

Laboratorio Matlab – Fondamenti di Automatica
Moto verticale del sedile di un'automobile – Soluzioni

Innanzitutto occorre scrivere il sistema dinamico $M_S \ddot{x} = -k_S x - a_S \dot{x}$ nella forma:

$$\dot{x} = Ax + bu$$

$$y = cx + du$$

Come suggerito, per scrivere il sistema dinamico in forma matriciale si può porre

$$x_1 = x$$

$$x_2 = \dot{x}$$

A questo punto si può scrivere:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= \frac{1}{M_S}(-a_S x_2 - k_S x_1) \\ y &= x_1\end{aligned}$$

Per studiare la stabilità del sistema, occorre conoscere gli autovalori¹ della matrice $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k_S}{M_S} & -\frac{a_S}{M_S} \end{bmatrix}$.

Assegniamo i valori dati alle variabili del problema

```
>> M_s = 250;           % Kg
>> k_s = 5000;          % N/m
>> a_s = 1000;          % N*s/m
```

Ora scriviamo la matrice A e valutiamone gli autovalori:

```
>> A=[0 1;
-k_s/M_s -a_s/M_s];

>> autoval=eig(A)

-2.0000 + 4.0000i
-2.0000 - 4.0000i
```

Essendo entrambi gli autovalori a parte reale negativa, il sistema risulta asintoticamente stabile.

Valutiamo il tempo di risposta del sistema $T_R = 5T_D$ con $T_D = -\frac{1}{\Re(\lambda_D)}$ e λ_D pari all'autovalore con parte reale maggiore (autovalore dominante).

```
>> lambdaD=max(real(autoval)); % parte reale dell'autovalore dominante
>> TD=-1/lambdaD;             % costante di tempo dominante
>> TR=5*TD                     % tempo di risposta
```

¹ Essendo il sistema a tempo continuo del secondo ordine, l'asintotica stabilità è anche garantita dalle condizioni:
 $tr(A) = -\frac{a_S}{M_S} < 0$ e $det(A) = \frac{k_S}{M_S} > 0$

Per considerare la salita di un ulteriore passeggero nell'automobile, occorre modificare la seconda equazione di stato introducendo un termine che descrive la forza peso dello stesso, da ripartire per ruota (m rappresenta la massa del nuovo passeggero):

$$\dot{x}_2 = \frac{1}{M_S} \left(-a_S x_2 - k_S x_1 - \frac{1}{4} m g \right)$$

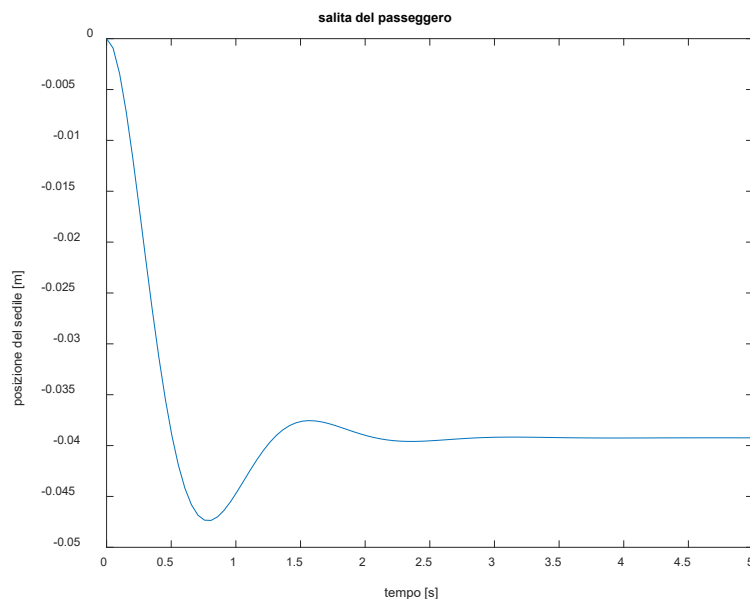
da cui

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k_S}{M_S} & -\frac{a_S}{M_S} \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{mg}{4M_S} \end{bmatrix} \quad c = [1 \quad 0] \quad d = 0$$

NOTA: con tale scelta del vettore b , l'ingresso è costante e pari a 1 in ogni istante di tempo.

Simuliamo quindi la salita del passeggero, partendo dalla condizione iniziale nulla, per un orizzonte temporale pari, per esempio, a due volte il tempo di risposta del sistema (il tempo di risposta rappresenta infatti il tempo necessario affinché il sistema vada a regime):

```
>> m=80; g=9.81;
>> b=[0 -m*g/(4*M_s)]'; c=[1 0]; d=0;
>> sistema=ss(A,b,c,d);3
>> T=linspace(0,2*TR,100); U=ones(size(T));
>> sedile=lsim(sistema,U,T);4
>> figure; plot(T,sedile);
>> xlabel('tempo [s]'); ylabel('posizione del sedile [m]');
>> title('salita del passeggero');
```



Il nuovo equilibrio raggiunto ($\bar{x} = -A^{-1}b\bar{u}$, $\bar{y} = c\bar{x} + d\bar{u}$)⁵ è pari a

```
>> Xeq=-inv(A)*b*1
>> Yeq=c*Xeq+d*1
```

² Posizione e velocità sono positive se dirette verso l'alto.

