SOLUZIONE PROBLEMA 16

$$x_1(t+1) = p_1\, x_1(t) + p_2\, x_2(t) + p_3\, x_3(t) + x_4(t)$$

$$x_2(t+1) = (1-p_1)\, x_1(t)$$

$$x_3(t+1) = (1-p_2)\, x_2(t)$$

$$x_4(t+1) = (1-p_3)\, x_3(t+1)$$

Il sistema è, pertanto, del tipo

$$x(t+1) = A\, x(t)$$

con

$$A = \begin{vmatrix} p_1 & p_2 & p_3 & 1 \\ 1-p_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-p_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (1-p_3) & 0 \end{vmatrix}$$

Poiché $\det A \neq 0$, il sistema è reversibile.

SOLUZIONE PROBLEMA 17

I sistemi mostrati in figura sono tutti semplicemente stabili, tranne il secondo sistema meccanico che è asintoticamente stabile (si pensi al movimento libero, cioè al movimento per $u \equiv 0$, che è limitato in tutti i casi ma tende a zero per tutti gli stati iniziali solo nel secondo esempio meccanico).

SOLUZIONE PROBLEMA 18

No, perché hanno lo stesso movimento libero dato che per $u \equiv 0$ i due schemi risultano coincidenti.

SOLUZIONE PROBLEMA 19

Poichè

$$x^{(t+1)} = (I - A)\, x^{(t)} + b$$

il metodo converge se e solo se gli autovalori della matrice $(I-A)$ sono minori di 1 in modulo.

SOLUZIONE PROBLEMA 20

Nel primo caso $\lambda_1 < 0 \quad \lambda_2 > 0$

Nel secondo caso $\lambda_1 < 0 \quad \lambda_2 < 0$

Nel terzo caso $\lambda_1 = a + ib \quad \lambda_2 = a - ib$

Poichè $\det A = \lambda_1 \lambda_2$ si ha

Nel primo caso $\det A < 0$

Nel secondo caso $\det A > 0$

Nel terzo caso $\det A = \lambda_1 \lambda_2 = a^2 + b^2 > 0$

SOLUZIONE PROBLEMA 21

Da un bilancio di masse segue che

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= u - k x_1 + p x_2 \\ \dot{x}_2 &= k x_1 - k x_2 - p x_2 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad A = \begin{vmatrix} -k & p \\ k & -k-p \end{vmatrix} \qquad b = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \end{vmatrix}$$

Gli autovalori di A sono le radici dell'equazione caratteristica

$$\det(\lambda I - A) = 0$$

$$\det \begin{vmatrix} \lambda + k & -p \\ -k & (\lambda + k + p) \end{vmatrix} = \lambda^2 + (2k + p)\lambda + k^2 = 0$$

Pertanto,

$$\lambda_{1,2} = -k - \frac{p}{2} \mp \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 + kp}$$

Gli autovalori sono reali e negativi (nodo stabile) e i corrispondenti autovettori sono dati da

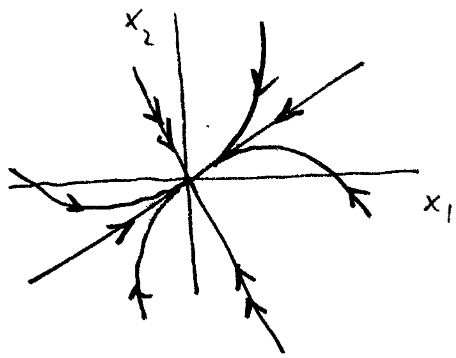
$$\begin{vmatrix} -k & p \\ k & -k-p \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \end{vmatrix} = \lambda_{1,2} \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \end{vmatrix} \Rightarrow -k x_1 + p x_2 = \lambda_{1,2} x_1$$

$$\Downarrow$$

$$x_2 = \frac{1}{p}(\lambda + k)\, x_1$$

$$\Downarrow$$

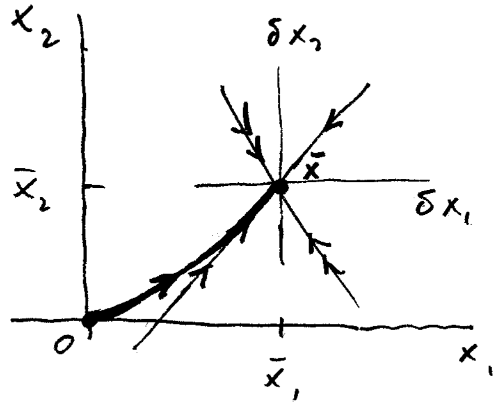
$$\boxed{x_2 = \left(-\frac{1}{2} \mp \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{k}{p}}\right) x_1}$$



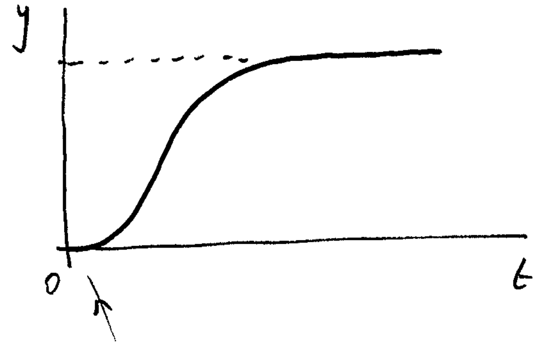
← traiettorie per $u \equiv 0$

Poichè il sistema è asintoticamente stabile, per $u = \bar{u}$ abbiamo un solo equilibrio $\bar{x}$ che viene asintoticamente raggiunto a partire da qualsiasi stato iniziale. Posto $\delta x = x(t) - \bar{x}$ e $\delta u(t) = u(t) - \bar{u}$, si ottiene $(\delta u \equiv 0)$

$$\delta \dot{x} = \dot{x} = A x + b\bar{u} = A\bar{x} + A\delta x + b\bar{u} = A\delta x$$



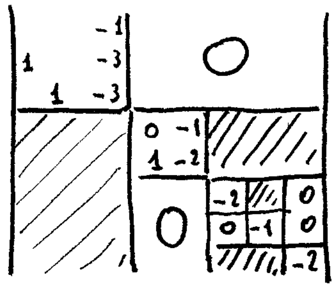
$\Rightarrow$



$\dot{y}(0) = k\dot{x}_2(0) = 0$

SOLUZIONE PROBLEMA 22

La matrice A può essere scomposta nel modo seguente

$A =$ 

La prima sottomatrice è in forma canonica di ricostruzione, per cui il suo polinomio caratteristico $\lambda^3 + \alpha_1 \lambda^2 + \alpha_2 \lambda + \alpha_3$ ha $\alpha_1 = 3$, $\alpha_2 = 3$, $\alpha_3 = 1$, per cui $\lambda^3 + \alpha_1 \lambda^2 + \alpha_2 \lambda + \alpha_3 = (\lambda + 1)^3$.

