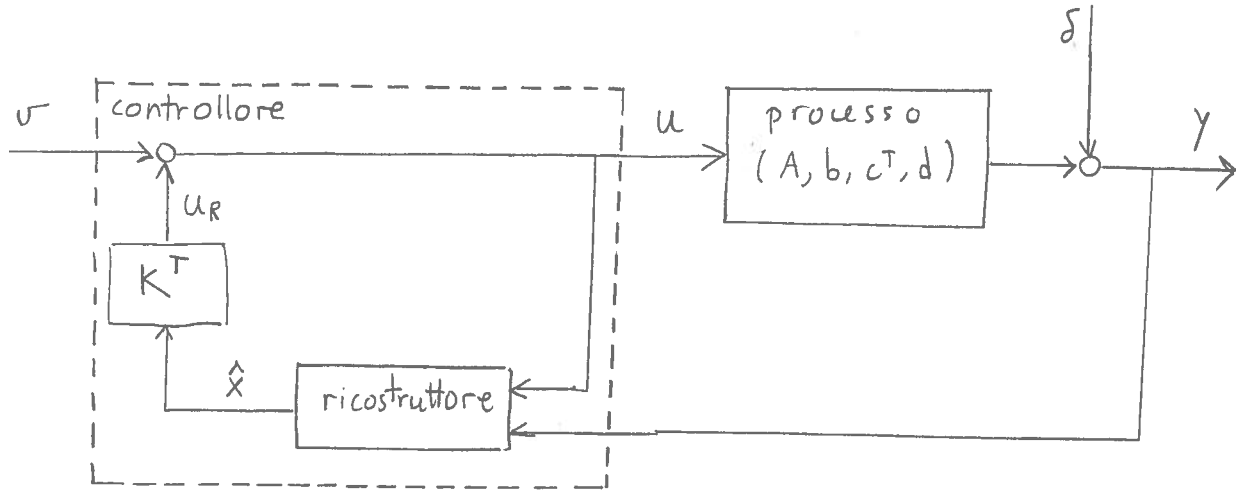
Il regolatore come sistema di controllo



- Si suppone (A,b) c.r., (A,c^T) c.o.
- Si determinano la legge di controllo K^T e i parametri ℓ del ricostruttore tali che le matrici $A+bK^T$ e $A+\ell c^T$ siano as. stab.
- Il controllore ha come ingressi la variabile controllata y e il segnale v e come uscita la variabile di controllo u.
  v ha il ruolo del riferimento, ma y non tende a v.
  In particolare (in assenza di disturbo, $\delta = 0$) si ha che

$$v = 0 \Rightarrow x, \hat{x}, u \to 0 \Rightarrow y \to 0$$

$$v = \bar{v} \text{ costante} \Rightarrow y \to \mu_{vy} \bar{v}$$

- calcolo di μ_{vy}: $\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + bu + \ell(c^T\hat{x} + du - y) = (A+\ell c^T)\hat{x} + (b+d\ell)u - \ell y$

$$\mu_{uu_R} = -K^T(A+\ell c^T)^{-1}(b+d\ell)$$
$$\mu_{yu_R} = K^T(A+\ell c^T)^{-1}\ell$$
$$\Rightarrow \mu_{vy} = \frac{\frac{1}{1-\mu_{uu_R}}\mu}{1 - \frac{1}{1-\mu_{uu_R}}\mu\mu_{yu_R}}$$

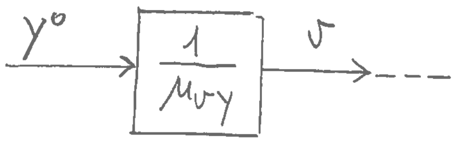
con $\mu = -c^TA^{-1}b + d$ guadagno del processo.

- In presenza di disturbo costante $\bar{\delta}$

$$y \to \mu_{vy}\bar{v} + \mu_{\delta y}\bar{\delta}, \quad \text{con } \mu_{\delta y} = \frac{1}{1 - \frac{1}{1-\mu_{uu_R}}\mu\mu_{yu_R}}$$

- Non c'è un legame semplice tra gli elementi di K^T, ℓ e μ_{uu_R}, μ_{yu_R}.
  Anche se μ_{uu_R} e μ_{yu_R} fossero grandi μ_{vy} non tenderebbe a 1.