³ Per sistemi a tempo discreto il comando è: `ss(A, b, c, d, 1)`.

⁴ Per condizione iniziale non nulla il comando è: `lsim(sys, U, T, X0)` con $X0$ vettore di stato iniziale.

⁵ A tempo discreto $\bar{x} = (I - A)^{-1}b\bar{u}$, dove I è la matrice identità di ordine pari all'ordine della matrice A , definita dal comando `eye(size(A))`.

Per risolvere il punto successivo occorre riscrivere l'equazione del sistema che diventa (si veda la sezione “Manto stradale irregolare” nel file AddendumEsercizio1.pdf)

$$M_S \ddot{x} = -a_S \dot{x} - k_S x + k_S x_{strada} + a_S \dot{x}_{strada}$$

da cui

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= \frac{1}{M_S} (-a_S x_2 - k_S x_1 + k_S x_{strada} + a_S \dot{x}_{strada}) \\ y(t) &= x_1(t)\end{aligned}$$

Scrivendo l'ingresso come:

$$u = \begin{bmatrix} x_{strada} \\ \dot{x}_{strada} \end{bmatrix}$$

B e d saranno matrici della forma (A e c non variano rispetto al caso iniziale):

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{k_S}{M_S} & \frac{a_S}{M_S} \end{bmatrix} \quad d = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Si può ora scrivere il nuovo sistema, aggiornando B e d :

```
>> B=[0 0;
k_s/M_s a_s/M_s];
>> d=[0 0];
>> sistema2=ss(A,B,c,d);
```

A questo punto, per simulare il sistema, occorre costruire correttamente l'ingresso e la sua derivata. La funzione `genera_rampa(v)` modella una rampa a pendenza costante, con lunghezza pari a 1 m (d_{rampa}) e altezza 10 cm (h_{rampa}). Si può quindi valutare l'altezza del manto stradale (x_{strada}) in funzione della velocità di percorrenza del veicolo (v):

$$x_{strada}(t) = \begin{cases} 0 & t < t_0 \\ \frac{h_{rampa}}{d_{rampa}} v(t - t_0) & t_0 < t < t_1 \\ h_{rampa} & t > t_1 \end{cases}$$

dove il tempo di salita, dopo aver fissato arbitrariamente t_0 , è così calcolato:

$$t_1 = t_0 + \frac{d_{rampa}}{v}$$

Inoltre

$$\dot{x}_{strada}(t) = \begin{cases} 0 & t < t_0 \\ \frac{h_{rampa}}{d_{rampa}} v & t_0 < t < t_1 \\ 0 & t > t_1 \end{cases}$$

Dunque avendo tutti i dati è possibile generare il vettore di ingresso $u = \begin{bmatrix} x_{strada} \\ \dot{x}_{strada} \end{bmatrix}$.

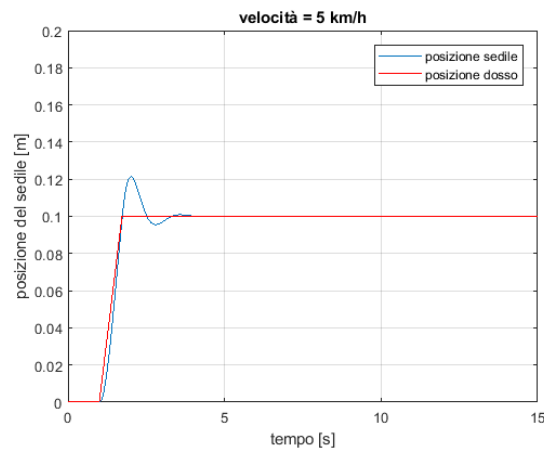
NOTA: le unità di misura da utilizzare affinché i conti siano corretti sono quelle del sistema internazionale (metri, secondi, m/s, etc...).

Si può pertanto risolvere l'ultimo punto nel modo seguente:

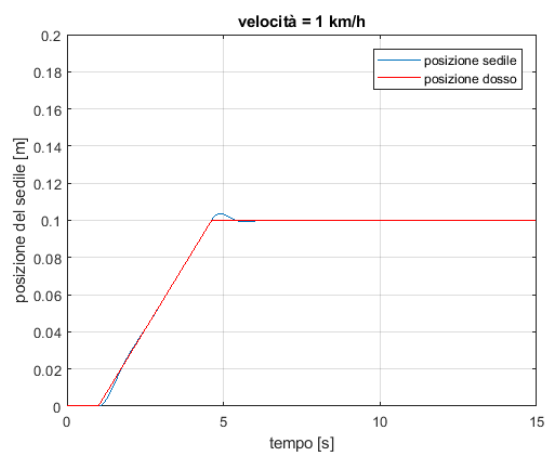
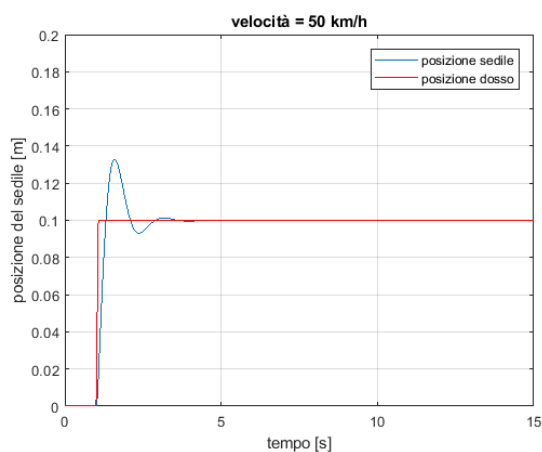
```
>> vel=5/3.6; % m/s
>> [xstrada,xdotstrada,tstrada]=genera_rampa(vel);
>> sedile2=lsim(sistema2,[xstrada;xdotstrada],tstrada);
```