Gli autovalori della prima sottomatrice sono, pertanto, uguali e pari a -1. La seconda sottomatrice è, anch'essa, in forma canonica di ricostruzione e il suo polinomio caratteristico è $\lambda^2 + \alpha_1 \lambda + \alpha_2 = \lambda^2 + 2\lambda + 1 = (\lambda + 1)^2$. La seconda sottomatrice ha, pertanto, due autovalori uguali a -1. I rimanenti autovalori sono -2, -1 e -2. Poiché tutti gli autovalori hanno parte reale negativa, il sistema è asintoticamente stabile.

SOLUZIONE PROBLEMA 23

$\boxed{1}$ Dalle leggi dell'elettrotecnica segue che

$$\dot{x}_1 = \frac{1}{C_1} x_3$$

$$\dot{x}_2 = \frac{1}{C_2} x_3 \qquad \Rightarrow \qquad A = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{C_1} \\ 0 & 0 & \frac{1}{C_2} \\ -\frac{1}{L} & -\frac{1}{L} & -\frac{R}{L} \end{vmatrix} \qquad b = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{L} \end{vmatrix}$$

$$\dot{x}_3 = \frac{1}{L}\left(u - x_1 - R x_3 - x_2\right)$$

$\boxed{2}$

$$\det(\lambda I - A) = \det \begin{vmatrix} \lambda & 0 & -\frac{1}{C_1} \\ 0 & \lambda & -\frac{1}{C_2} \\ \frac{1}{L} & \frac{1}{L} & \lambda + \frac{R}{L} \end{vmatrix} = \lambda \left(\lambda^2 + \frac{R}{L}\lambda + \frac{1}{LC_1} + \frac{1}{LC_2} \right)$$

$$\lambda_1 = 0 \qquad \lambda_{2,3} = \frac{1}{2}\left(-\frac{R}{L} \mp \sqrt{\left(\frac{R}{L}\right)^2 - \frac{4}{L}\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right)} \right)$$

Uno degli autovalori è nullo, mentre gli altri due hanno parte reale negativa. Ciò implica che il sistema è semplicemente stabile.

$\boxed{3}$ I due autovalori $\lambda_{2,3}$ sono complessi coniugati se

$$\left(\frac{R}{L}\right)^2 < \frac{4}{L}\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right)$$

cioè se

$$R^2 < 4L\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right)$$

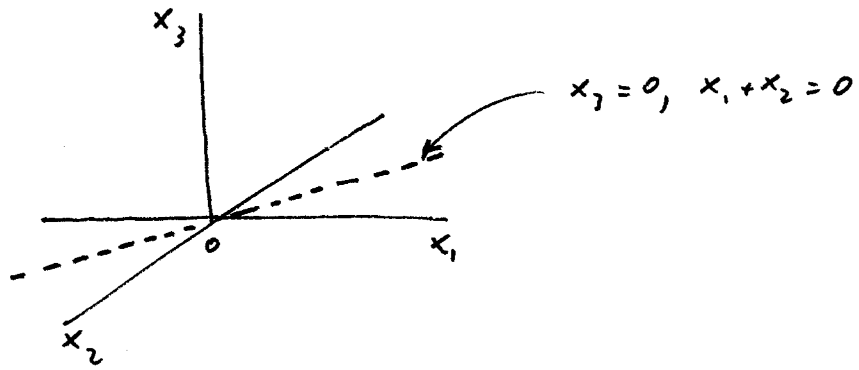
Questo risultato è in linea con l'intuito, che prevede che in un circuito elettrico si abbiano oscillazioni se gli elementi dissipativi non sono importanti (R piccolo).

$\boxed{4}$ Gli stati di equilibrio $\bar{x}$ per $u = 0$ soddisfano l'equazione $\dot{x} = Ax + bu$ con $\dot{x} = 0$ e $u = 0$, cioè

$$A\bar{x} = 0.$$

Tali stati di equilibrio sono, pertanto, gli autovettori associati all'autovalore $\lambda_1 = 0$.

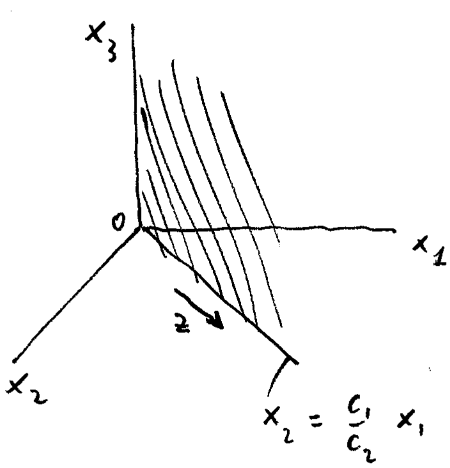
$$\left|\begin{matrix} 0 & 0 & \frac{1}{C_1} \\ 0 & 0 & \frac{1}{C_2} \\ -\frac{1}{L} & -\frac{1}{L} & -\frac{R}{L} \end{matrix}\right| \left|\begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{matrix}\right| = \left|\begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}\right| \qquad \left.\begin{matrix} \left.\begin{matrix} \frac{1}{C_1}\, x_3 = 0 \\ \frac{1}{C_2}\, x_3 = 0 \end{matrix}\right\} x_3 = 0 \\ -\frac{1}{L}(x_1 + x_2) - \frac{R}{L}\, x_3 = 0 \end{matrix}\right\} x_1 + x_2 = 0$$



---- equilibri per $u = 0$

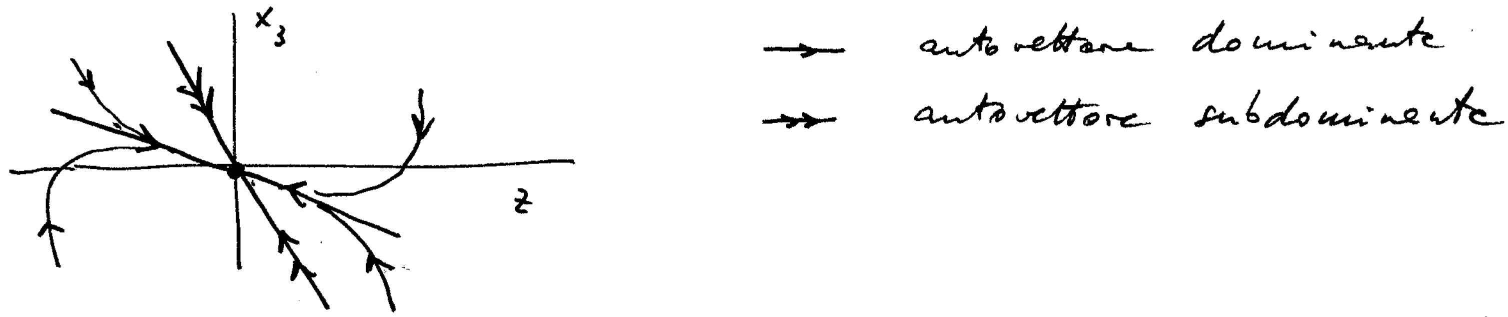
$\boxed{5}$ Nel caso di autovalori reali le traiettorie sono facilmente individuabili determinando gli autovettori associati a $\lambda_{2,3}$.