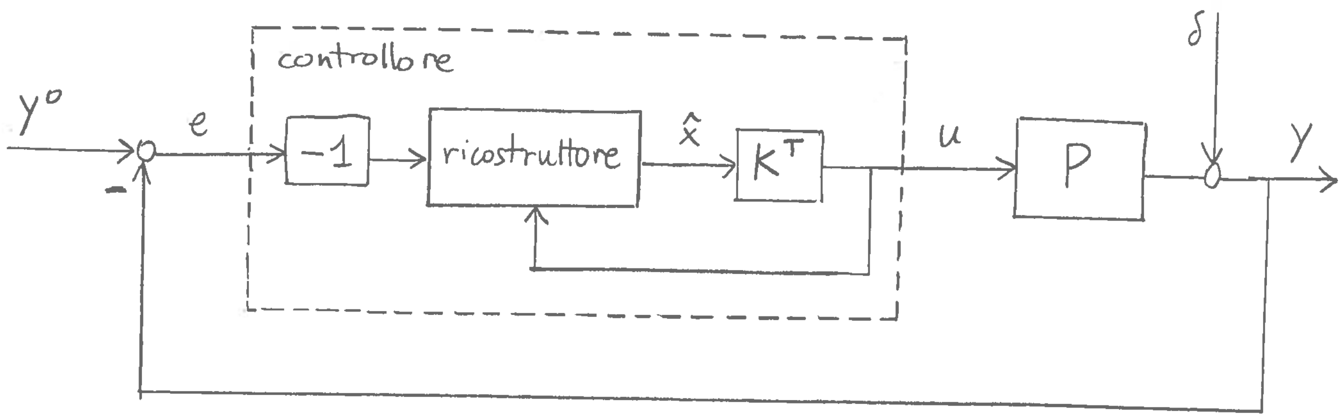
- Un semplice controllo in anello <u>aperto</u> della precisione del controllo (la velocità resta controllata in anello chiuso)



- funziona bene solo se $\delta = 0$
- e solo se μ_{vy} è noto con precisione ma μ_{vy} dipende da μ!

Ma non è una soluzione <u>robusta</u>.

<u>Uno schema di controllo sostanzialmente equivalente</u>



- Lo schema è conforme a quello tipico di un sistema di controllo (visto nell'Introduzione al corso).
- Se $y^o = 0$ lo schema è equivalente al precedente con $v = 0$.
- Se $y^o \neq 0$ il ricostruttore riceve in ingresso $y - y^o$ e non y, pertanto $\hat{x}$ non tenderà a x. I $2n$ autovalori del sistema di controllo sono però gli stessi (quelli delle matrici $A + bk^T$ e $A + lc^T$). In particolare, se $y^o =$ costante e $\delta = 0$ risulta

$$\dot{\hat{x}} - \dot{x} = A\hat{x} + \cancel{bu} + l(\hat{y} - (y - y^o)) - Ax - \cancel{bu}$$
$$= (A + lc^T)(\hat{x} - x) + l y^o \implies \hat{x} - x \to -(A + lc^T)^{-1} l y^o$$

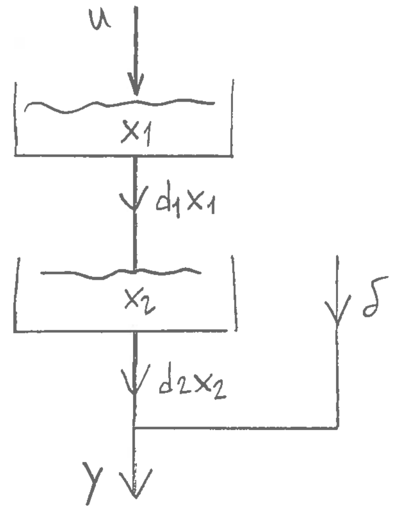
- Calcolo dei guadagni μ_{y^oy} e $\mu_{\delta y}$

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + bk^T\hat{x} + l(c^T\hat{x} + dk^T\hat{x} + e) = \overbrace{\left[A + (b + dl)k^T + lc^T\right]}^{M}\hat{x} + le$$

$$\mu_R = \mu_{eu} = -k^T M^{-1} l, \quad \mu_{y^oy} = \frac{\mu_R \mu}{1 + \mu_R \mu}, \quad \mu_{\delta y} = \frac{1}{1 + \mu_R \mu}$$

— Il legame tra k^T, ℓ e μ_R resta non semplice, ma si capisce che le prestazioni e la robustezza migliorano se μ_R è grande. Generalmente μ_R cresce con gli elementi di k^T, ℓ, i quali crescono con la velocità richiesta al sistema di controllo.

