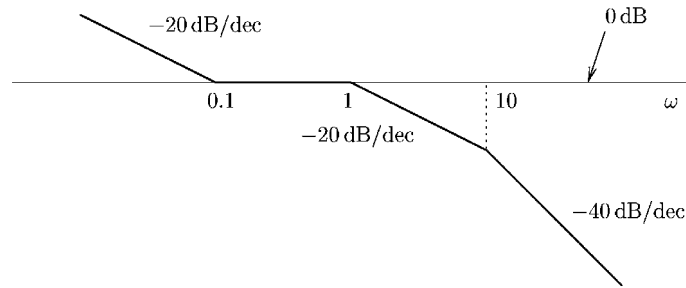
con  $\mu, \tau, T_1, T_2 > 0$ , hanno tutte lo stesso diagramma di Bode. Ma anche la funzione di trasferimento

$$G(s) = \mu \frac{1 + s\tau}{(1 + sT_1)(1 + sT_2)} \frac{1 - sT_3}{1 + sT_3}$$

ha lo stesso diagramma di Bode, perché il termine  $(1 - sT_3)/(1 + sT_3)$  (detto *sfasatore puro*) non modifica il modulo della funzione di trasferimento. Se ci limitiamo a considerare, all'interno di questo insieme di funzioni di trasferimento, solo quelle con poli stabili (è il caso di maggiore interesse nelle applicazioni), dalla (43) segue che ogni polo introduce un ritardo  $-\arg(1 + i\omega T_j)$  mentre ogni zero introduce un anticipo o un ritardo a seconda che sia stabile ( $\tau_j > 0$ ) o instabile ( $\tau_j < 0$ ). È da questa proprietà che discende l'appellativo di sistema a *sfasamento minimo* per i sistemi che hanno tutti gli zeri stabili, anche se è da notare che, seguendo l'orientamento più diffuso, nel *Paragrafo 24* tale appellativo è stato assegnato indipendentemente dalla stabilità o meno dei poli del sistema.

**Problema 64 (N, I)**

Un sistema lineare esternamente stabile e a sfasamento minimo ha il seguente diagramma di Bode approssimato



Si determini la funzione di trasferimento del sistema.

**Problema 65 (N, I)**

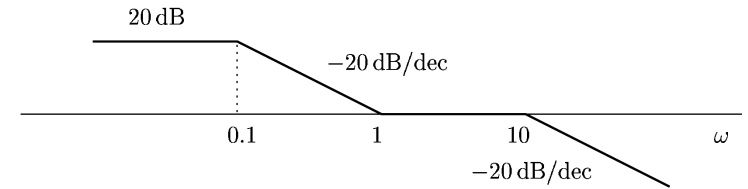
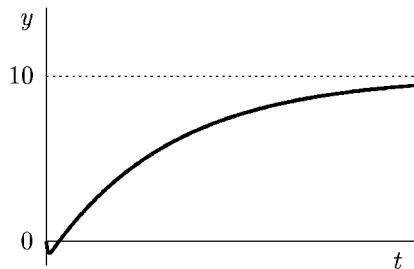
Si tracci il diagramma di Bode approssimato della funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{s^2 - 1}{(1 + 10s)(1 + 0,1s)^2}$$

Indi, si dica se il sistema ha una risonanza ed eventualmente si indichi il valore della pulsazione di risonanza.

**Problema 66 (N, II)**

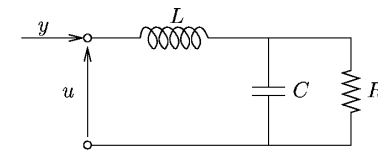
Di un sistema lineare a tempo continuo si conoscono la risposta allo scalino unitario e il diagramma di Bode approssimato (vedi figura)



Si determini la funzione di trasferimento del sistema.

**Problema 67 (A, II)**

Si determini la banda passante della rete elettrica riportata in figura, nell'ipotesi che i parametri  $R, L$  e  $C$  soddisfino la relazione  $4R^2 \frac{C}{L} < 1$



**39. Diagramma di Bode di aggregati**

Il diagramma di Bode di  $R(\cdot)$  relativo a un aggregato di due sistemi connessi in cascata, parallelo o retroazione è facilmente ottenibile dai diagrammi relativi ai due sottosistemi, come viene qui di seguito illustrato. Tuttavia, nel caso dei collegamenti in parallelo e retroazione ciò comporta un'ulteriore approssimazione (oltre a quella già vista di Bode) che deve essere valutata attentamente nelle singole circostanze.

**Cascata**

Il modulo della risposta in frequenza di due sistemi connessi in cascata vale

$$R(\omega) = |G(i\omega)| = |G_1(i\omega)G_2(i\omega)| = |G_1(i\omega)||G_2(i\omega)| = R_1(\omega)R_2(\omega)$$

Passando alla misura in deciBel, come richiesto dal diagramma di Bode, si ottiene

$$\begin{aligned} R(\omega)_{dB} &= 20 \log_{10}(R_1(\omega)R_2(\omega)) \\ &= 20 \log_{10} R_1(\omega) + 20 \log_{10} R_2(\omega) \\ &= R_1(\omega)_{dB} + R_2(\omega)_{dB} \end{aligned}$$



Il diagramma di Bode dell'aggregato è quindi facilmente ottenibile sommando i diagrammi di Bode dei due sistemi (Fig. 46).

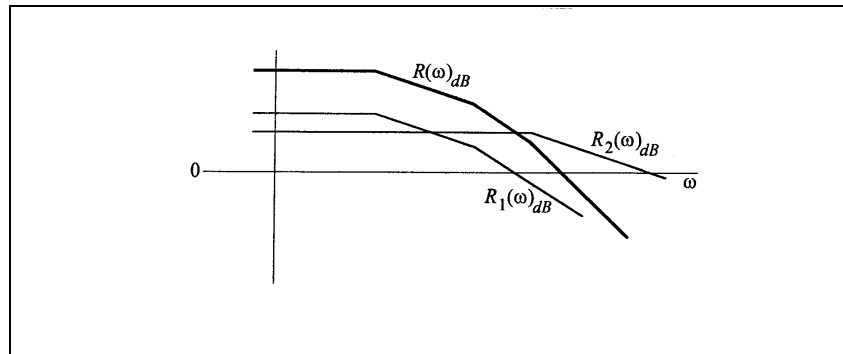


Figura 46 Diagramma di Bode di due sistemi in cascata.

### Parallelo

Il modulo della risposta in frequenza di due sistemi connessi in parallelo vale

$$R(\omega) = |G(i\omega)| = |G_1(i\omega) + G_2(i\omega)|$$

Notiamo che, in generale, dati due numeri complessi  $v$  e  $z$  risulta  $|v+z| \cong |v|$  se  $|v| \gg |z|$  e, in prima approssimazione, si può porre  $|v+z| \cong |v|$  se  $|v| \geq |z|$ . Ne consegue

$$\begin{aligned} R(\omega) &= |G_1(i\omega) + G_2(i\omega)| \\ &\cong \begin{cases} |G_1(i\omega)| & , |G_1(i\omega)| \geq |G_2(i\omega)| \\ |G_2(i\omega)| & , |G_1(i\omega)| \leq |G_2(i\omega)| \end{cases} \\ &= \max\{|G_1(i\omega)|, |G_2(i\omega)|\} \end{aligned}$$

Quindi, tenendo conto che  $R_1(\omega) = |G_1(i\omega)|$  e  $R_2(\omega) = |G_2(i\omega)|$ , si ottiene

$$R(\omega) \cong \max\{R_1(\omega), R_2(\omega)\}$$

Il diagramma di Bode dell'aggregato si ottiene pertanto prendendo, pulsazione per pulsazione, il massimo tra i due diagrammi di Bode (Fig. 47). Si noti che l'approssimazione introdotta può non essere buona per quelle pulsazioni per cui  $R_1(\omega)$  e  $R_2(\omega)$  sono poco differenziati.

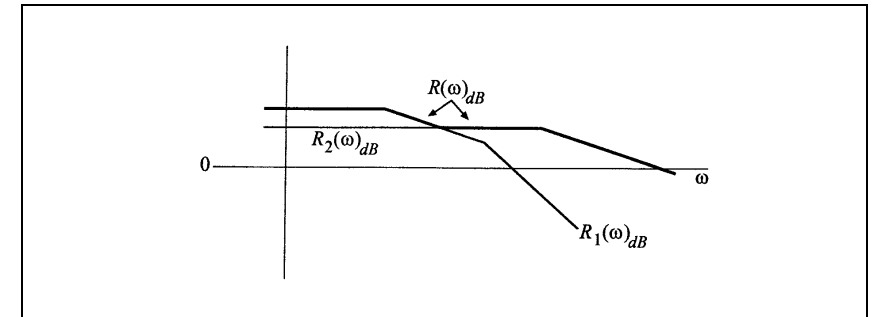


Figura 47 Diagramma di Bode di due sistemi in parallelo.