$$\left|\begin{matrix} 0 & 0 & \frac{1}{C_1} \\ 0 & 0 & \frac{1}{C_2} \\ -\frac{1}{L} & -\frac{1}{L} & -\frac{R}{L} \end{matrix}\right| \left|\begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{matrix}\right| = \lambda_{2,3} \left|\begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{matrix}\right| \qquad \begin{matrix} \frac{1}{C_1}\, x_3 = \lambda_{2,3}\, x_1 \\ \frac{1}{C_2}\, x_3 = \lambda_{2,3}\, x_2 \\ \hline \Downarrow \\ x_2 = \frac{C_1}{C_2}\, x_1 \end{matrix}$$

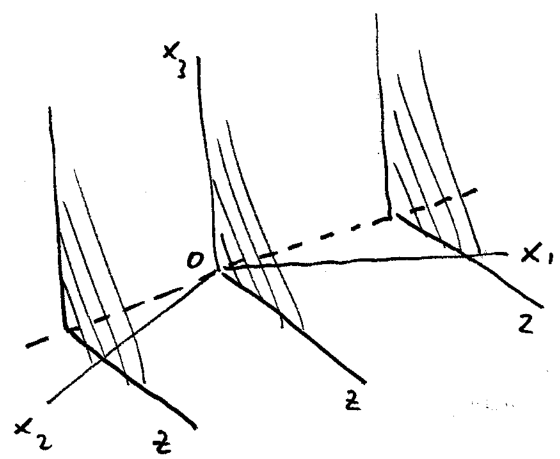


Le traiettorie che iniziano in un punto del piano ||||| restano nel piano (che è un invariante) e tendono verso l'origine perchè $\lambda_{2,3} < 0$.

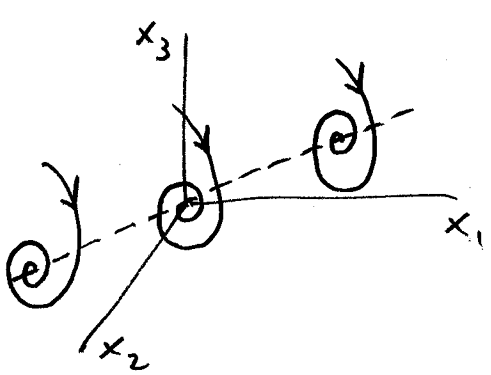
Nel piano (z, x_3) le traiettorie sono quelle di un nodo stabile



Poichè $\lambda_1 = 0$, la componente sull'autovettore associato a λ_1 si mantiene costante, per cui, nello spazio a tre dimensioni, le ~~straiettorie~~ traiettorie sono ottenibili per traslazione delle traiettorie del piano (z, x_3)



Nel caso di autovalori complessi si ottengono invece traiettorie da fuoco stabile nel solito piano (z, x_3)



anche in questo caso la componente sull'autovettore associato a $\lambda_1 = 0$ si mantiene costante

SOLUZIONE PROBLEMA 24

a) Il sistema è semplicemente stabile perchè il movimento libero è limitato ma non tende a zero per tutti gli $x(0)$.

(b) Poichè $x_1 = \text{cost.}$ deve essere $\dot{x}_1 = 0$. Poichè $x_2(t)$ tende a zero per t che tende all'infinito, deve essere $\dot{x}_2 = \lambda_2 x_2$ con $\lambda_2 < 0$. Pertanto,

$$A = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{vmatrix}$$

SOLUZIONE PROBLEMA 25

Per avere risposte di tipo oscillatorio smorzato gli autovalori devono essere complessi coniugati con parte reale negativa, cioè

$$\lambda_{1,2} = a \mp i b \qquad \text{con } a < 0$$

Poichè $\det A = \lambda_1 \cdot \lambda_2 = (a+ib)(a-ib) = a^2 + b^2$ si deduce che $\det A$ non può essere negativo (si noti che la stessa risposta vale anche nel caso $a > 0$, cioè nel caso di risposte di tipo oscillatorio amplificato).

SOLUZIONE PROBLEMA 26

Σ_1 : $\det(\lambda I - A) = \det \begin{vmatrix} \lambda+2 & -3 \\ 1 & \lambda-1 \end{vmatrix} = (\lambda+2)(\lambda-1)+3 = \lambda^2 + \lambda + 1$

$$\lambda^2 + \lambda + 1 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{-1 \mp \sqrt{1-4}}{2} = -\frac{1}{2} \mp i\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow Re(\lambda_{1,2}) = -\frac{1}{2}$$

$$T_d = -\frac{1}{Re(\lambda_d)} = 2$$

Σ_2 : $s^2 + 3s + 2 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \dfrac{-3 \mp \sqrt{9-8}}{2} = \begin{cases} -2 \\ -1 \leftarrow \lambda_d \end{cases}$

$T_d = 1$ <u>Conclusione</u> : Σ_2 tende all'equilibrio più rapidamente

SOLUZIONE PROBLEMA 27

Il tempo di dimezzamento $T_{1/2}$ è quello per cui l'esponenziale si dimezza, cioè

$$e^{-T_{1/2}/T} = \frac{1}{2}$$

Applicando i logaritmi, si ottiene

$$-\frac{T_{1/2}}{T} = -\log 2 \Rightarrow T = \frac{T_{1/2}}{\log 2}$$

Nel caso specifico, $T_{1/2} = 3$ min. per cui $T \cong 4.2$ ~~min~~.

SOLUZIONE PROBLEMA 28

In tutti i casi, il sistema è costituito da sottosistemi uguali alimentati dallo stesso ingresso. Quindi, partendo da stato nullo, gli stati dei due sottosistemi rimangono uguali tra loro, così che non è possibile raggiungere uno stato qualsiasi (in verità nel primo sistema elettrico x_1 e x_2 non sono uguali ma proporzionali tra loro se $C_1 \neq C_2$, e nel sistema idraulico i due sottosistemi uguali sono parte dell'intero sistema).

SOLUZIONE PROBLEMA 29

Il sistema con ingresso u e variabili di stato x_1 e x_2 è descritto dalle equazioni di stato

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= \frac{1}{J}(\alpha u - h x_2) \end{aligned} \Rightarrow A = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{h}{J} \end{vmatrix} \quad b = \begin{vmatrix} 0 \\ \frac{\alpha}{J} \end{vmatrix} \Rightarrow R = \begin{vmatrix} b & Ab \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \frac{\alpha}{J} \\ \frac{\alpha}{J} & -\frac{\alpha h}{J^2} \end{vmatrix}$$

Il sistema è completamente raggiungibile perchè $\det R \neq 0$.
Quindi è possibile fissare gli autovalori a piacere scegliendo k_1 e k_2.

