SOLUZIONE PROBLEMA 58

La trasformata zeta della risposta all'impulso $g(t)$ è la funzione di trasferimento $G(z)$, cioè

$$G(z) = \sum_{t=0}^{\infty} \frac{g(t)}{z^t}$$

Riconoscendo dalla tabella che $g(t+2) = g(t+1) + g(t)$, si può scrivere

$$G(z) = \sum_{t=0}^{\infty} \frac{g(t)}{z^t} = g(0) + \frac{g(1)}{z} + \sum_{t=2}^{\infty} \frac{g(t)}{z^t} =$$

$$= \frac{1}{z} + \sum_{t=2}^{\infty} \frac{g(t-1)+g(t-2)}{z^t} = \frac{1}{z} + \sum_{t=2}^{\infty} \frac{g(t-1)}{z^t} + \sum_{t=2}^{\infty} \frac{g(t-2)}{z^t} =$$

$$= \frac{1}{z} + z^{-1} \sum_{t=2}^{\infty} \frac{g(t-1)}{z^{t-1}} + z^{-2} \sum_{t=2}^{\infty} \frac{g(t-2)}{z^{t-2}} =$$

$$= \frac{1}{z} + z^{-1} \sum_{t=0}^{\infty} \frac{g(t)}{z^t} + z^{-2} \sum_{t=0}^{\infty} \frac{g(t)}{z^t} = \frac{1}{z} + z^{-1} G(z) + z^{-2} G(z)$$

da cui si ottiene

$$G(z)\left(1 - z^{-1} - z^{-2}\right) = z^{-1}$$

cioè

$$G(z) = \frac{z}{z^2 - z - 1}$$

Questo risultato può essere utilmente confrontato con quanto affermato nel secondo paragrafo a pg. 7.
In particolare ci si può chiedere come mai i numeratori delle due funzioni di trasferimento non coincidano.

SOLUZIONE PROBLEMA 59

a) $G_a(s) = \dfrac{10}{1+10s}$

b) $900\, s^2 y_b + 100\, s\, y_b + y_b = \dfrac{16}{9}\, s\, u_b$

$$G_b = \frac{y_b}{u_b} = \frac{\frac{16}{9} s}{900 s^2 + 100 s + 1}$$

c) $G_c = \dfrac{1}{s}$

d) $s\, y_d = u_d \quad \Rightarrow \quad G_d = \dfrac{y_d}{u_d} = \dfrac{1}{s}$

Dalla formula di Mason segue allora

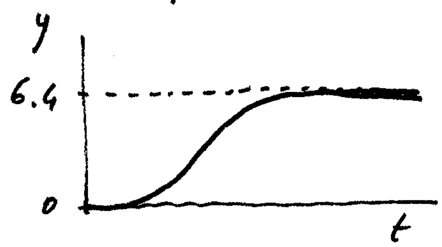
$$G = \frac{G_a G_b G_c}{1 + G_b G_d} = \frac{10}{1+10s}\, \frac{1}{s}\, \frac{G_b}{1 + G_b \frac{1}{s}} = \frac{10}{1+10s} \cdot \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{\frac{1}{G_b} + \frac{1}{s}} =$$

$$= \frac{10}{1+10s}\, \frac{1}{s}\, \frac{1}{\frac{900 s^2 + 100 s + 1}{\frac{16}{9} s} + \frac{1}{s}} = \frac{10}{1+10s}\, \cancel{\frac{1}{s}}\, \frac{\frac{16}{9} \cancel{s}}{900 s^2 + 100 s + 1 + \frac{16}{9}} =$$

$$= \frac{160}{9}\, \frac{1}{1+10s}\, \frac{1}{900 s^2 + 100 s + \frac{25}{9}} = \frac{160}{9}\, \frac{1}{1+10s}\, \frac{1}{\left(30 s + \frac{5}{3}\right)^2} =$$

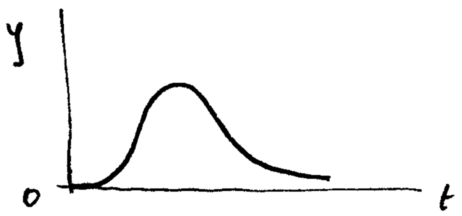
$$= \frac{160}{9} \left(\frac{3}{5}\right)^2 \frac{1}{1+10s}\, \frac{1}{(1+18s)^2} = \frac{6.4}{(1+10s)(1+18s)^2}$$