### Retroazione

Il modulo della risposta in frequenza di due sistemi connessi in retroazione (negativa) vale

$$R(\omega) = |G(i\omega)| = \frac{|G_1(i\omega)|}{|1 + G_1(i\omega)G_2(i\omega)|}$$

dove con  $G_1(\cdot)$  [ $G_2(\cdot)$ ] si è indicata la funzione di trasferimento del sistema in linea di andata [retroazione]. Procedendo in modo analogo a quanto fatto per il parallelo, si ottiene

$$R(\omega) = \frac{|G_1(i\omega)|}{|1 + G_1(i\omega)G_2(i\omega)|} \cong \begin{cases} |G_1(i\omega)| & \text{se } |G_1(i\omega)| \leq \frac{1}{|G_2(i\omega)|} \\ \frac{1}{|G_2(i\omega)|} & \text{se } |G_1(i\omega)| \geq \frac{1}{|G_2(i\omega)|} \end{cases}$$

che, tenendo conto che  $R_1(\omega) = |G_1(i\omega)|$  e  $R_2(\omega) = |G_2(i\omega)|$ , fornisce

$$R(\omega) \cong \min\left\{R_1(\omega), \frac{1}{R_2(\omega)}\right\}$$

Il diagramma di Bode dell'aggregato si ottiene pertanto prendendo, pulsazione per pulsazione, il minimo tra il diagramma di  $R_1(\omega)$  e quello di  $1/R_2(\omega)$ . Quest'ultimo, peraltro, è immediatamente ricavabile dal diagramma di  $R_2(\omega)$ . Infatti

$$(1/R_2(\omega))_{dB} = 20 \log_{10}(1/R_2(\omega)) = -20 \log_{10} R_2(\omega) = -R_2(\omega)_{dB}$$

cosicché il diagramma di Bode di  $1/R_2(\omega)$  è speculare rispetto all'asse delle ascisse (0 dB) a quello di  $R_2(\omega)$  (Fig. 48). Analogamente al caso della connessione in parallelo, è necessario tenere presente che l'approssimazione introdotta può non essere buona per quelle pulsazioni per cui  $R_1(\omega)$  e  $1/R_2(\omega)$  sono poco differenziati.

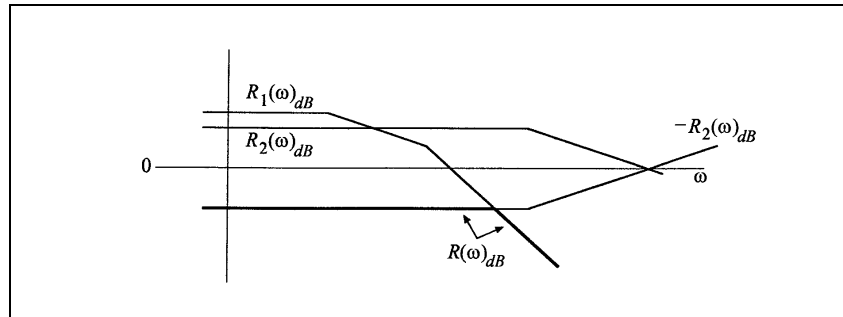


Figura 48 Diagramma di Bode di due sistemi in retroazione.

Un caso di particolare interesse nei sistemi di controllo è quello in cui  $G_2(s) = 1$  ("retroazione diretta"). In questo caso

$$R(\omega) \cong \min\{R_1(\omega), 1\}$$

Ricordando che 1 corrisponde a 0 dB, il diagramma di Bode dell'aggregato coincide pertanto in prima approssimazione con il diagramma di Bode del sistema in linea di andata quando questo diagramma è sotto l'asse delle ascisse (0 dB) e, altrimenti, con l'asse delle ascisse. La Fig. 49 mostra la costruzione di questo diagramma di Bode ed evidenzia che la pulsazione alla quale  $R_1(\omega)_{dB} = 0$  è l'estremo superiore della banda passante del sistema retroazionato.

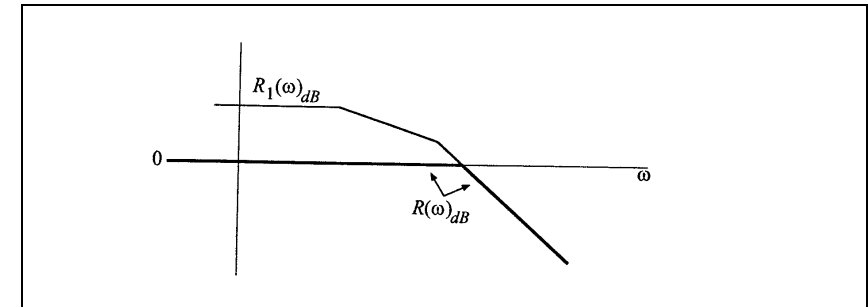


Figura 49 Diagramma di Bode di un sistema con funzione di trasferimento  $G(s)$  retroazionato direttamente.

#### 40. Esempio di applicazione: controllo della velocità di un carico rotante

Si consideri lo schema a blocchi di Fig. 50 in cui è rappresentato un sistema di controllo di velocità: un motore, alimentato da un amplificatore, tiene in rotazione un carico di momento d'inerzia  $J$  la cui velocità angolare  $v$  è misurata da una dinamo tachimetrica. La differenza tra la velocità angolare desiderata  $u$  e quella misurata  $\hat{v}$  costituisce l'ingresso dell'amplificatore.

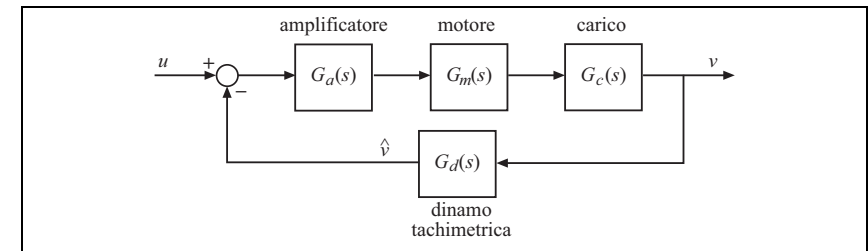


Figura 50 Sistema di controllo di un motore.

Supponendo che il motore e la dinamo tachimetrica possano essere ben descritti da una sola costante di tempo, che l'attrito viscoso sia trascurabile e che l'amplificatore sia caratterizzato da una dinamica estremamente rapida, le funzioni di trasferimento dei blocchi che compaiono nello schema di Fig. 50 sono

$$G_m(s) = \mu_m \frac{1}{1 + sT_m} \quad G_d(s) = \mu_d \frac{1}{1 + sT_d} \quad G_a(s) = \mu_a \quad G_c(s) = \frac{1}{Js}$$

per cui la funzione di trasferimento tra  $u$  e  $v$  è data da

$$G(s) = \frac{G_a(s)G_m(s)G_c(s)}{1 + G_a(s)G_m(s)G_c(s)G_d(s)} = \frac{\mu_a \mu_m (1 + sT_d)}{\mu_d \mu_a \mu_m + Js + J(T_d + T_m)s^2 + JT_d T_m s^3}$$

Il sistema è esternamente stabile se e solo se i poli di  $G(s)$  hanno parte reale negativa. Mediante il test di Hurwitz (vedi *Paragrafo 13*) si può verificare che ciò avviene se e solo se

$$\mu_a < \frac{J}{\mu_d \mu_m} \frac{T_d + T_m}{T_d T_m}$$

cioè se, a parità delle altre condizioni, il guadagno dell'amplificatore non è troppo elevato.