SOLUZIONE PROBLEMA 30

$$A_c = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -\alpha_n & -\alpha_{n-1} & -\alpha_{n-2} & \cdots & -\alpha_2 & -\alpha_1 \end{vmatrix} \qquad b_c = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix}$$

$$R_c = \begin{vmatrix} b_c & A_c b_c & A_c^2 b_c \cdots & A_c^{n-1} b_c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & ? \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & ? & ? \\ 0 & 1 & ? & \cdots & ? & ? \\ 1 & ? & ? & \cdots & ? & ? \end{vmatrix}$$

dove gli elementi indicati con ? non sono stati esplicitamente calcolati perchè inessenziali ai fini della dimostrazione. Infatti, $\det R_c = \mp 1$ qualsiasi siano i valori dei coefficienti del polinomio caratteristico α_i. Pertanto, i sistemi in forma canonica di controllo (o i sistemi ad essi equivalenti) sono completamente raggiungibili.

SOLUZIONE PROBLEMA 31

Se $x(0) = 0$, si ha

$$\begin{aligned} x(1) &= b\,u(0) \\ x(2) &= A b\,u(0) + b\,u(1) \\ x(3) &= A^2 b\,u(0) + A b\,u(1) + b\,u(2) \\ &\vdots \\ x(n) &= A^{n-1} b\,u(0) + A^{n-2} b\,u(1) + \cdots + b\,u(n-1) \end{aligned}$$

L'ultima relazione con $x(n) = x$ (qualsiasi) può essere scritta come

$$x = R \begin{vmatrix} u(n-1) \\ \vdots \\ u(1) \\ u(0) \end{vmatrix} \qquad \text{dove } R = \begin{vmatrix} b & Ab \cdots & A^{n-1} b \end{vmatrix}$$

Se il sistema è completamente raggiungibile, R è invertibile, per cui si ottiene

$$\begin{vmatrix} u(n-1) \\ \vdots \\ u(1) \\ u(0) \end{vmatrix} = R^{-1} x$$

SOLUZIONE PROBLEMA 32

Se nella rete elettrica ci sono solo due induttori e nessun condensatore la rete è un sistema lineare del II ordine

$\dot{x} = Ax + bu$

Se la rete non è completamente raggiungibile i vettori b e Ab sono proporzionali e gli stati raggiungibili dall'origine sono tutti gli stati di tipo αb (la dimostrazione è semplicissima nel caso dei sistemi a tempo discreto). Poiché la figura mostra che i due stati i_1 e i_2 non sono tra loro proporzionali, si può concludere che il sistema è completamente raggiungibile.

SOLUZIONE PROBLEMA 33

Il sistema è descritto da

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{vmatrix} \qquad b = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix}$$

$$c^T = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$O = \begin{vmatrix} c^T \\ c^T A \\ c^T A^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \end{vmatrix} \Rightarrow \det O \neq 0 \Rightarrow \text{sistema completamente osservabile}$$

Elaborando opportunamente i segnali di ingresso e uscita rilevati sull'intervallo di tempo $[0, T]$ è, pertanto, possibile determinare lo stato iniziale $x(0)$ del sistema.

SOLUZIONE PROBLEMA 34

Il sistema è descritto delle equazioni

$$\begin{cases} x_1(t+1) = \frac{1.1}{3}\left(x_1(t) + u(t)\right) \\ x_2(t+1) = 0.33\left(x_2(t) + \frac{1}{3}\left(x_1(t) + u(t)\right)\right) \\ x_3(t+1) = 0.33\left(x_3(t) + \frac{1}{3}\left(x_1(t) + u(t)\right)\right) \end{cases} \Rightarrow A = \begin{vmatrix} \frac{1.1}{3} & 0 & 0 \\ 0.11 & 0.33 & 0 \\ 0.11 & 0 & 0.33 \end{vmatrix}$$

$$y(t) = 0.7\left(x_2(t) + \frac{1}{3}\left(x_1(t) + u(t)\right)\right) - 0.7\left(x_3(t) + \frac{1}{3}\left(x_1(t) + u(t)\right)\right) =$$

$$= 0.7\, x_2(t) - 0.7\, x_3(t) \Rightarrow c^T = \begin{vmatrix} 0 & 0.7 & -0.7 \end{vmatrix}$$

$$\mathcal{O} = \begin{vmatrix} 0 & 0.7 & -0.7 \\ 0 & 0.7\cdot 0.33 & -0.7\cdot 0.33 \\ 0 & 0.77\cdot(0.33)^2 & -0.7\cdot(0.33)^2 \end{vmatrix} \Rightarrow \det \mathcal{O} = 0 \Rightarrow$$ sistema non completamente osservabile

Dai dati disponibili non è, pertanto, possibile determinare lo stato iniziale del sistema, cioè capitale dell'ente e delle due agenzie all'inizio dell'anno 0.

SOLUZIONE PROBLEMA 35

L'uscita $y(t)$ può essere identicamente nulla senza che la rete sia a riposo se e solo se il sistema non è completamente osservabile. Indicata con $x_1(t)$ la corrente nell'induttore e con $x_2(t)$ la tensione sul condensatore, si ha

$$A = \begin{vmatrix} -\frac{2R}{L} & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & 0 \end{vmatrix} \qquad c^T = \begin{vmatrix} R & 1 \end{vmatrix}$$

$$\mathcal{O} = \begin{vmatrix} c^T \\ c^T A \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} R & 1 \\ \frac{1}{C} - \frac{2R^2}{L} & -\frac{R}{L} \end{vmatrix} \Rightarrow \det \mathcal{O} = \frac{R^2}{L} - \frac{1}{C}$$

$$\det \mathcal{O} = 0 \Leftrightarrow \frac{R^2}{L} - \frac{1}{C} = 0 \Leftrightarrow RC = \frac{L}{R} \Leftrightarrow$$ costanti di tempo elettriche uguali

SOLUZIONE PROBLEMA 36

$x_1(t)$ = capitale di Marco al mattino del giorno t

$x_2(t)$ = " " Franco " " " " "

$$\begin{cases} x_1(t+1) = \frac{1}{2} x_1(t) + u(t) \\ x_2(t+1) = \frac{2}{3} x_2(t) + u(t) \end{cases} \qquad A = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} \end{vmatrix} \quad b = \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \end{vmatrix}$$

$$y(t) = \frac{1}{2} x_1(t) + \frac{1}{3} x_2(t) \qquad c^T = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{vmatrix}$$

$$\mathcal{O} = \begin{vmatrix} c^T \\ c^T A \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{2}{9} \end{vmatrix} \Rightarrow \det \mathcal{O} \neq 0 \Rightarrow$$ sistema completamente osservabile

La risposta è, pertanto, affermativa.