Esempio 1: controllo di portata



$d_1 = 10\ gg^{-1}$, $d_2 = 1\ gg^{-1}$

riferimento $y^\circ =$ costante, $\delta = 0$

costanti di tempo desiderate

— processo : $T_1 = 0.1\ gg$, $T_2 = 0.5\ gg$

— ricostruttore : $T_3 = 0.1\ gg$, $T_4 = 0.1\ gg$

$$A = \begin{bmatrix} -d_1 & 0 \\ d_1 & -d_2 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad R = \begin{bmatrix} 1 & -d_1 \\ 0 & d_1 \end{bmatrix} \quad \det R \neq 0$$

$$c^T = \begin{bmatrix} 0 & d_2 \end{bmatrix} \quad d = [0] \qquad \mathcal{O} = \begin{bmatrix} 0 & d_2 \\ d_1 d_2 & -d_2^2 \end{bmatrix} \quad \det \mathcal{O} \neq 0$$

$$A + bk^T = \begin{bmatrix} k_1 - d_1 & k_2 \\ d_1 & -d_2 \end{bmatrix} \qquad \Delta_{A+bk^T}(\lambda) = \lambda^2 + (d_1 + d_2 - k_1)\lambda - d_2(k_1 - d_1) - d_1 k_2$$

$$= \left(\lambda + \frac{1}{T_1}\right)\left(\lambda + \frac{1}{T_2}\right) = \lambda^2 + \left(\frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2}\right)\lambda + \frac{1}{T_1 T_2}$$

$$A + \ell c^T = \begin{bmatrix} -d_1 & d_2 \ell_1 \\ d_1 & d_2(\ell_2 - 1) \end{bmatrix} \qquad \Delta_{A+\ell c^T}(\lambda) = \lambda^2 + (d_1 + d_2 - d_2 \ell_2)\lambda - d_1 d_2 (\ell_1 + \ell_2 - 1)$$

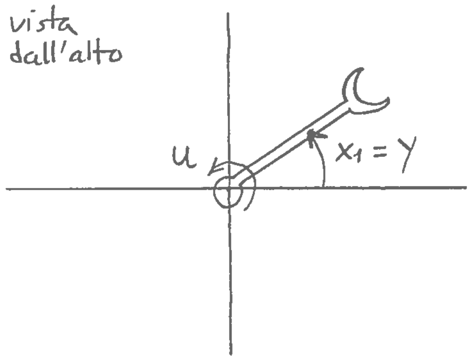
$$= \left(\lambda + \frac{1}{T_3}\right)\left(\lambda + \frac{1}{T_4}\right) = \lambda^2 + \left(\frac{1}{T_3} + \frac{1}{T_4}\right) + \frac{1}{T_3 T_4}$$

$$\begin{cases} k_1 = d_1 + d_2 - \dfrac{1}{T_1} - \dfrac{1}{T_2} \\ k_2 = -\dfrac{1}{d_1}\left(d_2\left(d_2 - \dfrac{1}{T_1} - \dfrac{1}{T_2}\right) + \dfrac{1}{T_1 T_2} \right) \end{cases} \qquad \begin{cases} \ell_1 = -\dfrac{1}{d_1 d_2}\left(d_1\left(d_1 - \dfrac{1}{T_3} - \dfrac{1}{T_4}\right) + \dfrac{1}{T_3 T_4} \right) \\ \ell_2 = \dfrac{1}{d_2}\left(d_1 + d_2 - \dfrac{1}{T_3} - \dfrac{1}{T_4} \right) \end{cases}$$

$\mu_R \cong 0.68$, $\mu = 1$ (ovvio!) $\Rightarrow$ $\mu_{y^\circ y} \cong 0.41$, $\mu_{dy} \cong 0.60$

Nota: richiedendo maggior velocità di controllo
$T_1 = 0.05\ gg$, $T_2 = 0.1\ gg$, $T_3 = T_4 = 0.01\ gg$ $\Rightarrow$ $\mu_R \cong 13.51$

