

**Simulazione di un modello di competizione batterica – Soluzioni**

Per risolvere questo esercizio occorre tradurre in uno schema Simulink il sistema non lineare dato ( $r_1 = 5$ ,  $r_2 = 5$ ,  $K_1 = 1$ ,  $K_2 = 2$ ,  $a = 10$ )<sup>1</sup>

$$\dot{x}_1 = r_1 x_1 \left(1 - \frac{x_1}{K_1}\right) - a x_1 x_2 = 5x_1(1 - x_1) - 10x_1 x_2 = f_1(x_1, x_2)$$
$$\dot{x}_2 = r_2 x_2 \left(1 - \frac{x_2}{K_2}\right) - a x_1 x_2 = 5x_2 \left(1 - \frac{x_2}{2}\right) - 10x_1 x_2 = f_2(x_1, x_2)$$

Per definire le due funzioni  $f_1(x_1, x_2)$  e  $f_2(x_1, x_2)$  si possono utilizzare due blocchi Simulink *MATLAB Function* contenuti nella libreria *User Defined Function*. I blocchi restituiscono i valori di  $\dot{x}_1$  e  $\dot{x}_2$  e sono così definiti:

$f_1(x_1, x_2) \rightarrow$  `function y = fcn_x1_dot(x1,x2)`  
`y = 5*x1*(1-x1/1)-10*x1*x2;`

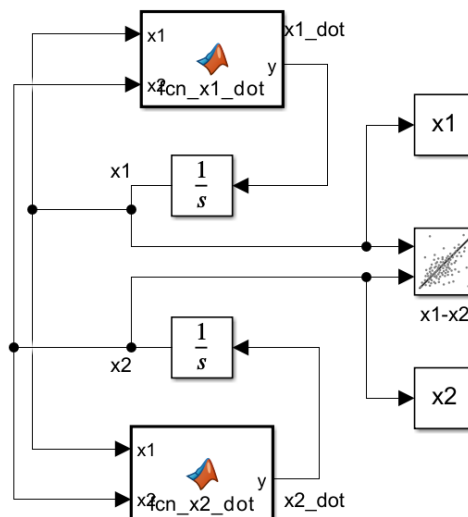
$f_2(x_1, x_2) \rightarrow$  `function y = fcn_x2_dot(x1,x2)`  
`y = 5*x2*(1-x2/2)-10*x1*x2;`

Per ottenere le variabili di stato  $x_1$  e  $x_2$  basterà integrare le uscite  $\dot{x}_1$  e  $\dot{x}_2$  dei due blocchi *MATLAB Function* con due integratori (libreria *Continuous*  $\rightarrow$  *Integrator*)

Per rappresentare le traiettorie nello spazio di stato, utilizziamo il blocco *X-Y graph*, all'interno della libreria *Sinks*.

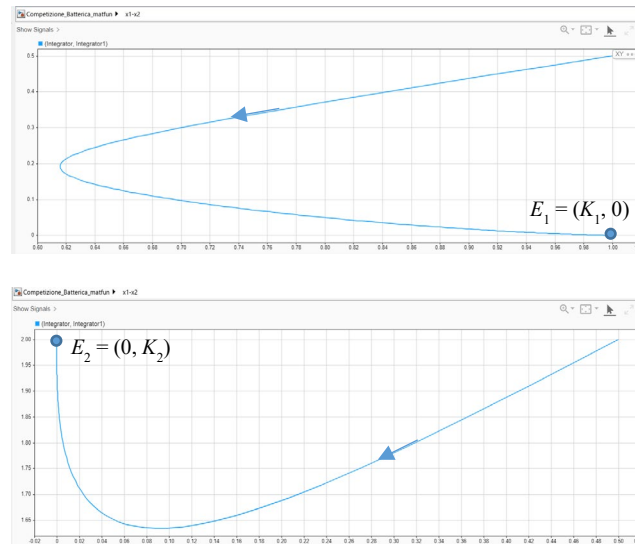
Inoltre, con due blocchi *To Workspace* (libreria *Sinks*) restituiamo a Matlab l'andamento delle variabili di stato  $x_1$  e  $x_2$ : sarà così più "semplice" visualizzare le traiettorie del sistema.

Quindi, lo schema risulta essere (file *Competizione\_Batterica\_matfun*):