SOLUZIONE PROBLEMA 37

$$\begin{cases} x_1(t+1) = b_1 x_1(t) + u(t) \\ x_2(t+1) = b_2 x_2(t) + (1-b_1) x_1(t) \\ x_3(t+1) = b_3 x_3(t) + (1-b_2) x_2(t) \end{cases} \Rightarrow A = \begin{vmatrix} b_1 & 0 & 0 \\ 1-b_1 & b_2 & 0 \\ 0 & 1-b_2 & b_3 \end{vmatrix} \quad b = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$y(t) = (1-b_3) x_3(t) \qquad c^T = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1-b_3 \end{vmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$\mathcal{O} = \begin{vmatrix} c^T \\ c^T A \\ c^T A^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1-b_3 \\ 0 & (1-b_2)(1-b_3) & ? \\ \bullet & ? & ? \end{vmatrix}$$

$(1-b_1)(1-b_2)(1-b_3)$

$$\Downarrow$$

è possibile determinare il numero di allievi frequentanti ogni singola classe $\Leftarrow$ sistema completamente osservabile $\Leftarrow \det \mathcal{O} \neq 0$

SOLUZIONE PROBLEMA 38

Il sistema con ingresso u e uscita y è descritto da

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = u - \alpha_1 x_1 \\ \dot{x}_2 = \alpha_1 x_1 - \alpha_2 x_2 \\ y = \alpha_2 x_2 \end{cases} \Rightarrow \quad A = \begin{vmatrix} -\alpha_1 & 0 \\ \alpha_1 & -\alpha_2 \end{vmatrix} \quad b = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \end{vmatrix}$$

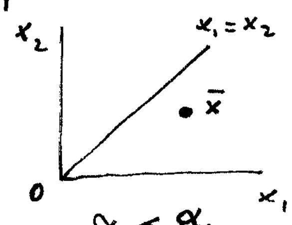
$$c^T = \begin{vmatrix} 0 & \alpha_2 \end{vmatrix}$$

Ovviamente, questo sistema è asintoticamente stabile. Infatti, la matrice A è in forma triangolare e, pertanto, $\lambda_1 = -\alpha_1$ e $\lambda_2 = -\alpha_2$ (il sistema è un nodo stabile). Ogni serbatoio ha una sua costante di tempo $T_i = -\frac{1}{\lambda_i} = \frac{1}{\alpha_i}$ e la costante di tempo dominante è quella del serbatoio con α più piccolo, cioè quella del serbatoio che si scarica meno in fretta.

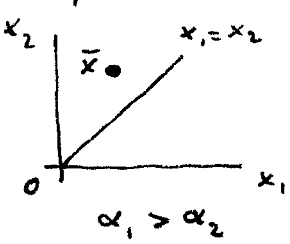
Poichè il sistema è asintoticamente stabile, a ogni ingresso costante $\bar{u}$ corrisponde uno stato di equilibrio $\bar{x}$. Tale stato di equilibrio è caratterizzato da

$$\bar{x}_1 = \frac{\bar{u}}{\alpha_1} \qquad \bar{x}_2 = \frac{\bar{u}}{\alpha_2}$$

(ottenute ponendo $\dot{x}_1 = \dot{x}_2 = 0$ nelle equazioni di stato) per cui, all'equilibrio, il serbatoio con costante di tempo dominante è più pieno dell'altro.

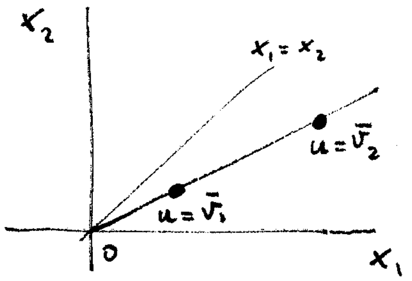


$\alpha_1 < \alpha_2$

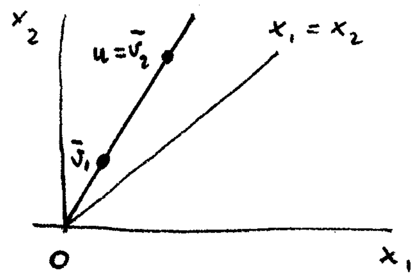


$\alpha_1 > \alpha_2$

Gli stati di equilibrio sono tutti proporzionali a $\bar{u}$, cioè sono tutti allineati su una unica retta (nel disegno che segue si è ipotizzato $\bar{v}_1 < \bar{v}_2$)



$\alpha_1 < \alpha_2$

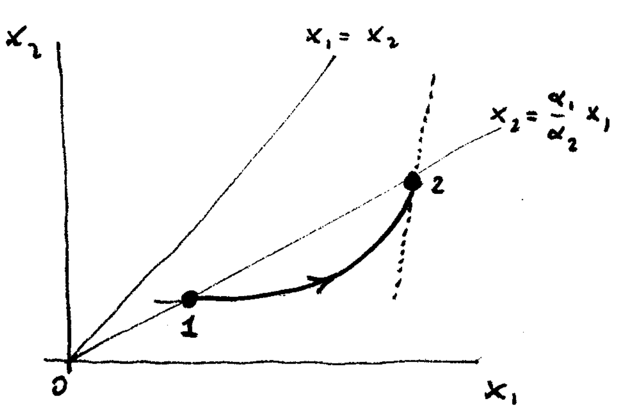


$\alpha_1 > \alpha_2$

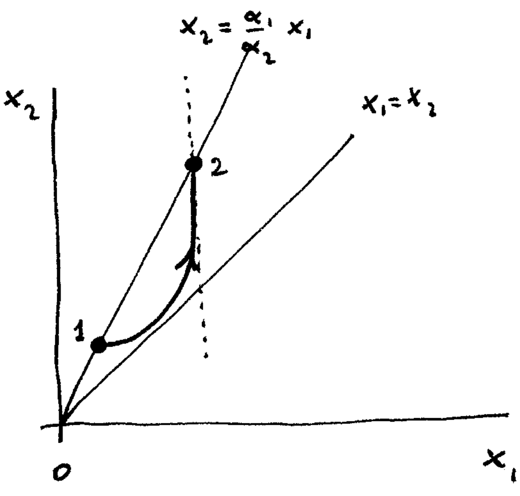
pendenza $\frac{\alpha_1}{\alpha_2}$

La retta degli stati di equilibrio è la retta $\alpha_1 x_1 = \alpha_2 x_2$

Pertanto, tutte le traiettorie attraversano tale retta orizzontalmente perchè $\dot{x}_2 = 0$ se $\alpha_1 x_1 = \alpha_2 x_2$ (vedi seconda equazione di stato). La transizione dallo stato di equilibrio corrispondente all'ingresso $\bar{v}_1$ a quello corrispondente all'ingresso $\bar{v}_2$ è, quindi, una traiettoria inizialmente orizzontale. Più precisamente le transizioni sono le seguenti (la dimostrazione è riportata tra poco)



$\alpha_1 < \alpha_2$



$\alpha_1 > \alpha_2$

In entrambi i casi, l'uscita y tende in modo monotono dal valore

$\bar{v}_1$ al valore $\bar{v}_2$, con y inizialmente nullo come indicato nel testo con il transitorio denominato (a).