Esempio 2 : controllo di posizione di un braccio robotizo



$J = 1500\ \mathrm{Kgm^2}$, $h = 200\ \mathrm{Nms}$
riferimento y^o = costante
costanti di tempo desiderate
- processo : $T_1 = 2s$, $T_2 = 1s$
- ricostruttore : $T_3 = 0.1s$, $T_4 = 0.05s$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{h}{J} \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{J} \end{bmatrix} \qquad R = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{J} \\ \frac{1}{J} & -\frac{h}{J^2} \end{bmatrix} \quad \det R \neq 0$$

$$c^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \quad d = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} \qquad \mathcal{O} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \det \mathcal{O} \neq 0$$

$$A + bk^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{k_1}{J} & \frac{k_2 - h}{J} \end{bmatrix} \qquad \Delta_{A+bk^T}(\lambda) = \lambda^2 + \frac{h - k_2}{J}\lambda - \frac{k_1}{J}$$

$$= \lambda^2 + \left(\frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2}\right)\lambda + \frac{1}{T_1 T_2}$$

$$A + \ell c^T = \begin{bmatrix} \ell_1 & 1 \\ \ell_2 & -\frac{h}{J} \end{bmatrix} \qquad \Delta_{A+\ell c^T}(\lambda) = \lambda^2 + \left(\frac{h}{J} - \ell_1\right)\lambda - \ell_1 \frac{h}{J} - \ell_2$$

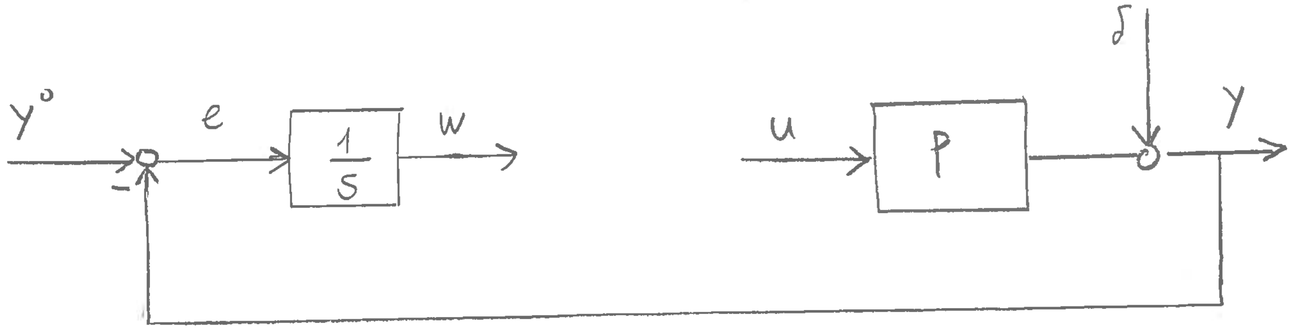
$$= \lambda^2 + \left(\frac{1}{T_3} + \frac{1}{T_4}\right)\lambda + \frac{1}{T_3 T_4}$$

$$\begin{cases} k_1 = -\dfrac{J}{T_1 T_2} \\ k_2 = J\left(\dfrac{h}{J} - \dfrac{1}{T_1} - \dfrac{1}{T_2}\right) \end{cases} \qquad \begin{cases} \ell_1 = \dfrac{h}{J} - \dfrac{1}{T_3} - \dfrac{1}{T_4} \\ \ell_2 = -\dfrac{h}{J}\left(\dfrac{h}{J} - \dfrac{1}{T_3} - \dfrac{1}{T_4}\right) - \dfrac{1}{T_3 T_4} \end{cases}$$

$$\mu_R = 621{,}59\ ,\ \mu = \infty! \Rightarrow \mu_{y^o y} = 1\ ,\ \mu_{dy} = 0$$

Nota: un integratore nella linea di andata (nel regolatore o nel processo) garantisce precisione di controllo a fronte di riferimento e disturbo costanti. Infatti, con ingressi (y^o e δ) costanti e sistema di controllo as. stab., tutti i segnali tendono ad un valore costante. Pertanto $e \to 0$, altrimenti l'uscita dell'integratore non tenderebbe ad una costante.

Uno schema con regolazione a zero dell'errore



- Se il sistema in figura, con stato $z = \begin{bmatrix} x \\ \xi \end{bmatrix}$ è c.r. dall'ingresso u (ciò richiede che P non abbia zeri nell'origine!) e c.o. dall'uscita $w = \xi$, possiamo determinare un regolatore che assegni "arbitrariamente" i $2(n+1)$ autovalori del sistema di controllo.