La risposta allo scalino è, quindi, la seguente



$\ddot{y}(0) = 0 \qquad \dddot{y}(0) > 0$

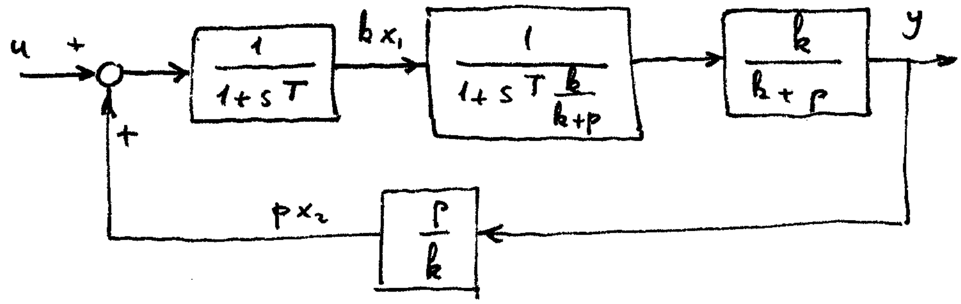
per cui la risposta all'impulso, che è la derivata di quella allo scalino, è



$\dot{y}(0) = 0 \qquad \ddot{y}(0) > 0$

SOLUZIONE PROBLEMA 60

Lo schema a blocchi è il seguente



$$T = \frac{1}{k}$$

per cui dalle formule di Mason segue che

$$G(s) = \frac{\frac{1}{1+sT}\,\frac{1}{1+sT\frac{k}{k+p}}\,\frac{k}{k+p}}{1-\frac{p}{k}\,\frac{k}{k+p}\,\frac{1}{1+sT}\,\frac{1}{1+sT\frac{k}{k+p}}} = \cdots = \frac{1}{1+sT\left(1+\frac{2p}{k}\right)+s^2T^2}$$

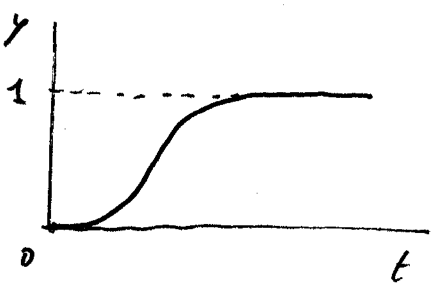
retroazione positiva

La funzione di trasferimento è, quindi, quella di due serbatoi in cascata con costanti di tempo T_1 e T_2

$$G(s) = \frac{1}{(1+sT_1)(1+sT_2)}$$

Poiché deve essere $T_1 T_2 = T^2$, segue che una delle due costanti di tempo (diciamo T_1) è più piccola di T e l'altra (diciamo T_2) è più grande di T.

La risposta allo scalino è, comunque, di questo tipo



con $\dot{y}(0)=0$ e $\ddot{y}(0) = \frac{1}{T_1T_2} = \frac{1}{T^2} = k^2 > 0$

(Teorema 19)

SOLUZIONE PROBLEMA 61

Il sistema (a) e il sistema (b) perchè la risposta allo scalino è l'integrale della risposta all'impulso e l'area sottesa dalle curve di figura (a) e (b) è crescente con t.