Per determinare la banda passante del sistema, tracciamo il diagramma di Bode di  $R(\omega) = |G(i\omega)|$ . In base a quanto visto, risulterà

$$R(\omega) \cong \min \left\{ R_1(\omega), \frac{1}{R_2(\omega)} \right\}$$

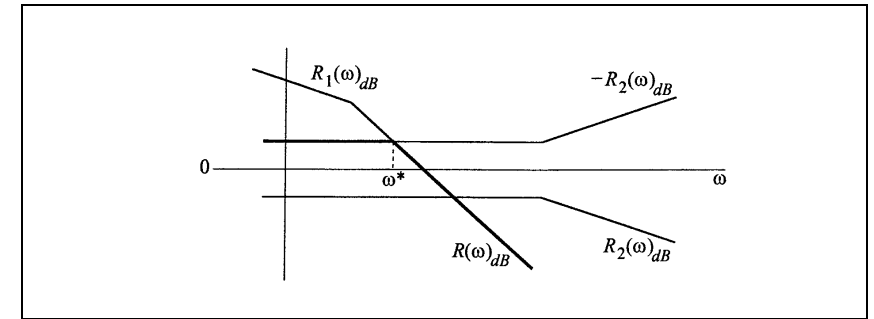
dove  $R_1(\omega)$  è relativo alla funzione di trasferimento  $G_1(s)$  sulla linea di andata

$$G_1(s) = G_a(s)G_m(s)G_c(s) = \frac{\mu_a \mu_m}{Js(1 + sT_m)}$$

mentre  $R_2(\omega)$  è relativo alla funzione di trasferimento  $G_2(s)$  sulla linea di retroazione

$$G_2(s) = G_d(s) = \frac{\mu_d}{1 + sT_d}$$

Una volta tracciati i diagrammi di Bode di  $R_1(\omega)$  e  $R_2(\omega)$  è quindi immediato ricavare quello di  $R(\omega)$ , come illustrato in *Fig. 51*.



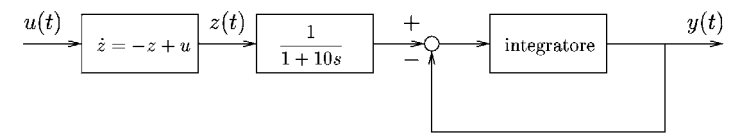
**Figura 51** Diagramma di Bode del sistema.

La banda passante del sistema è quindi data da  $B \cong [0, \omega^*]$ , dove  $\omega^*$  è la pulsazione che corrisponde all'intersezione del diagramma di  $R_1(\omega)$  con quello di  $1/R_2(\omega)$ . È evidente che, all'aumentare del guadagno  $\mu_a$  dell'amplificatore, il diagramma di  $R_1(\omega)$  trasla verso l'alto cosicché la banda passante del sistema si allarga. Pertanto, qualora interessi realizzare un sistema con ampia banda passante sarà necessario far ricorso a un elevato guadagno  $\mu_a$ . Ciò è tuttavia limitato dalla condizione di stabilità esterna del sistema, che afferma, al contrario, che il guadagno  $\mu_a$  deve essere sufficientemente contenuto. La scelta del valore ottimale sarà quindi il frutto di un compromesso.



**Problema 68 (N, II)**

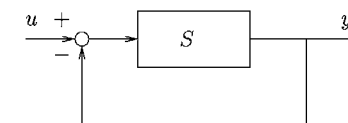
Si determini il diagramma di Bode approssimato del sistema rappresentato in figura



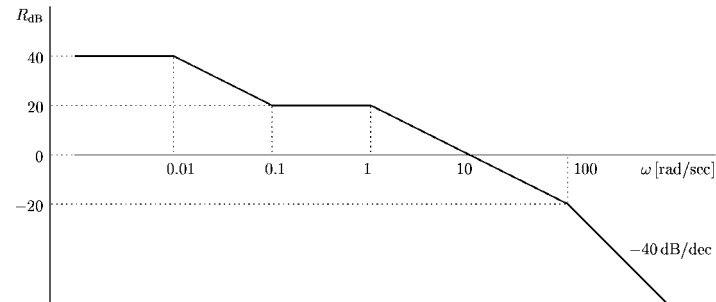
e si dica qual'è la banda passante del sistema.

**Problema 69 (N, II)**

Si consideri il sistema  $\Sigma$  di figura



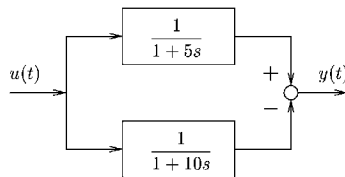
La risposta in frequenza del sistema  $S$  (che è esternamente stabile e a sfasamento minimo) è la seguente



Si determini la risposta allo scalino del sistema  $\Sigma$  (sono ammesse anche risposte approssimate e qualitative).

#### Problema 70 (N, I)

Si tracci il diagramma di Bode approssimato del seguente sistema e si dica se esso deve essere considerato un sistema passa - basso, passa - banda o passa - alto, indicandone la banda passante



#### 41. Diagrammi polari

Consideriamo un sistema con funzione di trasferimento

$$G(s) = \rho \frac{\prod_{j=1}^{n-r} (s - z_j)}{\prod_{j=1}^n (s - p_j)}$$

dove  $\rho$  è la costante di trasferimento,  $n$  è il numero di poli di  $G(s)$ ,  $r$  è l'eccesso di poli,  $z_j$  sono gli zeri del sistema e  $p_j$  sono i poli.

La risposta in frequenza di tale sistema è costituita dalla coppia di funzioni

$$R(\omega) = |G(i\omega)| = \left| \rho \frac{\prod_{j=1}^{n-r} |i\omega - z_j|}{\prod_{j=1}^n |i\omega - p_j|} \right| \quad (45)$$

$$\varphi(\omega) = \arg G(i\omega) = \arg \rho + \sum_{j=1}^{n-r} \arg(i\omega - z_j) - \sum_{j=1}^n \arg(i\omega - p_j) \quad (46)$$

per  $0 < \omega < \infty$  (si noti che  $\arg \rho = 0$  [ $\pi$ ] qualora  $\rho > 0$  [ $\rho < 0$ ]). Il *diagramma polare* della risposta in frequenza  $(R(\cdot), \varphi(\cdot))$  è, nel piano complesso, il luogo geometrico dei punti

$$R(\omega)e^{i\varphi(\omega)} = |G(i\omega)| e^{i\arg G(i\omega)} = G(i\omega)$$

al variare di  $\omega$  da  $0$  a  $+\infty$ . Il diagramma polare è quindi una linea punteggiata in  $\omega$  e orientata per  $\omega$  crescente. Il diagramma è continuo a meno che  $G(s)$  abbia poli immaginari  $p = \pm ib$ . In tal caso, infatti, dalle (45) e (46) risulta evidente che sia  $|G(i\omega)|$  che  $\arg G(i\omega)$  presentano una discontinuità per  $\omega = b$ . In corrispondenza di tale discontinuità,  $|G(i\omega)|$  tende a infinito mentre  $\arg G(i\omega)$  compie un "salto" pari a  $-k\pi$ , dove  $k$  è la molteplicità della coppia di poli immaginari. Il diagramma polare ha, pertanto, tante discontinuità quante sono le coppie (distinte) di poli immaginari della funzione di trasferimento.

In Fig. 52 sono riportati i diagrammi polari di quattro sistemi. Per il loro tracciamento qualitativo è possibile ricorrere a un insieme di semplici regole pratiche che, in questo testo, non vengono presentate. Per il tracciamento esatto è invece utile ricorrere a un programma di calcolo.

#### Problema 71 (N, II)

Si tracci il diagramma polare di uno sfasatore puro ( $G(s) = (1-sT)/(1+sT)$ ) e di un ritardatore puro ( $G(s) = e^{-s\tau}$ ).

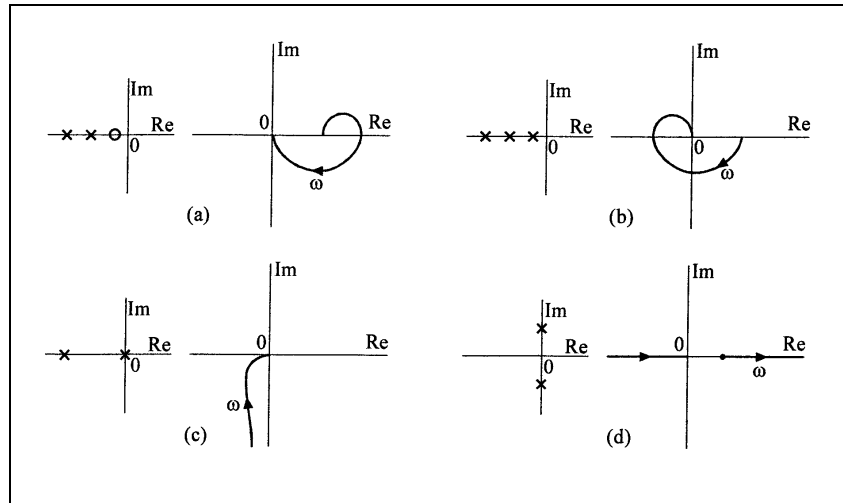


Figura 52 Quattro diagrammi polari (per ogni caso sono indicati, a sinistra, poli e zeri del sistema).