- In assenza di disturbo ($\delta = 0$), il sistema è descritto da

$$\dot{x} = Ax + bu, \quad y = c^T x + du$$
$$\dot{\xi} = e = y^\circ - c^T x - du, \quad w = \xi$$
$$\dot{z} = \tilde{A} z + \tilde{B} \begin{bmatrix} u \\ y^\circ \end{bmatrix}, \quad w = \tilde{c}^T z + \tilde{d}^T \begin{bmatrix} u \\ y^\circ \end{bmatrix}$$

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ -c^T & 0 \end{bmatrix} \quad \tilde{B} = \begin{bmatrix} \overbrace{\begin{matrix} b \\ -d \end{matrix}}^{\tilde{b}} & \begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix} \end{bmatrix}$$

$$\tilde{c}^T = [\,0 \quad 1\,] \quad \tilde{d}^T = [\,0 \quad 0\,]$$

$$R = \begin{bmatrix} b & Ab & A^2 b & \cdots & A^n b \\ -d & -c^T b & -c^T Ab & \cdots & -c^T A^{n-1} b \end{bmatrix}$$

$\det R \neq 0 \Leftrightarrow$ P è c.r. e $\mu = -c^T A^{-1} b + d \neq 0$

Infatti (per Cayley-Hamilton) risulta

$$\alpha_n b + \alpha_{n-1} Ab + \cdots + \alpha_1 A^{n-1} b + A^n b = 0$$

che moltiplicando per $c^T A^{-1}$ a sinistra diventa

$$\alpha_n c^T A^{-1} b + \alpha_{n-1} c^T b + \cdots + \alpha_1 c^T A^{n-2} b + c^T A^{n-1} b = 0$$

quindi, con (A, b) c.r., se (e solo se) $d = c^T A^{-1} b$ ($\mu = 0$) le $n+1$ colonne di R sono linearmente dipendenti

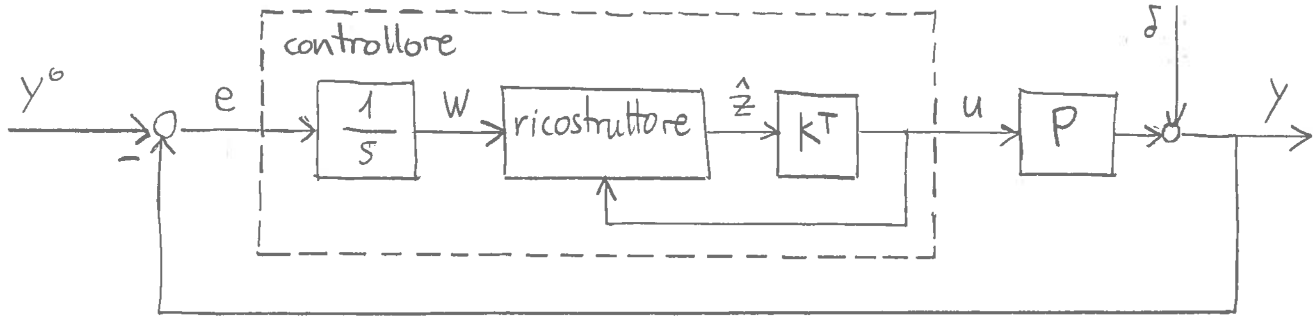
$$\vartheta = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -c^T & 0 \\ -c^T A & 0 \\ \vdots & \vdots \\ -c^T A^{n-1} & 0 \end{bmatrix}$$

$\det \vartheta \neq 0 \Leftrightarrow$ P è c.o.

- L'equazione di stato del ricostruttore (sempre con $\delta = 0$) dovrebbe essere

$$\dot{\hat{z}} = \tilde{A} \hat{z} + \tilde{b} u + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} y^\circ + \ell (\tilde{c}^T \hat{z} - \tilde{c}^T z)$$

ma togliamo il contributo di y°. Ciò permette di ottenere lo schema seguente, che ha comunque per autovalori quelli di $\tilde{A} + \tilde{b} k^T$ e $\tilde{A} + \ell \tilde{c}^T$.



