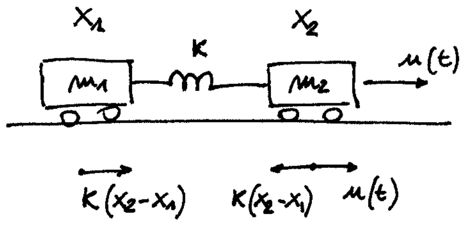
SOLUZIONE PROBLEMA 1

x_1 posizione carrello 1

x_2 posizione carrello 2

$x_3 = \dot{x}_1$ velocità carrello 1

$x_4 = \dot{x}_2$ velocità carrello 2



Applicando la legge di Newton:

$$m_1 \dot{x}_3 = k(x_2 - x_1)$$

$$m_2 \dot{x}_4 = u(t) - k(x_2 - x_1)$$

Perciò le equazioni di stato sono:

$$\dot{x}_1 = x_3$$

$$\dot{x}_2 = x_4$$

$$\dot{x}_3 = \frac{1}{m_1} k (x_2 - x_1)$$

$$\dot{x}_4 = \frac{1}{m_2} \left[u(t) - k(x_2 - x_1) \right]$$

e la trasformazione d'uscita:

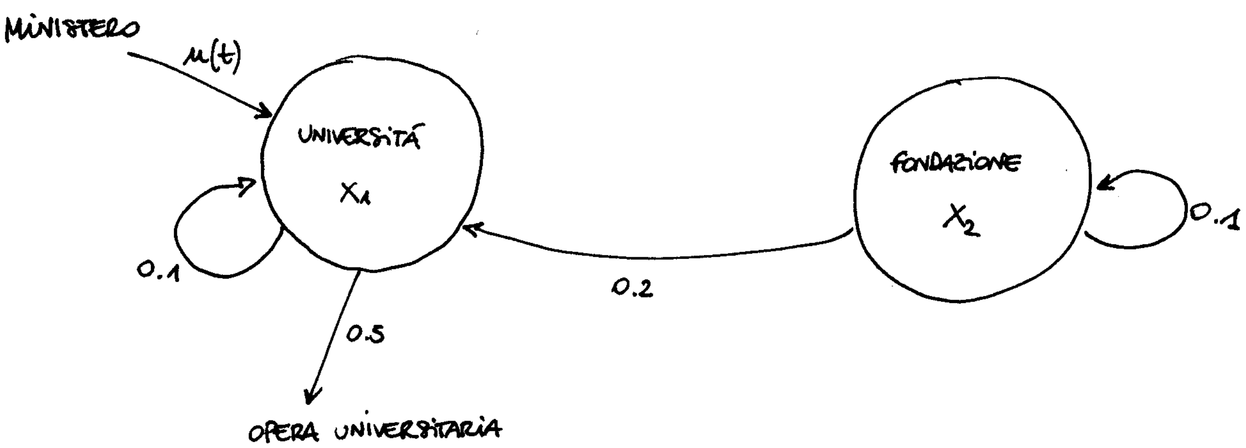
$$y = x_1$$

Quindi si ottiene

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{k}{m_1} & \frac{k}{m_1} & 0 & 0 \\ \frac{k}{m_2} & -\frac{k}{m_2} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{m_2} \end{bmatrix}$$

$$c^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad d = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$$

SOLUZIONE PROBLEMA 2



$$x_1(t+1) = 1.1\left[x_1(t) + 0.2x_2(t) + u(t) - 0.5\left[x_1(t) + 0.2x_2(t) + u(t)\right]\right] =$$