### 42. Il criterio di stabilità di Nyquist

Il *diagramma di Nyquist* di un sistema senza poli sull'asse immaginario è definito come il luogo geometrico (punteggiato e orientato in  $\omega$ ) dei punti  $G(i\omega)$  quando  $\omega$  varia da  $-\infty$  a  $+\infty$ , anziché da 0 a  $+\infty$ . Il diagramma di Nyquist può essere ricavato immediatamente dal diagramma polare, in quanto vale la proprietà

$$G(-i\omega) = \overline{G(i\omega)}$$

dove con  $\overline{G(i\omega)}$  si è indicato il complesso coniugato di  $G(i\omega)$ . Pertanto, la parte del diagramma di Nyquist relativa a  $-\infty < \omega < 0$  è speculare, rispetto all'asse reale, a quella relativa a  $0 < \omega < +\infty$ , cioè al diagramma polare. Considerando, per semplicità, il caso di sistemi propri ( $r \geq 1$ ) senza poli sull'asse immaginario, il diagramma di Nyquist risulta pertanto una linea chiusa. In Fig. 53, a titolo di esempio, sono riportati i diagrammi di Nyquist dei primi due sistemi di Fig. 52.

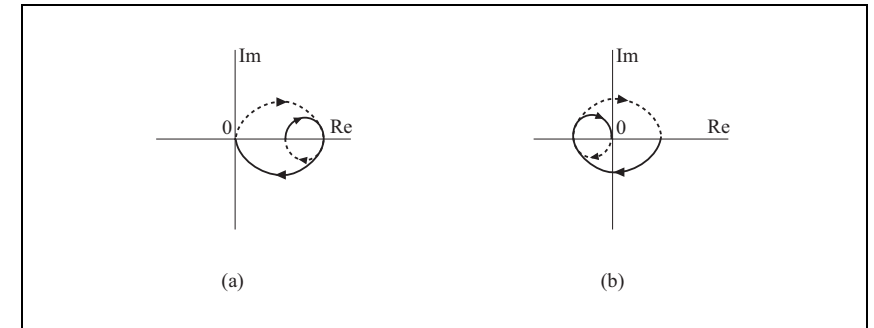


Figura 53 Diagrammi di Nyquist relativi ai casi (a) e (b) di Fig. 52.

Il diagramma di Nyquist è necessario per poter applicare il *criterio di Nyquist* per la verifica della stabilità esterna dell'aggregato di due sistemi  $G(s)$  e  $H(s)$  connessi in retroazione negativa come mostrato in Fig. 54.

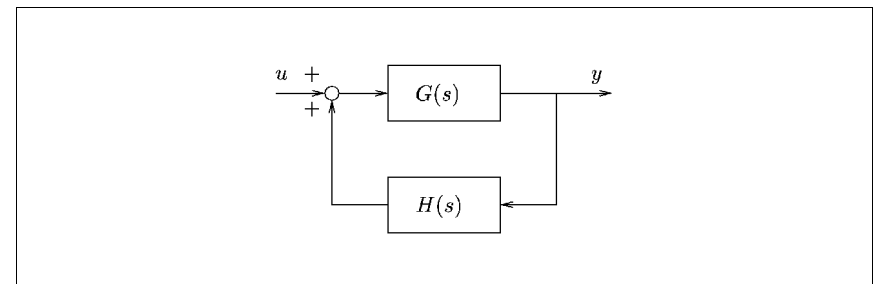


Figura 54 Sistema retroazionato negativamente.

Tale criterio afferma che l'aggregato è esternamente stabile se e solo se il diagramma di Nyquist della funzione di trasferimento d'anello  $G(s)H(s)$  non passa per il punto  $(-1 + i0)$  del piano complesso e il numero di giri che compie attorno a tale punto (contati positivamente in senso antiorario) coincide con il numero di poli di  $G(s)H(s)$  che hanno parte reale positiva. Il criterio di Nyquist, basato sulle proprietà delle funzioni complesse, è alla base della teoria della stabilità dei sistemi retroazionati.

### Problema 72 (T, I)

Si consideri il sistema retroazionato di Fig. 54 con

$$G(s)H(s) = \mu \frac{(1 - sT)^2}{(1 + sT)^2}$$

e si mostri, per mezzo del criterio di Nyquist, che il guadagno critico è  $\mu_{crit} = 1$ .

**Problema 73 (T, II)**

Si consideri il sistema retroazionato di Fig. 54 con

$$G(s)H(s) = \frac{\mu}{(1+sT)^3}$$

e si mostri, per mezzo del criterio di Nyquist, che il guadagno critico è  $\mu_{crit} = 8$ .

**Problema 74 (T, III)**

Si consideri il sistema retroazionato di Fig. 54 con

$$G(s)H(s) = \frac{\rho}{s} \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

e si mostri, per mezzo del criterio di Nyquist, che il sistema è esternamente stabile se  $\rho < \rho_{crit} = 2\xi\omega_n$ .

**Problema 75 (T, II)**

Si consideri il sistema di Fig. 54 con

$$G(s)H(s) = \rho \frac{s}{s^2 + 1}$$

e si mostri, per mezzo del criterio di Nyquist, che il sistema è esternamente stabile per tutti i valori di  $\rho > 0$ . Si risolva il problema anche per mezzo del criterio di Hurwitz e del metodo del luogo delle radici.

**Problemi applicativi**

Nelle pagine che seguono sono descritti quattro problemi a carattere professionale che possono essere impostati e risolti con le tecniche di analisi e controllo dei sistemi dinamici discusse in precedenza. Ogni problema è formulato verbalmente, in modo che lo studente possa cimentarsi nel non facile esercizio della modellizzazione. Per attenuare la difficoltà di questo esercizio sono tuttavia riportati alcuni suggerimenti che lo studente potrà utilmente seguire per pervenire più facilmente a un modello formale del problema. I dati sono funzione del nome e cognome dello studente. I problemi sono troppo complessi (dal punto di vista numerico) per essere risolti analiticamente. Per determinare le soluzioni è, quindi, necessario far uso di un PC sul quale programmare algoritmi adeguati al caso. Più efficacemente, si potranno anche utilizzare codici già disponibili sul mercato del software per l'analisi e il controllo dei sistemi dinamici.

**Gestione a minimo costo di due reti di calcolatori**

Cognome:	$[x]_n$ = modulo $n$ = resto della divisione di $x$ per $n$
Nome:	$C, N$ = numeri interi corrispondenti alle prime lettere del cognome e del nome nell'alfabeto inglese

**Problema**

Il sistema informatico dell'Assessorato alla Sanità della Regione Lombardia è costituito da due reti di calcolatori, le quali connettono il centro di elaborazione dati con uffici, laboratori, ospedali, ecc., sparsi su tutto il territorio regionale. In ogni istante, un sistema di controllo ripartisce automaticamente il carico di lavoro sulle reti funzionanti.

All'inizio di ogni settimana ciascuna delle due reti può essere *funzionante* oppure *guasta*. Quando una rete è guasta, intervengono immediatamente i tecnici della ditta che ha fornito il sistema informatico, i quali generalmente la ripristinano in tempi molto brevi addebitando all'Assessorato una spesa  $cr = 2.000.000 + 3.000.000 \cdot [N]_2$ .

L'Assessorato stima che il guasto ad una rete, a causa del rallentamento delle operazioni dovuto al sovraccarico dell'altra, le produca un danno stimabile in  $c1 = 15.000.000 + 20.000.000 \cdot [N]_2$ , mentre il guasto contemporaneo delle due reti, con il conseguente blocco totale di tutti i servizi informatizzati, produca un danno  $c2 = 45.000.000 + 25.000.000 \cdot [N]_2$ . A questi vanno ovviamente aggiunti i costi di riparazione (rispettivamente di una o due reti).

L'Assessorato ha la possibilità di far effettuare, con cadenza settimanale, un check-up del sistema informatico da parte dei tecnici della ditta che ha fornito il sistema, allo scopo di abbassare la probabilità che una rete si guasti. In effetti, le probabilità di transizione  $p_{ij}$  e  $q_{ij}$  di una rete da  $i$  a  $j$  ( $1$ =funzionante,  $2$ =guasto) sono:

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4/5 & 1/5 \\ 8/9 + 1/18 \cdot [C]_2 & 1/9 - 1/18 \cdot [C]_2 \end{bmatrix} \text{ senza check - up}$$

$$Q = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8/9 & 1/9 \\ 8/9 + 1/18 \cdot [C]_2 & 1/9 - 1/18 \cdot [C]_2 \end{bmatrix} \text{ con check - up}$$

Il costo del check-up di una rete è  $cc = 7.000.000 + 3.000.000 \cdot [N]_2$ . L'Assessorato, volendo rendere minimo il costo atteso di gestione a regime del sistema informatico, deve decidere se far effettuare oppure no il check-up settimanale *su una rete*.