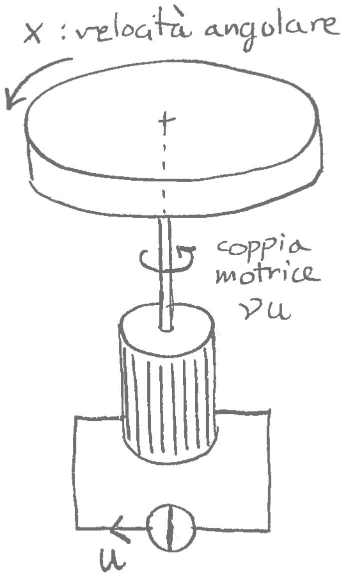
- Ovviamente $\hat{z}$ non tende a z. Per es., con y^o costante e $\delta = 0$, risulta:

$$\dot{\hat{z}} - \dot{z} = \tilde{A}\hat{z} + \cancel{\tilde{b}u} + \ell(\tilde{c}^T\hat{z} - \tilde{c}^T z) - \tilde{A}z - \cancel{\tilde{b}u} - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} y^o$$
$$= (\hat{A} + \ell\tilde{c}^T)(\hat{z} - z) - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} y^o$$
$$\Rightarrow \hat{z} - z \longrightarrow (\tilde{A} + \ell\tilde{c}^T)^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} y^o$$

- Se il sistema di controllo è as. stab., $e \to 0$ a fronte di ingressi y^o e δ costanti. Ciò anche se P non è esattamente descritto dal sistema (A, b, c^T, d) (robustezza del sistema di controllo!)

- Se si mettono I integratori in cascata, $I > 1$, e si assegnano i corrispondenti $2(n+I)$ autovalori del sistema di controllo garantendo as. stabilità, allora $e \to 0$ a fronte di ingressi y^o e δ polinomiali in t di grado $< I$. Infatti, ciascun segnale nell'anello, inclusa l'uscita w dell'ultimo integratore, tenderà ad un polinomio di grado $< I$ e quindi l'errore e in ingresso al primo integratore tenderà a zero (altrimenti w tenderà ad un polinomio di grado I). Tipicamente non è interessante considerare y^o e δ polinomiali (di grado ≥ 1) per $t \to \infty$, ma solo per un intervallo di tempo finito, per es. per avere buona precisione di controllo durante gli avviamenti degli impianti.

Esempio: controllo di velocità di un motore elettrico DC



$J = 1\ \mathrm{Kg\,m^2}$, $h = 20\ \mathrm{Nms}$, $\nu = 100\ \mathrm{Nm A^{-1}}$

riferimento $y^0 =$ costante

costanti di tempo desiderate

- processo : $T_1 = 0.2\,s$, $T_2 = 0.1\,s$
- ricostruttore : $T_3 = 0.02\,s$, $T_4 = 0.01\,s$

$$\dot{x} = \frac{1}{J}(\nu u - h x), \quad y = x$$

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} -\frac{h}{J} & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad \tilde{B} = \begin{bmatrix} \overset{\tilde{b}}{\boxed{\begin{matrix}\frac{\nu}{J} \\ 0\end{matrix}}} & \begin{matrix}0 \\ 1\end{matrix} \end{bmatrix} \qquad R = \begin{bmatrix} \frac{\nu}{J} & -\frac{h\nu}{J^2} \\ 0 & -\frac{\nu}{J} \end{bmatrix} \quad \det R \neq 0$$

$$\tilde{c}^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \tilde{d}^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathcal{O} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad \det \mathcal{O} \neq 0$$

Infatti il processo $\left(a = -\frac{h}{J}, b = \frac{\nu}{J}, c = 1, d = 0\right)$ e' c.r., c.o. e senza zeri nell'origine $\left[P(s) = (\nu/h)/(1 + sJ/h)\right]$

$$\tilde{A} + \tilde{b}K^T = \begin{bmatrix} \frac{\nu K_1 - h}{J} & \frac{\nu K_2}{J} \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \Delta_{\tilde{A}+\tilde{b}K^T}(\lambda) = \lambda^2 + \frac{h - \nu K_1}{J}\lambda + \frac{\nu K_2}{J}$$

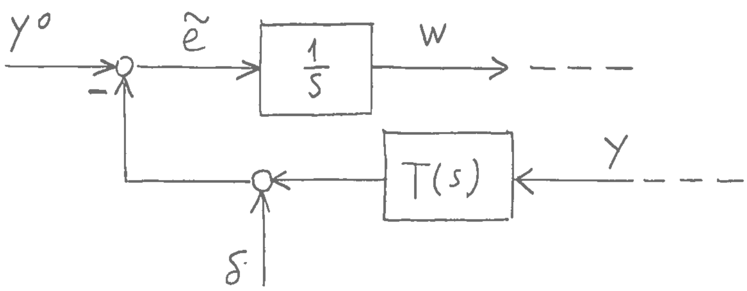
$$= \lambda^2 + \left(\frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2}\right)\lambda + \frac{1}{T_1 T_2}$$