Per dimostrare che le traiettorie tendono verso il secondo equilibrio (punto 2 di figura) dal basso verso l'alto si può procedere in questo modo. Innanzitutto riferiamo lo stato del sistema al punto 2, cioè poniamo

$$\delta x(t) = x(t) - \bar{x}^{(2)}$$

dove $\bar{x}^{(2)}$ è l'equilibrio corrispondente a $\bar{v}_2$. Derivando entrambi i membri, si ottiene

$$\dot{\delta x} = \dot{x} = Ax + b\bar{v}_2 = A(\delta x(t) + \bar{x}^{(2)}) + b\bar{v}_2 = A\,\delta x(t)$$

perchè $A\bar{x}^{(2)} + b\bar{v}_2 = 0$. Ciò significa che le traiettorie del sistema, viste dal punto 2, sono quelle del movimento libero del sistema:

$$\dot{\delta x} = A\,\delta x$$

Ciò significa che si tende verso il punto 2 secondo la retta associata all'autovettore dominante della matrice A.

<u>Caso $\alpha_1 < \alpha_2$</u>

L'autovalore dominante è $\lambda_1 = -\alpha_1$, per cui l'autovettore dominante soddisfa le equazioni

$$\begin{vmatrix} -\alpha_1 & 0 \\ \alpha_1 & -\alpha_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \end{vmatrix} = -\alpha_1 \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \end{vmatrix}$$

$-\alpha_1 x_1 = -\alpha_1 x_1$ (tautologia)

$\alpha_1 x_1 - \alpha_2 x_2 = -\alpha_1 x_2$

$\Downarrow$

$x_2 = \dfrac{\alpha_1}{\alpha_2 - \alpha_1} x_1$ retta individuato dall'autovettore dominante

Poiché $0 < \dfrac{\alpha_1}{\alpha_2} < \dfrac{\alpha_1}{\alpha_2 - \alpha_1}$ la geometria della traiettoria è come in figura, in cui la retta tratteggiata è quella corrispondente all'autovettore dominante.

<u>Caso $\alpha_1 > \alpha_2$</u>

L'autovalore dominante è $\lambda_2 = -\alpha_2$ e il corrispondente autovettore soddisfa le equazioni

$$\begin{vmatrix} -\alpha_1 & 0 \\ \alpha_1 & -\alpha_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \end{vmatrix} = -\alpha_2 \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \end{vmatrix}$$

$-\alpha_1 x_1 = -\alpha_2 x_1$ $(x_1 = 0)$

$\alpha_1 x_1 - \cancel{\alpha_2} x_2 = -\cancel{\alpha_2} x_2$ $(x_1 = 0)$

Quindi, l'autovettore dominante è verticale $(x_1 = 0)$ e la traiettoria tende verticalmente verso il punto 2.

Per quanto riguarda la seconda parte del problema è sufficiente verificare che il sistema è completamente raggiungibile e osservabile.

$$R = \begin{vmatrix} b & Ab \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -\alpha_1 \\ 0 & \alpha_1 \end{vmatrix}$$

$\det R \neq 0$

$$\mathcal{O} = \begin{vmatrix} c^T \\ c^T A \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \alpha_2 \\ \alpha_1 \alpha_2 & -\alpha_2^2 \end{vmatrix}$$

$\det \mathcal{O} \neq 0$

SOLUZIONE PROBLEMA 39

L'antenna è descritta dalle equazioni

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \frac{1}{J}(m - h x_2) \\ y = x_1 \end{cases} \Rightarrow \quad A = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{h}{J} \end{vmatrix} \quad b = \begin{vmatrix} 0 \\ \frac{1}{J} \end{vmatrix} \quad c^T = \begin{vmatrix} 1 & 0 \end{vmatrix}$$

La risposta è, pertanto, positiva perchè il sistema è completamente raggiungibile e osservabile. Infatti,

$$R = \begin{vmatrix} b & Ab \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{J} \\ \frac{1}{J} & -\frac{h}{J^2} \end{vmatrix} \Rightarrow \det R \neq 0 \Rightarrow \text{completa raggiungibilità}$$

$$O = \begin{vmatrix} c^T \\ c^T A \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \Rightarrow \det O \neq 0 \Rightarrow \text{completa osservabilità}$$

SOLUZIONE PROBLEMA 40

A causa della presenza di due integratori in parallelo, il sistema non è nè completamente raggiungibile, nè completamente osservabile. Infatti, se lo stato iniziale del sistema è nullo, x_1 e x_2 non potranno essere differenziati e questo è sufficiente per affermare che il sistema non è completamente raggiungibile. D'altra parte, stati iniziali diversi come $x'(0) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}^T$ e $x''(0) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}^T$ danno luogo alla stessa uscita $y(\cdot)$ e ciò è sufficiente per affermare che il sistema non è completamente osservabile.

SOLUZIONE PROBLEMA 41

Indicando con x_1 e x_2 le tensioni sui due condensatori e con x_3 la corrente nell'induttore (coincidente con y) si ottiene

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \frac{1}{C_1} x_3 \\ \dot{x}_2 = \frac{1}{C_2} x_3 \\ \dot{x}_3 = \frac{1}{L}(u - x_1 - x_2) \end{cases} \qquad y = x_3$$

$$\Rightarrow \quad A = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{C_1} \\ 0 & 0 & \frac{1}{C_2} \\ -\frac{1}{L} & -\frac{1}{L} & 0 \end{vmatrix} \quad b = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{L} \end{vmatrix}$$

$$c^T = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad d = \begin{vmatrix} 0 \end{vmatrix}$$

$$R = \begin{vmatrix} b & Ab & A^2 b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{LC_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{LC_2} & 0 \\ \frac{1}{L} & 0 & -\frac{1}{L^2}\left(\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}\right) \end{vmatrix} \Rightarrow \det R = 0 \Rightarrow$$ sistema <u>non</u> completamente raggiungibile

$$O = \begin{vmatrix} c^T \\ c^T A \\ c^T A^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{L} & -\frac{1}{L} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{L}\left(\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}\right) \end{vmatrix} \Rightarrow \det O = 0 \Rightarrow$$ sistema <u>non</u> completamente osservabile

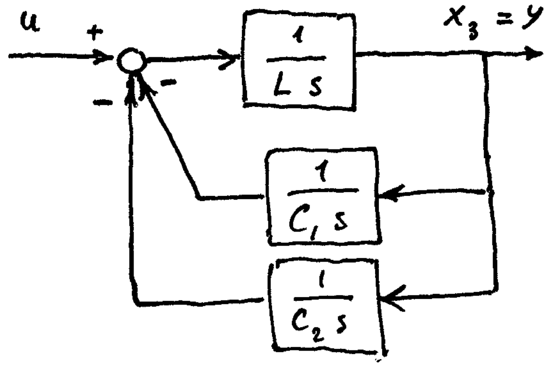
La funzione di trasferimento si può calcolare in vari modi:

- con la formula $G(s) = c^T (sI - A)^{-1} b + d$ (o, numericamente, con il metodo di Sourian)
- scrivendo le equazioni di stato per mezzo dell'operatore "s"

$$s x_1 = \frac{x_3}{C_1}$$
$$s x_2 = \frac{x_3}{C_2}$$
$$s x_3 = \frac{1}{L}(u - x_1 - x_2)$$
$$y = x_3$$

  e calcolando $G = \frac{y}{u}$ per sostituzioni successive.
- rappresentando il sistema (equazioni di stato e trasformazione di uscita) con uno schema a blocchi e usando la formula di Mason