*Svolgimento*

a) I miei dati sono:

$$[C]_2 = \quad [N]_2 =$$

$$cr = \quad c1 = \quad c2 = \quad cc =$$

$$P = \begin{bmatrix} & \\ & \end{bmatrix} \quad Q = \begin{bmatrix} & \\ & \end{bmatrix}$$

b) Le possibili configurazioni di funzionamento del sistema vengono numerate così ( $f$  = funzionante,  $g$  = guasto): **1** (rete A:  $f$ , rete B:  $f$ ), **2** (A:  $f$ , B:  $g$ ), **3** (A:  $g$ , B:  $f$ ), **4** (A:  $g$ , B:  $g$ ).

Indico con  $x_i(t)$  la probabilità di essere nella configurazione  $i$  all'inizio della settimana  $t$ . Poiché per ogni  $t$  deve essere  $\sum_i x_i(t) = 1$ , considero solo le prime tre  $x_i$  come variabili di stato (dato che  $x_4(t) = 1 - x_1(t) - x_2(t) - x_3(t)$ ).

c) Scrivendo le equazioni che governano  $x_i(t)$ ,  $i=1,2,3$  ed indicando con  $y(t)$  il costo atteso di gestione all'istante  $t$ , si ottiene, per ogni politica di check-up, un sistema dinamico del tipo

$$x(t+1) = Ax(t) + bu(t)$$

$$y(t) = c^T x(t) + du(t)$$

Nel mio caso, le matrici che descrivono il sistema risultano:

senza *check-up*:

$$A = \begin{bmatrix} & \\ & \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} \\ \end{bmatrix}$$

$$c^T = \begin{bmatrix} & \end{bmatrix} \quad d = \begin{bmatrix} \\ \end{bmatrix}$$

con *check-up di 1 rete*:

$$A = \begin{bmatrix} & \\ & \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} \\ \end{bmatrix}$$

$$c^T = \begin{bmatrix} & \end{bmatrix} \quad d = \begin{bmatrix} \\ \end{bmatrix}$$

e  $u(t) =$

d) Dando come scontato che, per ogni politica di check-up, al passare dei giorni le probabilità  $x_i(t)$  si assestino su valori costanti  $\bar{x}_i$ , posso determinare il costo atteso di gestione a regime  $\bar{y}$  calcolando (precisare in non più di una riga).....

e) Per mezzo del package.....ho quindi calcolato il costo atteso di gestione a regime che è risultato  $\bar{y} =$ .....senza check-up

$\bar{y} =$ .....con check-up di 1 rete

**Controllo attivo delle oscillazioni di un grattacielo**

Cognome:	$[x]_n =$ modulo $n =$ resto della divisione di $x$ per $n$
Nome:	$C, N =$ numeri interi corrispondenti alle prime lettere del cognome e del nome nell'alfabeto inglese

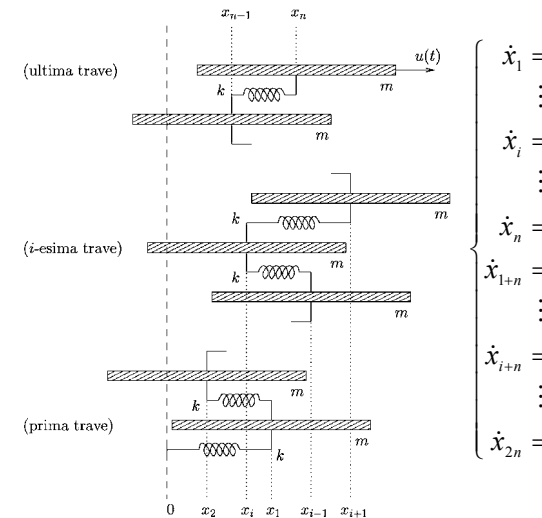
*Problema*

La sezione Ricerca e Sviluppo dell'industria elettromeccanica in cui lavori deve effettuare uno studio di fattibilità sul controllo attivo delle oscillazioni dei palazzi (innescate da intense raffiche di vento o scosse telluriche) che, com'è noto, possono essere notevoli e fastidiose. Si tratta di installare sul tetto del palazzo un reattore capace di esercitare una forza di direzione e intensità variabile e di mettere a punto una regola di conduzione del reattore capace di ridurre la durata delle oscillazioni. Tale regola di conduzione deve essere basata su misure effettuate in tempo reale sulla struttura. Per questo potrebbero esserci delle difficoltà poiché è possibile misurare solo la posizione dell'ultimo piano della struttura e trasmetterla istantaneamente a una centrale di elaborazione.

Il responsabile della sezione ti ha chiesto di studiare il problema dal punto di vista teorico-concettuale. Egli vuole sapere, in particolare, se è possibile dimezzare la durata delle oscillazioni del palazzo controllando il reattore. Le caratteristiche geometriche e meccaniche della struttura sono dettagliati più avanti.

*Suggerimenti*

Si modellizzi il palazzo in termini di sistema dinamico lineare schematizzando l'edificio con  $n$  travi orizzontali (una per ogni piano) di massa  $m$  collegate tra loro (a causa dei pilastri). Si consideri (vedi figura) come ingresso la forza  $u(t)$  esercitata dal reattore. Si indichi con  $x_i(t)$  lo spostamento laterale dell' $i$ -esima trave rispetto alla condizione di riposo e con  $\dot{x}_{i+1}(t)$  la velocità dell' $i$ -esima trave. Indicando con  $h$  il coefficiente di attrito viscoso, si scriva la legge di Newton per ogni trave, tenendo conto che i pilastri esercitano sulle travi delle forze che tendono a riportare l'edificio in posizione verticale e che tali forze sono proporzionali, secondo un coefficiente di elasticità  $k$ , agli scostamenti relativi tra le travi.



*Svolgimento*

Le caratteristiche geometriche e meccaniche dell'edificio sono:

$$\begin{aligned} n &= 4 + [C]_2 & m &= 0.5 + [N]_2 \\ k &= 0.6 + [N]_2 & h &= 1 + [C]_2 \end{aligned}$$

A partire da questi dati e dalle equazioni di stato  $\dot{x}(t) = A x(t) + b u(t)$  si ricavano (numericamente) la matrice  $A$  e i vettori  $b$  e  $c^T$ .

$A =$		$b =$
$c^T =$		



**Domanda**

Asservendo opportunamente la spinta del reattore  $u(t)$  alla stima di tutte le variabili di stato, è possibile, mediante un regolatore asintotico lineare, dimezzare la durata delle oscillazioni del palazzo?

Risposta (sottolineare la risposta esatta) **SÌ** **NO**

Si giustifichi la risposta in non più di 5 righe.

.....

.....

.....

.....

.....

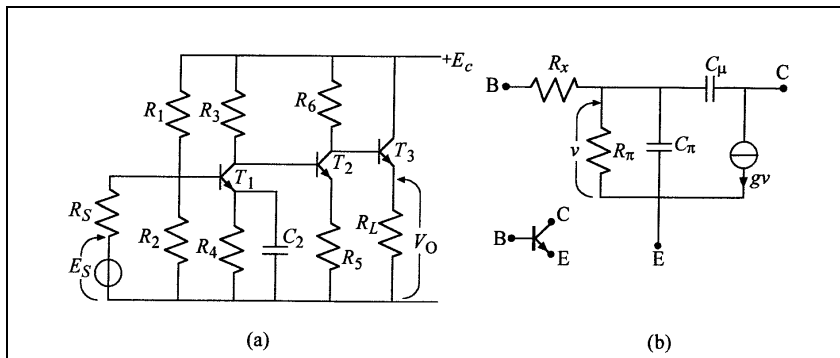
**Banda passante di un amplificatore**

Cognome:  $[x]_n =$  modulo  $n =$  resto della divisione di  $x$  per  $n$

Nome:  $C, N =$  numeri interi corrispondenti alle prime lettere del cognome e del nome nell'alfabeto inglese

**Problema**

Dell'amplificatore in tensione ( $E_s \rightarrow V_o$ ) rappresentato nella parte (a) della figura sono assegnati tutti i parametri  $R$  e  $C$ , mentre dei tre transistor bipolari  $T_1, T_2$  e  $T_3$  sono noti i parametri  $R_x, R_\pi, C_\pi, C_\mu$  e  $g$  del circuito equivalente mostrato nella parte (b) della figura. Si determini la banda passante dell'amplificatore.