$$\tilde{A} + l\tilde{c}^T = \begin{bmatrix} -\frac{h}{J} & l_1 \\ -1 & l_2 \end{bmatrix} \qquad \Delta_{\tilde{A}+l\tilde{c}^T}(\lambda) = \lambda^2 + \left(\frac{h}{J} - l_2\right)\lambda + l_1 - \frac{h}{J}l_2$$

$$= \lambda^2 + \left(\frac{1}{T_3} + \frac{1}{T_4}\right)\lambda + \frac{1}{T_3 T_4}$$

$$\begin{cases} K_1 = \frac{J}{\nu}\left(\frac{h}{J} - \frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2}\right) \\ K_2 = \frac{J}{\nu}\frac{1}{T_1 T_2} \end{cases} \qquad \begin{cases} l_1 = \frac{h}{J}\left(\frac{h}{J} - \frac{1}{T_3} - \frac{1}{T_4}\right) + \frac{1}{T_3 T_4} \\ l_2 = \frac{h}{J} - \frac{1}{T_3} - \frac{1}{T_4} \end{cases}$$

- Considerando il trasduttore per y ed eventuali disturbi sulla misura, ovviamente $\tilde{e} \to 0$, ma non $e = y^o - y$.



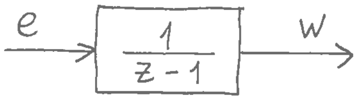
Per es., se y^o e δ sono costanti (e il sistema di controllo as. stab.) a regime si ottiene

$$\tilde{e} = 0 \Rightarrow y^o = \delta + \mu_T y \Rightarrow e = y^o - y = \delta + (\mu_T - 1) y$$

Ovviamente gli errori di misura ($\delta \neq 0, \mu_T \neq 1$) sono un limite per il controllo in anello chiuso.

- La trattazione si può fare anche a tempo discreto. Non cambia praticamente nulla. L'integratore a t.d. ha equazione di stato

$$\begin{aligned} \xi(t+1) &= \xi(t) + e(t) \\ &= \xi(t) + y^o(t) - \delta(t) - c^T x(t) - du(t) \end{aligned}$$



pertanto cambiano anche i seguenti elementi:

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ -c^T & 1 \end{bmatrix} \quad R = \begin{bmatrix} b & Ab & A^2 b & \cdots & A^n b \\ -d & -(c^T b + d) & -(c^T A b + c^T b + d) & \cdots & -(c^T A^{n-1} b + \cdots + c^T b + d) \end{bmatrix}$$

$\det R \neq 0 \Leftrightarrow$ P è c.r. e $\mu = c^T (I - A)^{-1} b + d \neq 0$

Infatti, moltiplicando $\alpha_n b + \alpha_{n-1} Ab + \cdots + \alpha_1 A^{n-1} b + A^n b$ (Cayley-Hamilton) a sinistra per $c^T (I-A)^{-1}$, se (e solo se) $d = -c^T (I-A)^{-1} b$ ($\mu = 0$), si ottiene la combinazione $\alpha_n, \alpha_{n-1}, \ldots, \alpha_1, 1$ dei blocchi in seconda riga di R e quindi $\det R = 0$. Sviluppando $(I-A)^{-1} = I + A + A^2 + \cdots$ (serie geometrica di matrice), il blocco $(i+1)$-esimo si può infatti scrivere come $-c^T (A^{i-1} + \cdots + A + I - (I + A + A^2 + \cdots)) b = c^T (I-A)^{-1} A^i b$.

Ovviamente cambiano anche le formule dell'errore asintotico di ricostruzione (con $\delta = 0$)