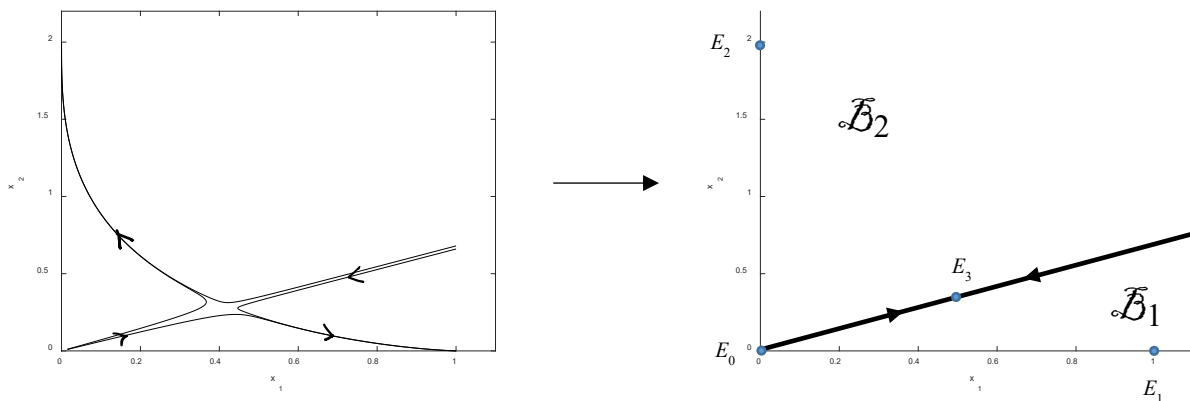


Simulando il comportamento del sistema (per 10 unità di tempo) si ottengono i seguenti risultati (la condizione iniziale fissata nei blocchi integratori è pari a (1, 0.5) e (0.5, 2)):

<sup>1</sup> Gli equilibri del modello sono:  $E_0 = (0, 0)$ ,  $E_1 = (K_1, 0) = (1, 0)$ ,  $E_2 = (0, K_2) = (0, 2)$ ,  $E_3 = (3/7, 2/7)$ . Con il metodo della linearizzazione, si dimostra che  $E_0$  ed  $E_3$  sono instabili mentre  $E_1$  ed  $E_2$  sono asintoticamente stabili.



Il sistema presenta quindi due comportamenti asintoticamente stabili alternativi:  $(K_1, 0)$  e  $(0, K_2)$ . Per valutarne i bacini di attrazione, si eseguono varie simulazioni per varie condizioni iniziali  $((1, 0.68), (1, 0.66), (0.016, 0.01)$  e  $(0.014, 0.01))$  e il risultato è mostrato in figura<sup>2</sup>:



### **NOTA:**

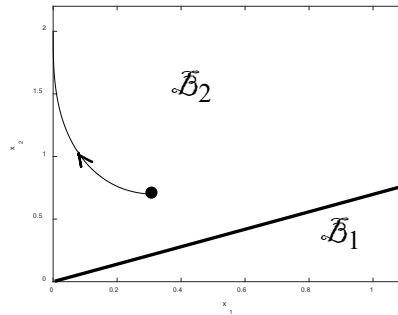
Per ottenere il quadro delle traiettorie del sistema (riportato a sinistra) si può ripetere questa procedura (file *Competizione\_Batterica\_mat*):

- 1 – cambiare le condizioni iniziali delle variabili di stato nei blocchi integratori,
- 2 – simulare il modello in Simulink (le variabili di stato vengono restituite nel workspace di Matlab),
- 3 – graficare l'andamento della traiettoria in ambiente Matlab attraverso i comandi  
`plot(x1,x2,'k-')` % disegno andamento traiettoria simulata in Simulink  
`hold on` % per aggiungere altri grafici senza cancellare quelli già esistenti

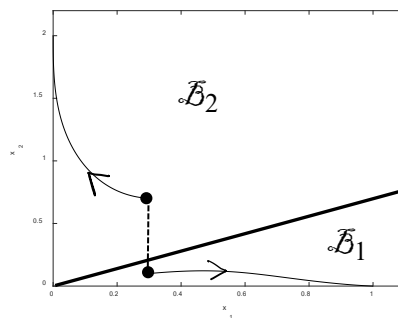
### **Addendum a cura del docente**

Supponiamo ora che si stia instaurando una situazione che porti a uno stato di malattia (dominanza di batteri nocivi). Possiamo ipotizzare quindi che lo stato iniziale del sistema sia, ad esempio, il punto  $(0.3, 0.7)$ ; essendo questo nel bacino di attrazione  $\mathcal{B}_2$  dell'equilibrio  $(0, K_2)$ , tenderanno a dominare i batteri nocivi.

<sup>2</sup> La frontiera dei bacini di attrazione è una traiettoria rettilinea per il sistema (quella segnata in neretto). Tale traiettoria è percorsa, allontanandosi da  $E_0$ , convergendo verso  $E_3$ . L'equazione di tale retta ( $x_2 = \alpha x_1$ ) si trova determinando il parametro  $\alpha$  per il quale, presa una condizione iniziale  $x_2(0) = \alpha x_1(0)$ , si ha:  $\dot{x}_2(0) = \alpha \dot{x}_1(0)$ . Con alcuni passaggi si ottiene  $\alpha = 2/3$ .



Per portare a guarigione l'individuo si possono utilizzare antibiotici che riducono i batteri nocivi. Supponendo quindi che la condizione iniziale passi, a seguito dell'assunzione, al valore  $(0.3, 0.1)$  (appartenente al bacino  $\mathcal{B}_1$ ), il sistema si porterà alla dominanza dei batteri utili  $(K_1, 0)$ .



Tuttavia, per ridurre in tale modo la densità dei batteri nocivi, è necessario un forte uso (abuso) di antibiotici che può essere nocivo per l'individuo. Pertanto, si può pensare a una cura combinata di antibiotici (in moderata quantità) e fermenti lattici (che aumentano la densità di batteri utili).

Supponendo pertanto una nuova condizione iniziale pari a  $(0.45, 0.25)$  in cui la riduzione di densità batterica nociva è inferiore rispetto al caso del solo uso di antibiotici, il sistema si può comunque trovare in  $\mathcal{B}_1$  e portare così l'individuo a piena guarigione.