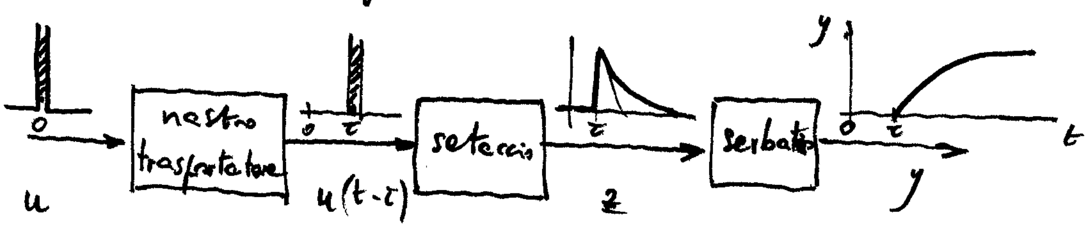
SOLUZIONE PROBLEMA 62

Il sistema è la cascata di tre sottosistemi. Il primo è un ritardatore puro con funzione di trasferimento $e^{-\tau s}$. Il secondo è un sistema del primo ordine con guadagno unitario (conservazione della massa) e con funzione di trasferimento $1/(1+sT)$ (ovviamente, $T = 1/k$). Il terzo sottosistema è un integratore $(1/s)$ perchè nel serbatoio si accumula tutta la sabbia che esce dal setaccio.

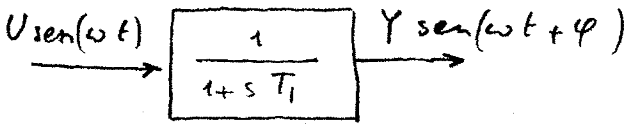
Pertanto,

$$G(s) = \frac{e^{-\tau s}}{s(1+sT)}$$

La risposta all'impulso si può ottenere antitrasformando (secondo Laplace) la funzione $G(s)$. Ma molto più semplicemente si può procedere con l'intuito nel modo seguente



SOLUZIONE PROBLEMA 63



con $T_1 = 2\,[g]$ e $\omega = \frac{2\pi}{1} = 2\pi \left[\frac{rad}{g}\right]$

$$Y = R(\omega)\, U = |G(i\omega)|\, U$$

per cui

$$\frac{Y}{U} = |G(i\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1+(\omega T_1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+(4\pi)^2}} \cong \frac{1}{4\pi}$$

Nel caso di due leghi in cascata abbiamo

$$\frac{Y}{U} = |G_1(i\omega)\, G_2(i\omega)| = |G_1(i\omega)| \cdot |G_2(i\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1+(4\pi)^2}\cdot\sqrt{1+(6\pi)^2}} \cong \frac{1}{24\cdot\pi^2}$$

SOLUZIONE PROBLEMA 64

$$G(s) = \frac{0.1\,(1+10s)}{s(1+s)(1+0.1\cdot s)}$$

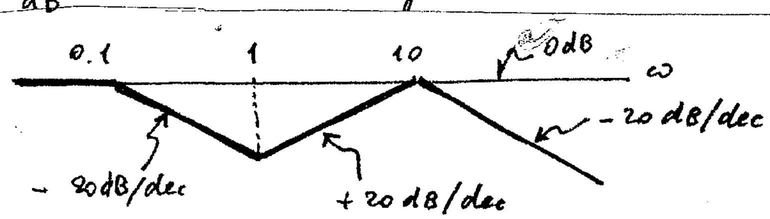
SOLUZIONE PROBLEMA 65

$$G(s) = \frac{-1\cdot(1+s)(1-s)}{(1+10s)(1+0.1s)^2}$$

← due zeri (di cui uno instabile)

← tre poli

Il guadagno è pari a -1 per cui alle basse frequenze $G_{dB} = 0$. Il diagramma di Bode approssimato è, quindi,



Il sistema ha un massimo di $|G|$ (cioè una risonanza) per $\omega = 10$.

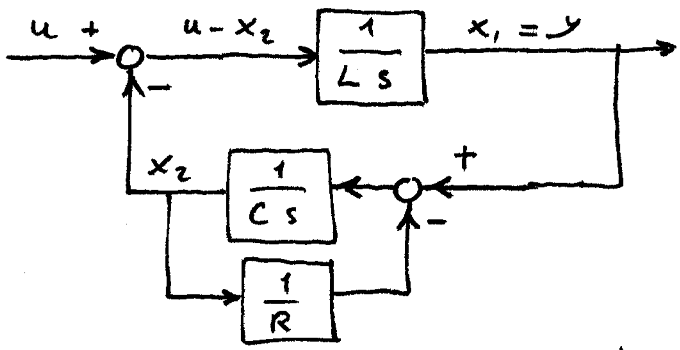
SOLUZIONE PROBLEMA 66

La risposta allo scalino ha $\dot{y}(0) \neq 0$; quindi, c'è un surplus di poli pari a 1. La risposta in frequenza (cioè il diagramma di Bode) evidenzia, infatti, due poli e uno zero. I due poli sono stabili perché la risposta allo scalino è limitata. Lo zero è, invece, instabile perché $\dot{y}(0) < 0$ e $y(\infty) > 0$ (tipica risposta dei sistemi a sfasamento non minimo). In conclusione,