$$= 0.55x_1(t) + 0.11x_2(t) + 0.55u(t)$$

$$x_2(t+1) = 1.1\left[x_2(t) - 0.2x_2(t)\right] =$$

$$= 0.88x_2(t)$$

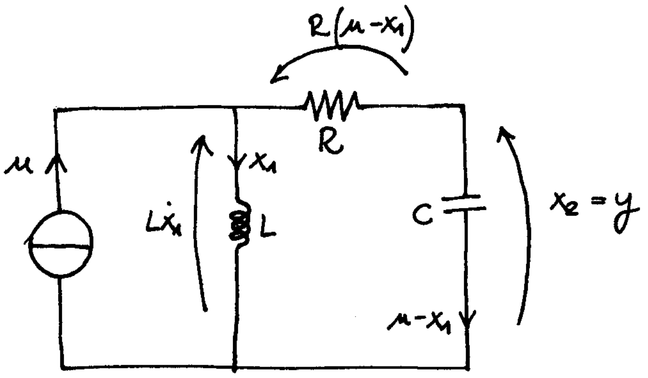
$$y(t) = 0.5\left[x_1(t) + 0.2x_2(t) + u(t)\right]$$

Perciò

$$A = \begin{bmatrix} 0.55 & 0.11 \\ 0 & 0.88 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 0.55 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$c^T = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.1 \end{bmatrix} \quad d = \begin{bmatrix} 0.5 \end{bmatrix}$$

SOLUZIONE PROBLEMA 3

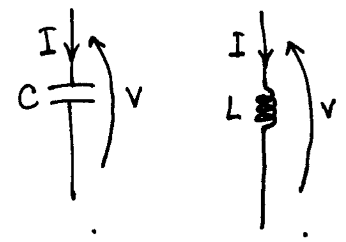


$$L\dot{x}_1 = R(u - x_1) + x_2$$

$$C\dot{x}_2 = u - x_1$$

$$y = x_2$$

Equazioni del condensatore e dell'induttore



$I = C\dot{V}$ $V = L\dot{I}$

Per cui

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & \frac{1}{L} \\ -\frac{1}{C} & 0 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} \frac{R}{L} \\ \frac{1}{C} \end{bmatrix}$$

$$c^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \quad d = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$$

Per trovare il modello ARMA bisogna portare il sistema nella forma:

$$D(p)\, y(t) = N(p)\, u(t)$$

con $D(p) = p^n + \alpha_1 p^{n-1} + \dots + \alpha_n$

$N(p) = \beta_0 p^n + \beta_1 p^{n-1} + \dots + \beta_n$

p operatore di anticipo/derivazione

Con un po' di passaggi:

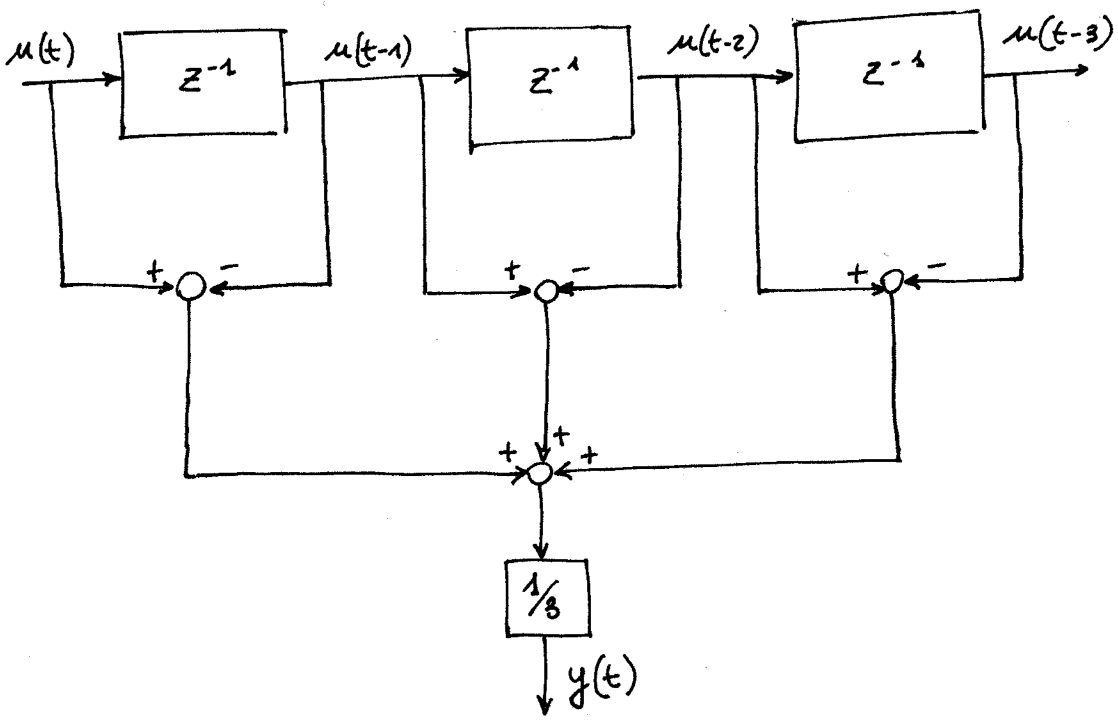
$$C\dot{x}_2 = u - x_1 \Rightarrow C\ddot{x}_2 = \dot{u} - \dot{x}_1 \Rightarrow C\ddot{y} = \dot{u} - \frac{1}{L}\left[R(u - x_1) + x_2\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C\ddot{y} = \dot{u} - \frac{R}{L}u + \frac{R}{L}x_1 - \frac{x_2}{L} \Rightarrow C\ddot{y} = \dot{u} - \frac{R}{L}u + \frac{R}{L}(u - C\dot{y}) - \frac{1}{L}y \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C\ddot{y} + \frac{RC}{L}\dot{y} + \frac{1}{L}y = \dot{u} \Rightarrow \ddot{y} + \frac{R}{L}\dot{y} + \frac{1}{LC}y = \frac{1}{C}\dot{u}$$

