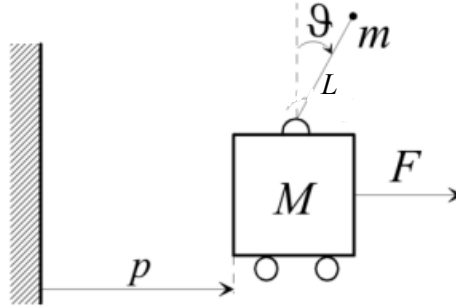


Laboratorio Matlab – Fondamenti di Automatica

Stabilizzazione di un pendolo inverso – Testo

Si consideri il sistema meccanico (carrello con pendolo inverso) riportato in figura:



Il carrello, di massa M , è in moto rettilineo sotto l'azione di una forza F e porta incernierata un'asta di massa trascurabile e lunghezza L , al cui estremo è presente una massa concentrata di valore m . Detta p la posizione del carrello e ϑ la posizione angolare dell'asta, misurata come in figura, il modello matematico del sistema è il seguente:

$$\begin{cases} (M + m)\ddot{p} - mL\dot{\vartheta}^2 \sin(\vartheta) + mL\ddot{\vartheta} \cos(\vartheta) = F \\ mL^2\ddot{\vartheta} + mL\ddot{p} \cos(\vartheta) - mgL \sin(\vartheta) = 0 \end{cases}$$

Si noti che il sistema è non lineare; linearizzando le equazioni intorno allo stato di equilibrio caratterizzato da posizioni e velocità (lineari ed angolari) nulle e da forza nulla, esplicitando le derivate seconde si ottiene

$$\begin{cases} \delta\ddot{p} = -\frac{m}{M}g\delta\vartheta + \frac{1}{M}\delta F \\ \delta\ddot{\vartheta} = \frac{g}{L}\frac{M+m}{M}\delta\vartheta - \frac{1}{LM}\delta F \end{cases}$$

Ponendo

$$\begin{array}{llll} x_1 = \delta p & x_2 = \delta \dot{p} & x_3 = \delta \vartheta & x_4 = \delta \dot{\vartheta}, \\ u = \delta F & & y = \delta p & \end{array}$$

le equazioni di stato e uscita che caratterizzano il sistema sono

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\frac{m}{M}gx_3 + \frac{1}{M}u \\ \dot{x}_3 &= x_4 \\ \dot{x}_4 &= \frac{g}{L}\frac{M+m}{M}x_3 - \frac{1}{LM}u \\ y &= x_1 \end{aligned}$$

Siano $M = 10$ kg, $m = 1$ kg, $L = 1$ m, $g = 9.81$ m s⁻².

1. Si scrivano le matrici A , b , c e d del sistema linearizzato.
2. Si verifichi che l'equilibrio $(0,0)$ è instabile.

3. Si verifichi che il sistema è completamente raggiungibile e completamente osservabile.
4. Con riferimento al punto precedente, si progetti un regolatore lineare (composto da ricostruttore dello stato l e da legge di controllo k) tale che
- a partire dalle misure di $F(u)$ e $\delta p(x_1 = y)$, sia possibile ricostruire tutto lo stato del sistema al più in 0.5s;
 - la legge di controllo k , porti il sistema regolato all'equilibrio $(0, 0)$ al più in 5s.
5. Rappresentare l'andamento della posizione angolare dell'asta del sistema linearizzato regolato, partendo da condizioni iniziali $x(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\pi}{6} \\ 0 \end{bmatrix}$ e $x(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\pi}{3} \\ 0 \end{bmatrix}$, note con un'incertezza pari a $\begin{bmatrix} 0.01 \\ -0.02 \\ -0.01 \\ 0.02 \end{bmatrix}$.

Addendum a cura del docente

6. Ripetere il punto precedente per il sistema non lineare.