$$G(s) = \frac{10(1-s)}{(1+0.1s)(1+10s)}$$

SOLUZIONE PROBLEMA 67

Lo schema a blocchi corrispondente al circuito è

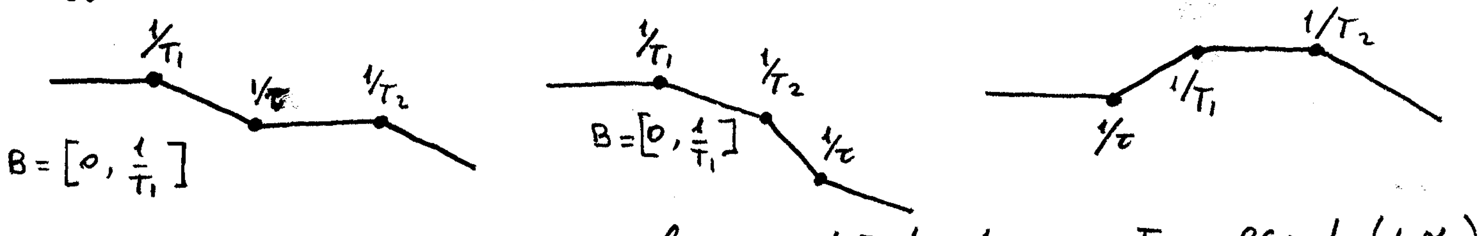


Lo schema contiene due anelli che si toccano e un cammino diretto

Per la formula di Mason si ha

$$G(s) = \frac{\frac{1}{Ls}\left(1+\frac{1}{RCs}\right)}{1+\frac{1}{LCs^2}+\frac{1}{RCs}} = \frac{1}{R}\,\frac{1+RCs}{1+\frac{L}{R}s+LCs^2} = \frac{1}{R}\,\frac{1+s\tau}{(1+sT_1)(1+sT_2)}$$

con $\tau = RC$, $T_{1,2} = \frac{L}{2R}\left(1 \mp \alpha^2\right)$ con $\alpha < 1$. Virtualmente si hanno tre casi possibili (supponiamo $T_1 > T_2$)



ma il terzo caso può essere escluso perché $\frac{1}{\tau} < \frac{1}{T_1} \Rightarrow \tau > T_1 \Rightarrow RC > \frac{L}{2R}(1+\alpha_2)$ che è in conflitto con l'ipotesi $4R^2C/L < 1$.

SOLUZIONE PROBLEMA 68

$$\dot{z} = -z + u \Rightarrow sz + z = u \Rightarrow (1+s)z = u \Rightarrow G_1(s) = \frac{1}{1+s}$$

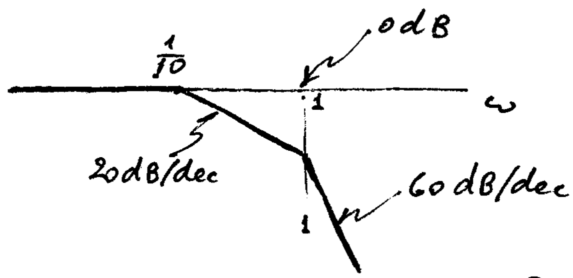
$$G_2(s) = \frac{1}{1+10s}$$

$$G_3(s) = \frac{\frac{1}{s}}{1+\frac{1}{s}} = \frac{1}{1+s}$$

$G = G_1 G_2 G_3$ (perché i tre sottosistemi sono in cascata)

Pertanto,

$$G = \frac{1}{(1+10s)(1+s)^2} \Rightarrow$$

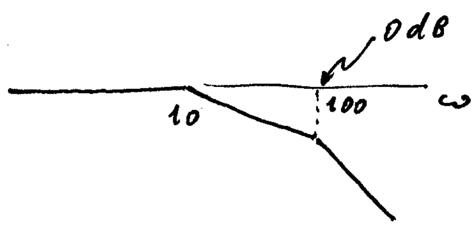


Il sistema è un passa basso e la sua banda è $B = \left[0, \frac{1}{10}\right]$

Si noti che l'estremo superiore della banda è l'inverso della costante di tempo dominante.