$\Rightarrow N(s) = \frac{1}{C}s \qquad D(s) = s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC} \Rightarrow$ la funzione di trasferimento è $G(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \dfrac{\frac{1}{C}s}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}}$

SOLUZIONE PROBLEMA 7



$$y(t) = \frac{1}{3} u(t) \left[1 - \cancel{z^{-1}} + \cancel{z^{-1}} - \cancel{z^{-2}} + \cancel{z^{-2}} - z^{-3} \right]$$

$$= \frac{1}{3} \left(1 - z^{-3} \right) u(t)$$

$\Downarrow$

$$G(z) = \frac{1 - z^{-3}}{3} = \frac{z^3 - 1}{3z^3}$$

SOLUZIONE PROBLEMA 8

$$G^{(1)}(s) = \frac{G_1G_2G_5 + G_1G_4G_5 + G_1G_6}{1 + G_1G_3}$$

$$G^{(2)}(s) = \frac{G_2G_5 + G_4G_5 + G_6}{1 + G_1G_3}$$

SOLUZIONE PROBLEMA 9

$$G(s) = \frac{G_1G_3G_5}{1 + G_2G_3 + G_2G_3G_4G_5}$$

SOLUZIONE PROBLEMA 10

$$\frac{G}{1-GH} = \frac{1}{1-\frac{s-1}{s}} = s$$

la funzione di trasferimento ottenuta non rispetta il vincolo che il grado del polinomio a numeratore sia $\leq$ del grado del polinomio a denominatore. Questo assurdo è dovuto al fatto di aver collegato in retroazione due sistemi impropri.

SOLUZIONE PROBLEMA 11

$$\dot{x} = Ax + bu \qquad\qquad y = c^T x$$

$$\left[\frac{m^3}{min}\right] = \left[\frac{1}{min}\right]\left[m^3\right] + \left[-\right]\left[\frac{m^3}{min}\right] \qquad\qquad \left[\frac{m^3}{min}\right] = \left[\frac{1}{min}\right]\left[m^3\right]$$

$$\downarrow$$

$$\left[\frac{l}{s}\right] = \left[\frac{1}{s}\right]\left[l\right] + \left[-\right]\left[\frac{l}{s}\right] \qquad\qquad \left[\frac{l}{s}\right] = \left[\frac{1}{s}\right]\left[l\right]$$

Perciò

$$A^* = \frac{1}{60} A = \begin{bmatrix} -0.5 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad\qquad b^* = b$$

A* è più comoda di A, ad es. nell'applicazione delle formule di Lagrange.