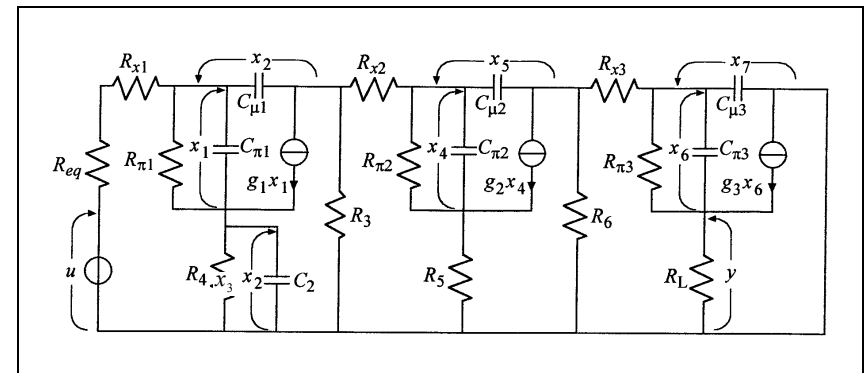
I dati sono i seguenti:

$R_1 = 18 + [C]_3 \text{ k}\Omega$	$R_2 = 15 + [N]_2 \text{ k}\Omega$	$R_3 = 1 + 0.1[N]_3 \text{ k}\Omega$	$R_4 = 1 \text{ k}\Omega$	$R_5 = 2 + 0.2[C]_2 \text{ k}\Omega$
$R_6 = 1 \text{ k}\Omega$	$R_L = 0.3 \text{ k}\Omega$	$R_s = 50 \Omega$	$C_2 = 10^{-4} \text{ F}$	
$T_1: R_{x1} = 50 \Omega$	$R_{\pi 1} = 532 \Omega$	$g_1 = 225.6 (\text{k}\Omega)^{-1}$	$C_{\pi 1} = 62 \text{ pF}$	$C_{\mu 1} = 10 \text{ pF}$
$T_2: R_{x2} = 50 \Omega$	$R_{\pi 2} = 694 \Omega$	$g_2 = 172.8 (\text{k}\Omega)^{-1}$	$C_{\pi 2} = 45 \text{ pF}$	$C_{\mu 2} = 10 \text{ pF}$
$T_3: R_{x3} = 50 \Omega$	$R_{\pi 3} = 93 \Omega$	$g_3 = 1290 (\text{k}\Omega)^{-1}$	$C_{\pi 3} = 400 \text{ pF}$	$C_{\mu 3} = 10 \text{ pF}$

**Suggerimenti**

Considerando variazioni piccole dei segnali di ingresso e uscita rispetto ai valori di equilibrio, si possono sostituire i transistor  $T_1, T_2$  e  $T_3$  con il loro circuito equivalente.

L'amplificatore risulta così descritto dal circuito equivalente mostrato nella figura seguente contenente sette condensatori.



In tale circuito l'ingresso  $u$  è dato da

$$u = \frac{R_B E_s}{R_B + R_s}$$

dove

$$R_B = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \quad R_{eq} = \frac{R_1 R_2 R_s}{R_1 R_2 + R_2 R_s + R_1 R_s}$$

Tale circuito è lineare e può essere descritto da una terna  $(\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{c}^T)$  o dalla corrispondente funzione di trasferimento. Calcolata la risposta in frequenza del sistema  $R_{dB}(\omega)$  si può così valutare la massima "amplificazione"  $R_{dB}^{\max}$  del circuito e, di conseguenza, determinare gli estremi  $\omega_1$  e  $\omega_2$  della banda passante che, per definizione, sono le pulsazioni alle quali  $R_{dB}(\omega)$  differisce da  $R_{dB}^{\max}$  di 3 dB.

*Svolgimento*

Il sistema è descritto dalla seguente terna (riportare i valori numerici)

$$\mathbf{A} = \begin{vmatrix} | & | & | & | \\ | & | & | & | \\ | & | & | & | \\ | & | & | & | \end{vmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{vmatrix} | \\ | \\ | \\ | \end{vmatrix}$$

$$\mathbf{c}^T = \begin{vmatrix} | \\ | \\ | \\ | \end{vmatrix}$$

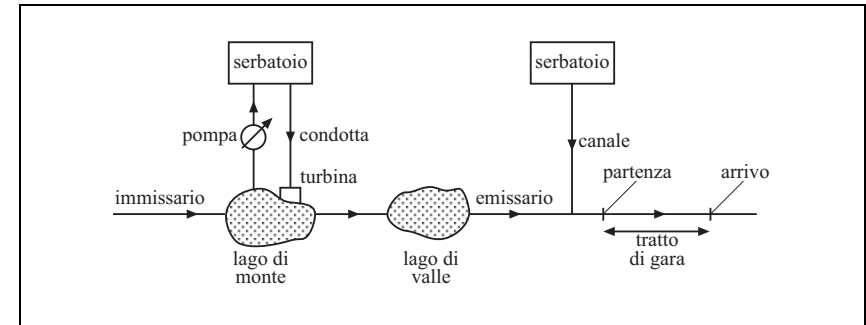
Il massimo della risposta in frequenza è dato da  $R_{dB}^{max} = \dots$  (per  $\omega = \dots$ ) e la banda passante  $[\omega_1, \omega_2]$  è caratterizzata da  $\omega_1 = \dots$  e  $\omega_2 = \dots$

**Organizzazione di una gara di canottaggio**

Cognome:	$[x]_n =$ modulo $n =$ resto della divisione di $x$ per $n$
Nome:	$C, N =$ numeri interi corrispondenti alle prime lettere del cognome e del nome nell'alfabeto inglese

*Problema*

Il CONI è responsabile dell'organizzazione di una gara internazionale di canottaggio che si terrà sull'emissario di un lago che è alimentato da un altro lago poco più a monte, come mostrato in figura. Affinché la gara sia valida è necessario garantire che la portata al punto di partenza rimanga costante durante tutta la durata della competizione, in modo che tutti i concorrenti, che partono a intervalli regolari, siano nelle stesse condizioni.



Il lago di valle ha superficie pari a 6 [km<sup>2</sup>] e coefficiente di deflusso 50 [m<sup>2</sup>/sec]. Sul lago di monte, che ha una superficie di 8 [km<sup>2</sup>] e un coefficiente di deflusso di 40 [m<sup>2</sup>/sec], è installata una stazione di pompaggio che di notte (tra le ore 20.00 e le ore 6.00) trasferisce acqua a portata costante, pari a 2 [m<sup>3</sup>/sec], dal lago a un piccolo serbatoio in quota. Tale volume d'acqua viene reimpresso nel lago, sempre a portata costante, attraverso una condotta forzata che alimenta una turbina, tra le ore 10.00 e le ore 13.00 e tra le ore 15.00 e le ore 18.00. Questa operazione, svolta sistematicamente ogni giorno, sfrutta la differenza di prezzo tra l'energia diurna e quella notturna.

Per compensare questo disturbo, il CONI ha ottenuto il permesso di usare a piacere durante la gara (che si svolge tra le ore 10.00 e le ore 18.00) l'acqua contenuta in un piccolo serbatoio a uso irriguo. Quest'acqua può essere immessa, mediante un canale, poco a monte del punto di partenza. È anche noto che la portata dell'immissario del lago di monte è praticamente costante durante tutta la stagione.

Il CONI si è rivolto alla società di ingegneria presso cui lavori perché gli venga fornita un'indicazione precisa su come deve essere fatta variare durante la gara la portata di compensazione nel canale.

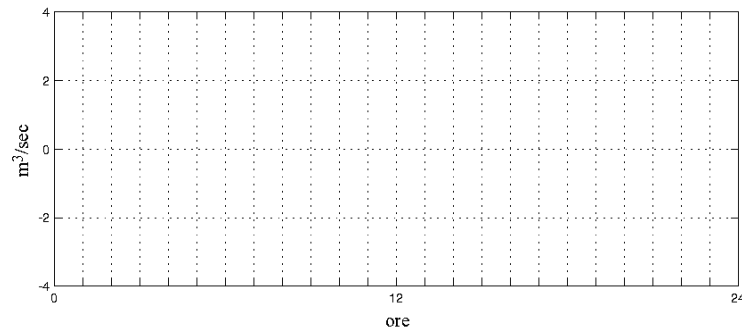
*Suggerimenti*

Si ricorda innanzitutto che il coefficiente di deflusso di un lago è il rapporto tra la portata dell'emissario [m<sup>3</sup>/sec] e il livello del lago [m] misurato rispetto al fondo dell'emissario. Per risolvere il problema si deve innanzitutto modellizzare la rete idrica come sistema lineare a tempo continuo e poi determinare la portata dell'emissario nel periodo di gara. Per far ciò si può usare un package di simulazione.