SOLUZIONE PROBLEMA 69

La risposta in frequenza del sistema in anello chiuso è ricavabile banalmente dalla risposta in frequenza del sistema in anello aperto ed è

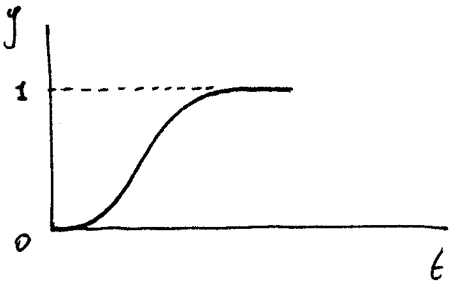


Quindi, il sistema ad anello chiuso ha funzione di trasferimento approssimabile con

$$G_{ac}(s) = \frac{1}{(1+0.1s)(1+0.01s)}$$

La risposta allo scalino del sistema ad anello chiuso

è, pertanto,



- $y \to 1$ perché il guadagno è unitario
- $\dot{y}(0) = 0$ e $\ddot{y}(0) > 1$ perché c'è un surplus di poli pari a 2
- non c'è sovraelongazione perché non ci sono zeri

In verità, la soluzione qui presentata è valida sotto l'ipotesi che il sistema ad anello chiuso sia stabile. Questa ipotesi andrebbe, quindi, verificata, cosa che si può fare sfruttando le ulteriori informazioni presenti nel testo. Tali informazioni permettono di dedurre che la funzione di trasferimento G_s del sistema ad anello aperto è

$$G_s = \frac{100\,(1+10\,s)}{(1+100s)(1+s)(1+0.01s)}$$

per cui la funzione di trasferimento esatta del sistema ad anello chiuso è

$$G(s) = \frac{G_s(s)}{1+G_s(s)} = \frac{\dfrac{100(1+10\,s)}{(1+100\,s)(1+s)(1+0.01s)}}{1+\dfrac{100(1+10s)}{(1+100\,s)(1+s)(1+0.01s)}} = \frac{100(1+10\,s)}{(1+100\,s)(1+s)(1+0.01s)+100(1+10s)}$$

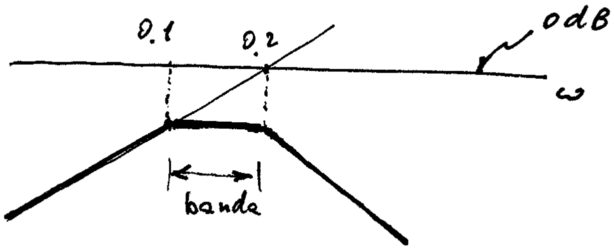
Si può allora sviluppare il denominatore di $G(s)$ e scriverlo nella forma

$$\alpha_0\left[s^3+\alpha_1 s^2+\alpha_2 s+\alpha_3\right]$$

e, quindi, applicare il metodo di Hurwitz per verificare la stabilità.

SOLUZIONE PROBLEMA 70

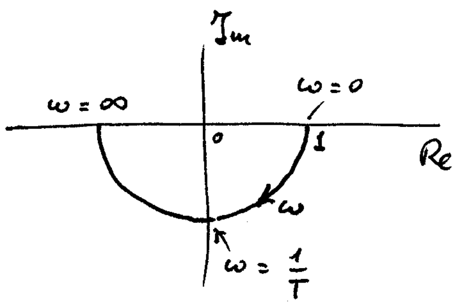
$$G(s) = \frac{1}{1+5s} - \frac{1}{1+10s} = \frac{1+10s-1-5s}{(1+5s)(1+10s)} = \frac{5s}{(1+5s)(1+10s)}$$