Usiamo, a titolo di esempio, il terzo modo



Lo schema contiene un solo cammino diretto ingresso/uscita e due anelli semplici (che si toccano).

$$G(s) = \frac{\frac{1}{Ls}}{1 + \frac{1}{Ls}\frac{1}{C_1 s} + \frac{1}{Ls}\frac{1}{C_2 s}} = \frac{\frac{1}{L} s}{s^2 + \frac{1}{L}\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right)}$$

SOLUZIONE PROBLEMA 42

(a) Indicate con x_1 e x_2 le correnti nei due induttori, si ottiene

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \frac{1}{L_1} u \\ \dot{x}_2 = \frac{1}{L_2} u \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad A = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \quad b = \begin{vmatrix} \frac{1}{L_1} \\ \frac{1}{L_2} \end{vmatrix}$$

$$y = x_1 + x_2 + \frac{1}{R} u \qquad\qquad c^T = \begin{vmatrix} 1 & 1 \end{vmatrix} \quad d = \begin{vmatrix} \frac{1}{R} \end{vmatrix}$$

(b) Il sistema è improprio perché $d \neq 0$.

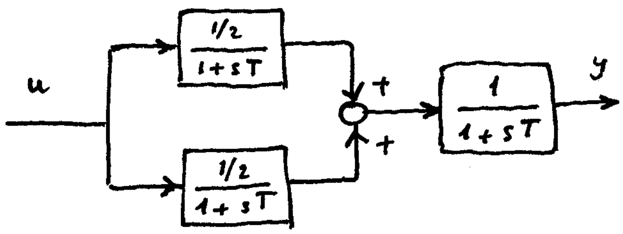
(c) $G = \frac{n}{d} = c^T (sI - A)^{-1} b + d = \frac{1}{s} c^T b + d = \left(\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2}\right)\frac{1}{s} + \frac{1}{R} = \frac{\frac{1}{R} s + \left(\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2}\right)}{s}$

Il fatto che il polinomio a denominatore della funzione di trasferimento sia di primo grado (anziché di grado $n = 2$) rivela che il sistema non è completamente raggiungibile e osservabile. In altre parole, il sistema è composto dalla parte raggiungibile e osservabile (b) e da un'altra parte (a, c o d).

(d) Il sistema non è completamente osservabile (perché $A = 0$) e, quindi, non può essere costituito dalle parti (b) e (d) (come in Fig. 21). Pertanto, il modello ARMA $n u = d y$ descrive tutte le coppie ingresso-uscita.

SOLUZIONE PROBLEMA 43

Per determinare il modello ARMA di trasferimento $dy = nu$ è sufficiente determinare la funzione di trasferimento del sistema $G(s) = \frac{n(s)}{d(s)}$. Nel caso specifico, lo schema a blocchi del sistema è il seguente



$$T = \frac{1}{k}$$

e la funzione di trasferimento è, pertanto,

$$G(s) = \frac{1}{(1+sT)^2}$$

Tutte le coppie $(u(\cdot), y(\cdot))$ corrispondenti a serbatoi inizialmente vuoti sono, quindi, ottenibili risolvendo l'equazione differenziale del secondo ordine

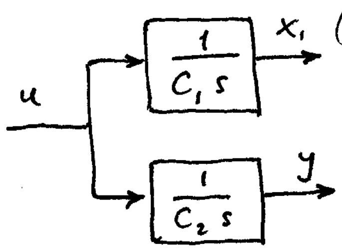
$$(1+sT)^2 y = u$$

cioè

$$T^2 \ddot{y} + 2T\dot{y} + y = u \quad .$$

SOLUZIONE PROBLEMA 44

Lo schema a blocchi corrispondente al circuito è



(tensione sul primo condensatore)

per cui la funzione di trasferimento è $G(s) = \frac{1}{C_2 s}$. Il sistema non è, quindi, esternamente stabile perchè ha un polo nullo.
Esistono molti altri modi di risolvere il problema (per esempio, il sistema ha autovalori nulli e, quindi, non può avere poli stabili).

SOLUZIONE PROBLEMA 45

La funzione di trasferimento è (formula di Mason)

$$G = \frac{G_a(G_c + G_d)}{1 + G_a G_b}$$

I poli della funzione di trasferimento sono, quindi, la riunione dei poli di G_c, G_d e $\frac{G_a}{1+G_aG_b}$ (o parte di essi nel caso, eccezionale, di semplificazioni zeri/poli). Il sistema è, pertanto, esternamente stabile se i poli di G_c, G_d e $\frac{G_a}{1+G_aG_b}$ sono stabili.

Poli di G_c : certamente stabili, perché l'uscita del sistema (c) è limitata per ingresso limitato e stato iniziale nullo.

Poli di G_d : certamente stabili, perché gli autovalori della matrice A sono stabili (la matrice A è in forma triangolare a blocchi ...).

Poli di $\frac{G_a}{1+G_aG_b} = \frac{\frac{\mu_a}{(1+s)}}{1+\frac{\mu_a\mu_b(1+0.1s)}{(1+s)(1+10s)}} = \frac{\mu_a(1+10s)}{(1+s)(1+10s)+\mu_a\mu_b(1+0.1s)}$

Poiché i poli sono gli zeri del polinomio al denominatore, che è un polinomio di secondo grado a coefficienti positivi, per la regola di Cartesio essi sono negativi o hanno parte reale negativa nel caso siano complessi. Quindi, in conclusione, anche i poli di $\frac{G_a}{1+G_aG_b}$ sono stabili.

SOLUZIONE PROBLEMA 46

$$G = \frac{\frac{\mu}{1+sT}\cdot\frac{1}{1+s}}{1+\frac{\mu}{1+sT}\cdot\frac{1}{(1+s)^2}} = \frac{\mu(1+s)}{(1+sT)(1+s)^2+\mu} = \frac{\mu(1+s)}{Ts^3+(2T+1)s^2+(2+T)s+1+\mu}$$

I poli sono le radici del polinomio a denominatore, cioè le radici del polinomio

$$s^3+\alpha_1 s^2+\alpha_2 s+\alpha_3$$

con

$$\alpha_1 = 2+\frac{1}{T}$$

$$\alpha_2 = 1+\frac{2}{T}$$

$$\alpha_3 = \frac{1+\mu}{T}$$

La condizione necessaria e sufficiente perché i poli siano stabili è, quindi, (si ricordi l'Esempio 6)

$$\left.\begin{array}{l}\alpha_1>0\\ \alpha_3>0\end{array}\right\}\text{ sempre verificate}$$

$$\alpha_2>\frac{\alpha_3}{\alpha_1} \iff 1+\frac{2}{T} > \frac{1+\mu}{\cancel{T}}\,\frac{\cancel{T}}{2T+1} \iff \mu<\mu_{crit} \overset{\Delta}{=} \left(1+\frac{2}{T}\right)(2T+1)-1$$

Si noti che nel caso particolare $T=1$ (tre costanti di tempo uguali in retroazione) si ritrova un risultato già noto ($\mu_{crit}=8$).