*Svolgimento*

A causa della stazione di pompaggio, la portata dell'emissario varia con periodo  $T = 1$  giorno. La variazione di questa portata rispetto al suo valor medio può essere calcolata determinando, per simulazione, il comportamento a regime del sistema costituito dai due

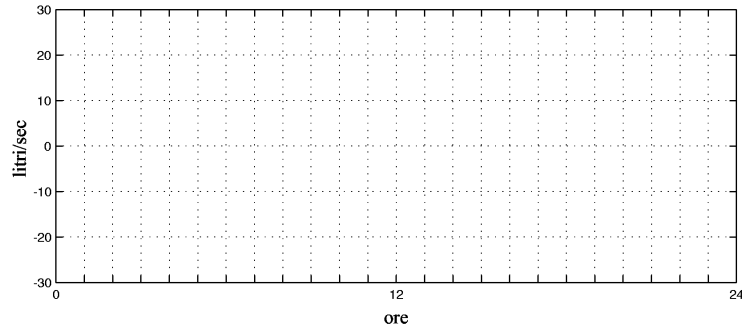
laghi in cascata con quello a monte alimentato da una portata variabile periodicamente come indicato in figura



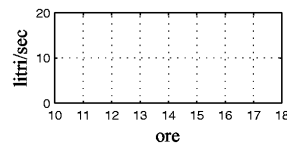
Tenuto conto dei dati, le costanti di tempo dei laghi sono

$T_1 = \dots\dots\dots$  [ore]       $T_2 = \dots\dots\dots$  [ore]

La variazione di portata dell'emissario (espressa in litri/sec) ottenuta per simulazione è la seguente



La portata dell'emissario potrà, quindi, essere resa costante durante il periodo di gara immettendo acqua per mezzo del canale secondo il seguente programma



**Appendice: trasformate di Fourier, di Laplace e Zeta**

**1. Trasformata di Fourier**

Prima di introdurre le nozioni di serie di Fourier e di trasformata di Fourier si ricordano alcune definizioni e risultati cui si farà riferimento in seguito.

**Definizione 1 (funzioni a variazione limitata)**

Una funzione a valori reali  $f(\cdot)$  si dice a *variazione limitata* nell'intervallo chiuso  $[a,b]$  se esiste una costante  $K$  tale che per ogni insieme finito di punti  $t_0, t_1, t_2, \dots, t_n$  che partizionino l'intervallo  $[a,b]$  ( $a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = b$ ) si abbia

$$\sum_{k=0}^{n-1} |f(t_{k+1}) - f(t_k)| \leq K$$

Se una funzione  $f(\cdot)$  definita su  $R$  è a variazione limitata in ogni intervallo chiuso si dice che tale funzione è a variazione limitata. Inoltre, una funzione  $f(\cdot)$  a valori complessi è detta a variazione limitata se la sua parte reale e la sua parte immaginaria sono a variazione limitata.

Le funzioni a variazione limitata godono di un certo numero di proprietà che vengono ora riportate senza dimostrazione.

**Teorema 1 (proprietà delle funzioni a variazione limitata)**

Una funzione a valori reali  $f(\cdot)$  è a variazione limitata nell'intervallo  $[a,b]$  se e solo se essa è la differenza di due funzioni non decrescenti. Una funzione  $f(\cdot)$  a variazione limitata nell'intervallo  $[a,b]$  è limitata nello stesso intervallo. Se una funzione  $f(\cdot)$  è a variazione limitata in un intervallo  $[a,b]$  i punti di discontinuità di questa funzione in tale intervallo sono per lo meno numerabili. Se una funzione  $f(\cdot)$  è a variazione limitata in un intervallo  $[a,b]$  allora per ogni  $t \in (a,b)$  esistono il limite sinistro e destro di tale funzione, cioè

$$f(t^-) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f(t - \varepsilon) \quad f(t^+) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f(t + \varepsilon) \quad \varepsilon > 0$$

Inoltre, per  $t = a$  esiste il limite destro e per  $t = b$  quello sinistro.

Ricordate queste proprietà si può ora riportare il primo importante risultato, quello della *serie di Fourier*. Da un punto di vista intuitivo, tale risultato afferma che, sotto ipotesi molto generali, una funzione periodica di periodo  $T$  può essere rappresentata come combinazione lineare di sinusoidi di pulsazione pari a multipli della pulsazione  $2\pi/T$ . Benché questo risultato sia fondamentale in analisi matematica, esso non è facilmente dimostrabile per cui viene qui riportato senza dimostrazione.

### Teorema 2 (serie di Fourier)

Se  $f(\cdot)$  è una funzione periodica di periodo  $T$  ed è a variazione limitata, allora per tutti i  $t$  si ha

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=-N}^N f_k e^{i \frac{2\pi k}{T} t} = \frac{1}{2} (f(t^+) + f(t^-)) \quad (1)$$

dove

$$f_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-i \frac{2\pi k}{T} t} dt \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (2)$$

Ovviamente, se la funzione  $f(\cdot)$  è continua nel punto  $t$  la (1) si semplifica e diventa

$$f(t) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=-N}^N f_k e^{i \frac{2\pi k}{T} t} \quad (3)$$

Ricordando, poi, che

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i \sin\theta$$

dalle (2) e (3) si può facilmente ottenere

$$f(t) = \frac{1}{2} a_0 + \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^N \left\{ a_k \cos\left(\frac{2\pi k}{T} t\right) + b_k \sin\left(\frac{2\pi k}{T} t\right) \right\} \quad (4)$$

dove

$$a_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos\left(\frac{2\pi k}{T} t\right) dt$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin\left(\frac{2\pi k}{T} t\right) dt$$

La (4) è l'espressione forse più nota della serie di Fourier perché mostra esplicitamente come la funzione  $f(\cdot)$  possa essere intesa come la combinazione lineare di sinusoidi e cosinusoidi. Si può inoltre dimostrare che se  $f(\cdot)$  è una funzione tale che

$$\int_{-T/2}^{T/2} |f(t)|^2 dt < \infty$$

vale la seguente relazione

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-T/2}^{T/2} \left| \sum_{k=-N}^N f_k e^{i \frac{2\pi k}{T} t} - f(t) \right|^2 dt = 0$$

dove i coefficienti  $f_k$  sono dati dalla (2).

Se si interpreta una funzione qualsiasi  $f(\cdot)$  come una funzione periodica di periodo infinito, si può capire dai risultati precedenti che per rappresentare tale funzione  $f(\cdot)$  come combinazione lineare di sinusoidi e cosinusoidi sia necessario far ricorso a un continuo di frequenze, poiché la pulsazione  $\omega = 2\pi/T$  tende a zero qualora  $T$  tenda all'infinito. È questa l'idea di base della cosiddetta trasformazione di Fourier che verrà ora precisata.

Sia  $f(\cdot)$  una funzione a variazione limitata su  $R$  e si supponga che tale funzione soddisfi la relazione

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty$$

Si indichi, poi, con  $f_T(\cdot)$  la funzione periodica di periodo  $T$  che coincide con  $f(\cdot)$  nell'intervallo  $[-T/2, T/2)$ . Per quanto detto in precedenza  $f_T(\cdot)$  ammette uno sviluppo in serie di Fourier del tipo

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=-N}^N \left[ \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f_T(t) e^{-i \frac{2\pi k}{T} t} dt \right] e^{i \frac{2\pi k}{T} t} = \frac{1}{2} (f_T(t^+) + f_T(t^-)) \quad (5)$$

Poiché, per definizione,  $f_T(\cdot)$  e  $f(\cdot)$  coincidono nell'intervallo  $[-T/2, T/2)$ , la relazione (5) può anche essere scritta con  $f(t)$  al posto di  $f_T(t)$  pur di limitare  $t$  ad appartenere all'intervallo  $[-T/2, T/2)$ . Posto, allora,

$$F_T(i\omega) = \int_{-T/2}^{T/2} f(t)e^{i\omega t} dt$$

dalla (1) e (2) per  $T \rightarrow \infty$  si ottiene

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(i\omega)e^{i\omega t} d\omega = \frac{1}{2} (f(t^+) + f(t^-)) \quad (6)$$

e

$$F(i\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt = \lim_{T \rightarrow \infty} F_T(i\omega)$$

La funzione  $F(\cdot)$  ora definita si chiama *trasformata di Fourier* o integrale di Fourier della funzione  $f(\cdot)$ .