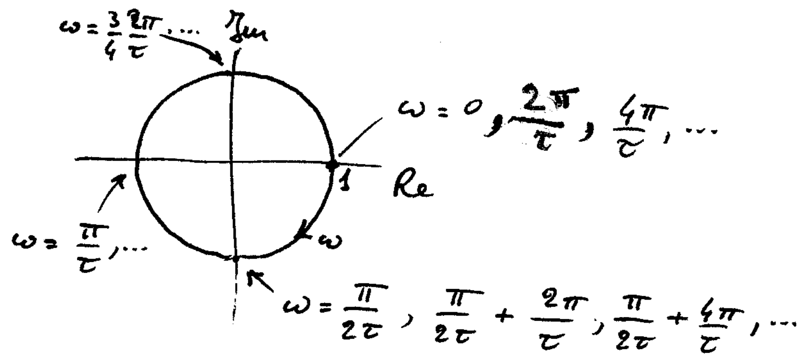


Il sistema è, quindi, un passa-banda

$B = [0.1,\ 0.2]$

SOLUZIONE PROBLEMA 71





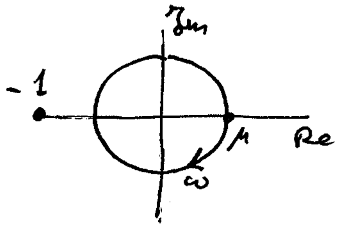
SOLUZIONE PROBLEMA 72

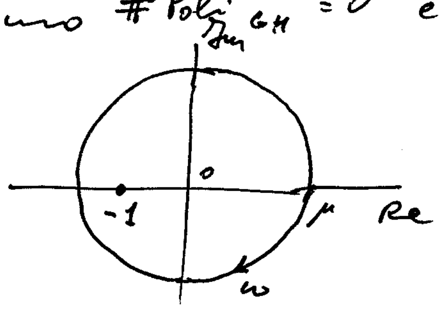
La condizione di stabilità è

$$\#\, Poli^{+}_{GH} = \#\, \overset{\curvearrowleft}{Giri}_{GH/-1}$$

cioè "numero poli positivi di GH" = "numero giri in senso antiorario di GH intorno al punto −1"

Nel caso in esame abbiamo $\#\, Poli^{+}_{GH} = 0$ e, quindi,





$\mu < 1$

$\#\, \overset{\curvearrowleft}{Giri}_{GH/-1} = 0$

stabilità

$\Rightarrow \mu_{crit} = 1 \Leftarrow$

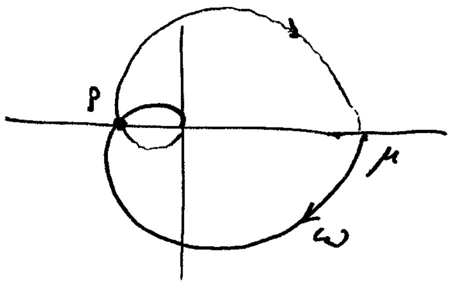
$\mu > 1$

$\#\, \overset{\curvearrowleft}{Giri}_{GH/-1} = -1$

instabilità

SOLUZIONE PROBLEMA 73

Si noti che $\# \text{Poli}^{+}_{GH} = 0$ per cui la condizione di stabilità è $\# \overleftarrow{\text{Giri}}_{GH/-1} = 0$. Nel caso specifico, il diagramma di Nyquist è



per cui si ha stabilità del sistema ad anello chiuso se e solo se il punto P è alla destra del punto -1.
La pulsazione ω che corrisponde al punto P deve essere tale che il vettore $(1+i\omega T)$ sia come in figura (perchè $60° \times 3 = 180°$)

Ciò implica che $|1+i\omega T| = 2$, per cui

$$|GH|_P = \frac{\mu}{2^3} = \frac{\mu}{8}$$

La condizione di stabilità è, allora, $\mu < \mu_{crit} = 8$.

Alla stessa conclusione si perviene (più in fretta) applicando il criterio di Hurwitz al denominatore della funzione di trasferimento del sistema ad anello chiuso

$$\frac{G}{1+GH} = \cdots = \frac{\cdots}{\mu(1+sT)^3+1}$$

Questa osservazione vale anche per il problema precedente.