da cui, tracciando solo gli andamenti nel tempo del profilo stradale, cioè l'altezza del dosso (xstrada) e della posizione del sedile (sedile2), si ottiene:

```
>> figure;
>> plot(tstrada,sedile2);
>> grid on
>> xlabel('tempo [s]'); ylabel('posizione del sedile [m]');
>> hold on
>> plot(tstrada,xstrada,'r');
>> legend('posizione sedile','posizione rampa');
>> title(sprintf('velocità = %i km/h',vel*3.6))
>> axis([0 15 0 0.2])
```



Per simulare cosa succede ad altre velocità basta cambiare il valore di `vel`.



Dai grafici ottenuti si può notare che, diminuendo la velocità, si ha una minore elongazione del sedile rispetto alla posizione di regime.

Supponendo infine che il comfort del passeggero dipenda dall'accelerazione verticale del sedile

$$\ddot{x} = \frac{1}{M_S} (-a_S \dot{x} - k_S x + k_S x_{strada} + a_S \dot{x}_{strada})$$

si ottengono i seguenti risultati (da ripetersi per le differenti velocità):

Con $y = x_1 \rightarrow$ posizione x del sedile

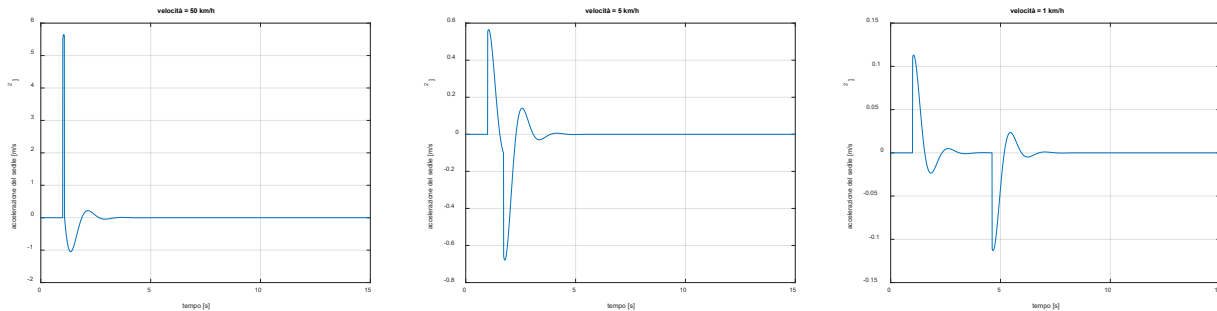
```
>> vel=5/3.6; % m/s
>> [xstrada,xdotstrada,tstrada]=genera_rampa(vel);
>> sedile2=lsim(sistema2,[xstrada;xdotstrada],tstrada);
>> sedile2=sedile2';
% PER COERENZA DI DIMENSIONI VETTORIALI OCCORRE TRASPORRE IL VETTORE sedile2
% usa il comando whos per valutare le dimensioni delle variabili nel workspace
```

Con $y = x_2 \rightarrow$ velocità \dot{x} del sedile (**NB**: cambiando il vettore c , il sistema va ridefinito!)

```
>> c=[0 1];
>> sistema2vel=ss(A,B,c,d);
>> velocita2=lsim(sistema2vel,[xstrada;xdotstrada],tstrada);
>> velocita2=velocita2';
% PER COERENZA DI DIMENSIONI VETTORIALI OCCORRE TRASPORRE IL VETTORE sedile2
% usa il comando whos per valutare le dimensioni delle variabili nel workspace
```

Accelerazione \ddot{x} del sedile

```
>> accel2=(-a_s*velocita2-k_s*sedile2+k_s*xstrada+a_s*xdotstrada)/M_s;
>> figure; plot(tstrada,accel2);
>> grid on;
>> xlabel('tempo [s]');
>> ylabel('accelerazione del sedile [m]');
>> title(sprintf('velocità = %i km/h',vel*3.6))
```



Il comfort, ovviamente, migliora riducendo la velocità di passaggio sulla rampa (le accelerazioni a cui è soggetto il passeggero diminuiscono).

Infatti, si ha:

velocità [km/h]	accelerazione massima [m/s ²]
50	5.6
5	0.6
1	0.11