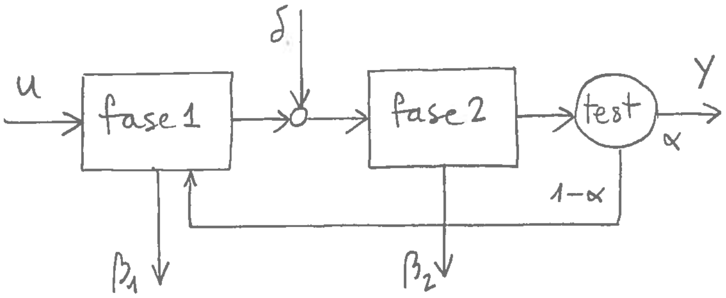
$$\hat{z} - z \to -(I - (A + \ell c^T))^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} y^o \quad \left(\hat{x} - x \to (I - (A + \ell c^T))^{-1} \ell y^o \ \text{caso senza integratore} \right)$$

e dei guadagni (pg. 1 e 2)

$$\mu_{uu_R} = -k^T (I - (A + \ell c^T))^{-1} (b + d\ell), \quad \mu_R = \mu_{eu} = k^T (I - M)^{-1} \ell$$

$$\mu_{yu_R} = k^T (I - (A + \ell c^T))^{-1} \ell$$

Esempio: controllo di produzione (in tempo finito)



$$
\begin{aligned}
x_1(t+1) &= u(t) + (1-\alpha)(1-\beta_2)\,x_2(t) \\
x_2(t+1) &= (1-\beta_1)\,x_1(t) + d(t) \\
y(t) &= \alpha(1-\beta_2)\,x_2(t)
\end{aligned}
$$

$$
A = \begin{bmatrix} 0 & (1-\alpha)(1-\beta_2) \\ 1-\beta_1 & 0 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad R = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1-\beta_1 \end{bmatrix} \quad \det R \neq 0
$$

$$
c^T = \begin{bmatrix} 0 & \alpha(1-\beta_2) \end{bmatrix} \quad d = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} \qquad \mathcal{O} = \begin{bmatrix} 0 & \alpha(1-\beta_2) \\ \alpha(1-\beta_1)(1-\beta_2) & 0 \end{bmatrix} \quad \det \mathcal{O} \neq 0
$$

$$
\mu = c^T(I-A)^{-1}b + d = \frac{\alpha(1-\beta_1)(1-\beta_2)}{1-(1-\alpha)(1-\beta_1)(1-\beta_2)} \neq 0
$$

$$
\tilde{A} = \begin{bmatrix} 0 & (1-\alpha)(1-\beta_2) & 0 \\ 1-\beta_1 & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha(1-\beta_2) & 1 \end{bmatrix} \qquad \tilde{B} = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \tilde{b} & \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}
$$

$$
\tilde{c}^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \tilde{d}^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}
$$

$$
\tilde{A} + \tilde{b}k^T = \begin{bmatrix} k_1 & (1-\alpha)(1-\beta_2)+k_2 & k_3 \\ 1-\beta_1 & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha(1-\beta_2) & 1 \end{bmatrix}
$$

$$
\begin{aligned}
\Delta_{\tilde{A}+\tilde{b}k^T}(\lambda) = \lambda^3 &- (k_1+1)\lambda^2 \\
&+ \big(k_1 - k_2(1-\beta_1) - (1-\alpha)(1-\beta_1)(1-\beta_2)\big)\lambda \\
&+ k_2(1-\beta_1) + k_3\alpha(1-\beta_1)(1-\beta_2) \\
&+ (1-\alpha)(1-\beta_1)(1-\beta_2)
\end{aligned}
$$

$$
\tilde{A} + \ell\tilde{c}^T = \begin{bmatrix} 0 & (1-\alpha)(1-\beta_2) & \ell_1 \\ 1-\beta_1 & 0 & \ell_2 \\ 0 & -\alpha(1-\beta_2) & \ell_3+1 \end{bmatrix}
$$

$$
\begin{aligned}
\Delta_{\tilde{A}+\ell\tilde{c}^T}(\lambda) = \lambda^3 &- (\ell_3+1)\lambda^2 \\
&+ \big(\ell_2\alpha(1-\beta_2) - (1-\alpha)(1-\beta_1)(1-\beta_2)\big)\lambda \\
&+ \ell_1\alpha(1-\beta_1)(1-\beta_2) \\
&+ (\ell_3+1)(1-\alpha)(1-\beta_1)(1-\beta_2)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{cases} k_1 = -1 \\[2mm] k_2 = -\dfrac{1+(1-\alpha)(1-\beta_1)(1-\beta_2)}{1-\beta_1} \\[2mm] k_3 = \dfrac{1}{(1-\beta_1)(1-\beta_2)} \end{cases} \qquad \begin{cases} \ell_1 = 0 \\[2mm] \ell_2 = \dfrac{(1-\alpha)(1-\beta_1)}{\alpha} \\[2mm] \ell_3 = -1 \end{cases}
$$