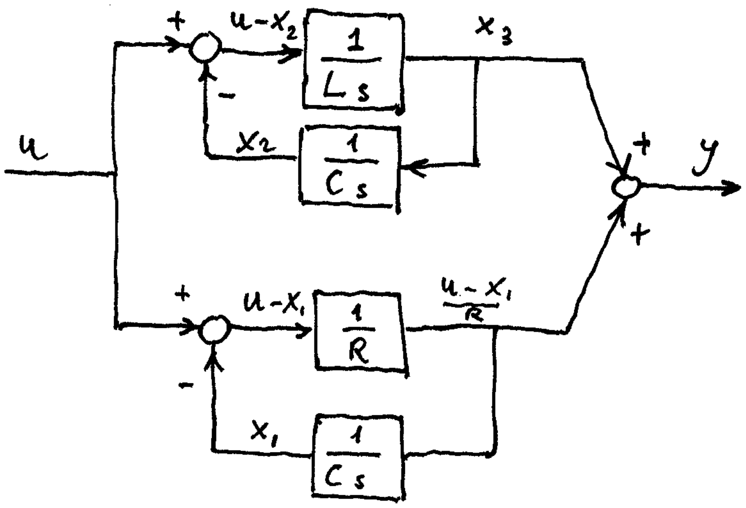
SOLUZIONE PROBLEMA 47

$$G = \frac{\frac{1}{s}\,\frac{\mu}{1+sT_1}}{1+\frac{1}{s}\,\frac{\mu}{(1+sT_1)(1+sT_2)}} = \frac{\mu(1+sT_2)}{s(1+sT_1)(1+sT_2)+\mu} = \frac{\mu(1+sT_2)}{T_1T_2s^3+(T_1+T_2)s^2+s+\mu}$$

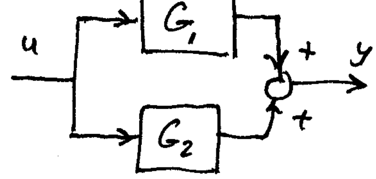
$$\left.\begin{array}{l}\alpha_1=\dfrac{T_1+T_2}{T_1T_2}>0\\[2ex] \alpha_3=\dfrac{\mu}{T_1T_2}>0\\[2ex] \alpha_2>\dfrac{\alpha_3}{\alpha_1}\iff \dfrac{1}{T_1T_2}>\dfrac{\mu}{T_1+T_2}\end{array}\right\}\text{ nel caso } T_1,T_2>0 \Rightarrow \boxed{0<\mu<\frac{1}{T_1}+\frac{1}{T_2}}$$

SOLUZIONE PROBLEMA 48

Lo schema a blocchi corrispondente al circuito è il seguente



$\equiv$



$$G_1 = \frac{\frac{1}{Ls}}{1+\frac{1}{Ls}\frac{1}{Cs}} = \frac{Cs}{1+LCs^2}$$

$$G_2 = \frac{\frac{1}{R}}{1+\frac{1}{R}\frac{1}{Cs}} = \frac{Cs}{1+RCs}$$

Poichè $G = G_1 + G_2$ i poli di G sono i poli di G_1 e i poli di G_2. Poichè i poli di G_1 sono immaginari $\left(\mp i\sqrt{\frac{1}{LC}}\right)$, il sistema non ha poli stabili e, quindi, non è esternamente stabile. Pertanto, l'uscita y non si mantiene limitata per ogni ingresso u limitato e stato iniziale nullo.

SOLUZIONE PROBLEMA 49

$$G(s) = \frac{1}{1+sT_1} - \frac{1}{1+sT_2} = \frac{s(T_2-T_1)}{(1+sT_1)(1+sT_2)}$$

Il sistema ha uno zero nullo $(z_1 = 0)$ e, pertanto, non è a sfasamento minimo. Gli ingressi nascosti soddisfano l'equazione $su = 0$, cioè $\dot{u} = 0$ che significa $u = \text{cost.}$

SOLUZIONE PROBLEMA 50

Se Σ_1 e Σ_2 sono di ordine n_1 e n_2, le loro funzioni di trasferimento $G_1 = \frac{N_1}{D_1}$ e $G_2 = \frac{N_2}{D_2}$ hanno polinomi D_1 e D_2 di grado n_1 e n_2 (a causa della completa raggiungibilità e osservabilità di Σ_1 e Σ_2), e polinomi N_1 e N_2 di grado zero (a causa della non esistenza di ingressi nascosti). Ciò implica che nel calcolare la funzione di trasferimento $G = G_1 G_2 = \frac{N_1}{D_1}\frac{N_2}{D_2}$ del sistema, non possono esserci semplificazioni zeri/poli. In altre parole, il polinomio D della funzione di trasferimento $G = \frac{N}{D}$ è di grado $(n_1 + n_2)$ e ciò implica la completa raggiungibilità e osservabilità del sistema.

SOLUZIONE PROBLEMA 51

$$G(s) = \frac{\dfrac{\mu}{(1+sT_1)(1+sT_2)}}{1 + \dfrac{1}{s}\dfrac{\mu}{(1+sT_1)(1+sT_2)}} = \frac{\mu s}{s(1+sT_1)(1+sT_2)+\mu}$$

Il sistema ha, pertanto, tre poli e uno zero. Poichè lo zero è nullo, il sistema non è a sfasamento minimo e i suoi ingressi nascosti soddisfano l'equazione $su = 0$ cioè $\dot{u} = 0$. Ciò implica che gli ingressi nascosti siano costanti. Si noti che lo stesso risultato è valido, più in generale, per sistemi con funzione di trasferimento in linea di andata del tipo $\frac{\mu}{D(s)}$.

SOLUZIONE PROBLEMA 52

La risposta è negativa perché il sistema ha uno zero positivo ($z_1 = 1$) che è responsabile di ingressi nascosti illimitati ($u \equiv e^t$).

SOLUZIONE PROBLEMA 53

$$G(z) = \frac{\frac{1}{z+0.5}\left(-\frac{1}{z}\right) + \frac{\mu}{z-1}\,\frac{1}{z}}{1 + \frac{\mu}{z-1}\,\frac{1}{z}} = \frac{-\frac{z-1}{z+0.5} + \mu}{z(z-1) + \mu} = \frac{-(z-1) + \mu(z+0.5)}{z(z-1)(z+0.5) + \mu(z+0.5)}$$

$$= \frac{(\mu - 1)z + (0.5\mu + 1)}{z(z-1)(z+0.5) + \mu(z+0.5)}$$

Il sistema ha uno zero z_1 dato da

$$z_1 = -\frac{0.5\mu + 1}{\mu - 1}$$

Pertanto, è possibile ricostruire gli ingressi se $|z_1| < 1$, cioè se $\mu < 0$ o $\mu > 2$