## 2. Trasformata di Laplace

Si supponga che una funzione  $f(\cdot)$  sia a variazione limitata in ogni intervallo chiuso contenuto in  $[0, \infty)$  e che esista una costante  $\sigma < \infty$  tale che

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|e^{-\sigma t} dt < \infty$$

Si consideri, allora, la seguente funzione  $F(\cdot)$

$$F(\sigma + i\omega) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-i\omega t} e^{-\sigma t} dt \quad (7)$$

e si noti che

$$F(\sigma + i\omega) = \int_0^{\infty} e^{-i\omega t} (\text{sca}(t)e^{-\sigma t} f(t)) dt$$

cioè che tale funzione  $F(\cdot)$  è la trasformata di Fourier della funzione

$$(\text{sca}(t)e^{-\sigma t} f(t))$$

Pertanto, dalla (6) segue che

$$\frac{1}{2} f(0^+) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\sigma + i\omega) d\omega$$

e

$$\frac{1}{2} e^{-\sigma t} (f(t^+) + f(t^-)) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\sigma + i\omega) e^{-i\omega t} d\omega$$

per  $t > 0$ . Indicando con  $s$  la variabile complessa (cioè  $s = \sigma + i\omega$ ) la (7) diventa

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt \quad (8)$$

e la funzione  $F(\cdot)$ , spesso indicata con  $L[f(\cdot)]$ , si chiama *trasformata di Laplace* della funzione  $f(\cdot)$ . Tale funzione  $F(\cdot)$  è una funzione complessa definita nel dominio  $\text{Re}(s) > \sigma_0$ , dove  $\sigma_0$  è il più piccolo numero reale tale che  $\sigma < \sigma_0$  implichi

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|e^{-\sigma t} dt < \infty$$

La trasformazione di Laplace  $f(\cdot) \mapsto F(\cdot)$  definita dalla (8) gode di un certo numero di proprietà. Innanzitutto, tale trasformazione è lineare poiché

$$L[\alpha f_1(\cdot) + \beta f_2(\cdot)] = \alpha L[f_1(\cdot)] + \beta L[f_2(\cdot)]$$

Inoltre, la trasformata di Laplace  $F(\cdot)$  di una qualsiasi funzione  $f(\cdot)$  è una funzione analitica nel suo dominio di definizione  $\text{Re}(s) > \sigma_0$ . Questo significa che la funzione  $F(\cdot)$  può spesso essere estesa all'intero piano complesso, nel senso che esiste ed è unica una funzione coincidente con  $F(\cdot)$  per  $\text{Re}(s) > \sigma_0$  ma definita sull'intero piano complesso e ovunque analitica, a eccezione di un certo numero di punti isolati di singolarità. Ad esempio, se  $f(t) = e^t$ ,  $0 \leq t < \infty$  si ha

$$L[f(\cdot)] = \int_0^{\infty} e^t e^{-st} dt = \frac{1}{s-1} \quad \text{Re}(s) > 1$$

e la funzione  $1/(s-1)$  è ovunque analitica con l'eccezione del punto singolare  $s = 1$ .

Altre importanti proprietà della trasformata di Laplace sono quelle che mostrano come le operazioni di integrazione e di derivazione di una funzione  $f(\cdot)$  si trasformino in operazioni algebriche sulla trasformata  $L[f(\cdot)]$ . Valgono, infatti, le due seguenti relazioni

$$L\left[\int_0^t f(\tau) d\tau\right] = \frac{1}{s} L[f(\cdot)]$$

$$L\left[\frac{d}{dt} f(\cdot)\right] = sL[f(\cdot)] - f(0)$$

Infine, l'operazione di prodotto di due trasformate corrisponde, nel dominio del tempo, all'operazione detta di *convoluzione*: se  $F(\cdot)$  e  $G(\cdot)$  sono le trasformate di Laplace di due funzioni  $f(\cdot)$  e  $g(\cdot)$ , l'antitrasformata della funzione

$$H(\cdot) = F(\cdot)G(\cdot)$$

è data da

$$h(t) = \int_0^t f(t-\tau)g(\tau) d\tau \quad 0 \leq t < \infty$$

A titolo di esempio, vengono qui di seguito riportate alcune trasformate di Laplace  $F(s)$  di funzioni  $f(t)$ .

$f(t)$	imp(t)	sca(t)	ram(t)	$e^{at}$	sen $\omega t$	cos $\omega t$	$f(t-\tau)$	$t^n, n > 0$
$F(s)$	1	$\frac{1}{s}$	$\frac{1}{s^2}$	$\frac{1}{s-a}$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$	$e^{-\tau s} F(s)$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$

### 3. Trasformata Zeta

Si consideri una funzione  $f(\cdot)$  definita in corrispondenza dei numeri interi non negativi, cioè

$$f(\cdot) : t \mapsto f(t) \quad t = \text{intero non negativo}$$

La *trasformata Zeta* di tale funzione, indicata con

$$F(\cdot) = Z[f(\cdot)]$$

è semplicemente data dalla serie

$$F(\cdot) : z \mapsto F(z) = f(0) + f(1)z^{-1} + f(2)z^{-2} + \dots \quad (9)$$

Naturalmente, perché tale espressione abbia significato è necessario che la serie (9) converga in un intorno del punto improprio  $z^{-1} = 0$  (nel quale essa, ovviamente, con-

verge). Si supponga ora che  $f(t)$  non cresca, al crescere di  $t$ , più in fretta di una serie geometrica. Allora, si indichi con  $R_c$  il massimo limite di  $|f(t)|^{1/t}$  per  $t \rightarrow \infty$ , cioè

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} |f(t)|^{1/t} = R_c$$

È facile mostrare che la serie

$$F(z) = \sum_{t=0}^{\infty} f(t)z^{-t}$$

converge assolutamente per tutti gli  $z$  (complessi) che soddisfano la relazione

$$|z| > R_c$$

ed è per questo motivo che  $R_c$  è chiamato *raggio di convergenza*.

L'operazione di trasformazione  $f(\cdot) \mapsto F(\cdot)$  è ovviamente lineare poiché

$$Z[\alpha f_1(\cdot) + \beta f_2(\cdot)] = \alpha Z[f_1(\cdot)] + \beta Z[f_2(\cdot)]$$

Teoremi analoghi a quelli visti per le trasformate di Laplace valgono per le trasformate Zeta. Se si indica con  $f^-(\cdot)$  la funzione ottenuta da  $f(\cdot)$  per traslazione del tempo (ritardo), cioè

$$f^-(t) = \begin{cases} 0, & t = 1 \\ f(t-1), & t \geq 1 \end{cases}$$

vale, ovviamente, la seguente relazione

$$Z[f^-(\cdot)] = z^{-1}Z[f(\cdot)]$$

mentre se si indica con  $f^+(\cdot)$  la funzione ottenuta da  $f(\cdot)$  per traslazione del tempo in senso opposto (anticipo), cioè

$$f^+(t) = f(t+1) \quad , \quad t \geq 0$$

si ottiene

$$Z[f^+(\cdot)] = zZ[f(\cdot)] - zf(0)$$

Il modo più semplice per determinare le espressioni analitiche delle trasformate Zeta è quello di determinare la somma della serie (9). Così, ad esempio, se

$$f(t) = a^t \quad t \geq 0$$

si ha

$$F(z) = \sum_{t=0}^{\infty} a^t z^{-t} = \sum_{t=0}^{\infty} (az^{-1})^t = (1 - az^{-1})^{-1}$$

per  $|z| > |a|$  e la stessa formula vale anche se  $a$  è una matrice quadrata  $\mathbf{A}$  pur di sostituire ad 1 la matrice unità  $\mathbf{I}$ . Altre trasformate Zeta  $F(z)$  di funzioni  $f(t)$  sono riportate qui di seguito.

$f(t)$	$\text{imp}(t)$	$\text{sca}(t)$	$\text{ram}(t)$	$t^2$	$t^3$	$a^t$
$F(z)$	1	$\frac{z}{z-1}$	$\frac{z}{(z-1)^2}$	$\frac{z(z+1)}{(z-1)^3}$	$\frac{z(z^2+4z+1)}{(z-1)^4}$	$\frac{z}{z-a}$