$$c^{*T} = \frac{1}{60} c^T = \begin{bmatrix} 0.5 & 1 \end{bmatrix}$$

SOLUZIONE PROBLEMA 12

Formula di Lagrange con $u=0$:

$$x(t) = e^{At}x(0)$$

$$\Downarrow$$

$$y(t) = c^T e^{At}x(0)$$

dove

$$e^{At} = I + At + A^2\frac{t^2}{2!} + A^3\frac{t^3}{3!} + \dots \quad \leftarrow \text{somma di funzioni continue}$$

$$\dot{y}(t) = c^T A e^{At}x(0)$$

Cioè sia $y(t)$ che $\dot{y}(t)$ sono funzioni continue.

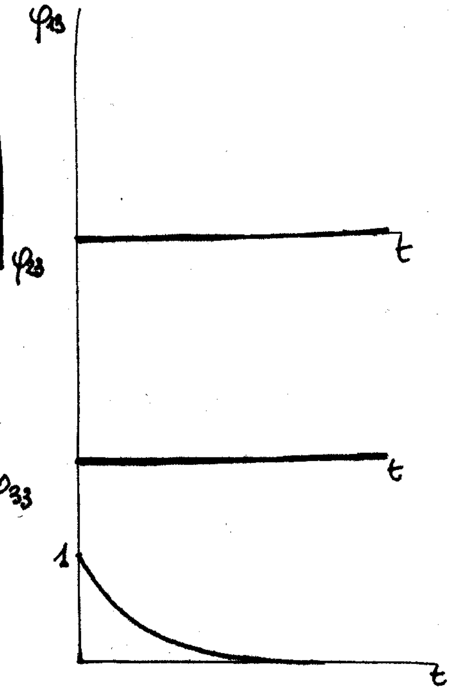
Perciò il diagramma che non può rappresentare il movimento libero di uscita di un sistema a tempo continuo è il terzo, che presenta una discontinuità nella derivata.

SOLUZIONE PROBLEMA 13

$$\underbrace{x(t) = \Phi(t)x(0) + \Psi(t)u_{[0,t)}(\cdot)}$$

$\downarrow$ possiamo fingere che $u(t)=0$

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi_{11}(t) & \varphi_{12}(t) & \varphi_{13}(t) \\ \varphi_{21}(t) & \varphi_{22}(t) & \varphi_{23}(t) \\ \varphi_{31}(t) & \varphi_{32}(t) & \varphi_{33}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ x_3(0) \end{bmatrix}$$

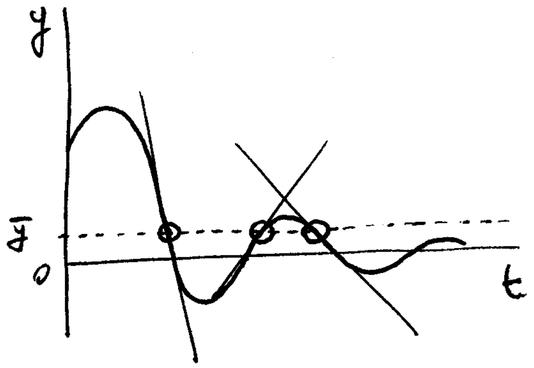


SOLUZIONE PROBLEMA 14

Sì, il doppio bipolo contiene elementi reattivi. Infatti, se così non fosse, la corrente $i_c(t)$ nel condensatore sarebbe una funzione continua (lineare o non lineare) della tensione $y(t)$; per cui avremmo

$$\dot{y} = \frac{1}{c} f(y(t))$$

Ma ciò è in contrasto con la figura:



Per lo stesso valore $y = \bar{y}$ si possono avere 3 diversi valori di $\dot{y}$; perciò $\dot{y}$ non può essere funzione soltanto di $y(t)$.

SOLUZIONE PROBLEMA 15

Se i resistori fossero lineari e invarianti, la corrente i e la tensione v dovrebbero essere le variabili di stato x_1 e x_2 di un sistema lineare del secondo ordine senza ingresso. Ma, in un tale sistema, il movimento libero dovrebbe essere lineare nello stato iniziale $x(0)$, mentre ciò non è vero nella seconda figura.