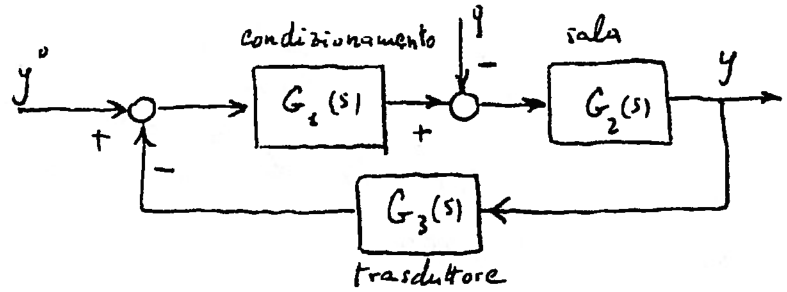
Il sistema di controllo della temperatura y di una sala è rappresentato dallo schema a blocchi di figura, dove il sistema di condizionamento, la sala e il trasduttore di temperatura sono descritti dalle funzioni di trasferimento $G_1(s)$, $G_2(s)$ e $G_3(s)$, y^0 è il valore (costante) desiderato di temperatura e q è una perdita di calore costante presente quando le porte della sala sono aperte.



Supponendo $G_1(s) = \dfrac{\mu}{1+5s}$, $G_2(s) = \dfrac{1}{1+5s}$, $G_3(s) = \dfrac{1}{1+0.2s}$

si risponda alle tre seguenti domande.

(a) Per quali valori del guadagno μ l'effetto del disturbo sulla temperatura d'equilibrio si attenua di almeno 100 volte?

(b) Per quali valori del guadagno μ il sistema risulta esternamente stabile?

(c) Si può determinare un valore di μ (e se sì qual'è questo valore) per cui il sistema risulta esternamente stabile e l'effetto del disturbo è attenuato di 100 volte?

SVOLGIMENTO (sul retro del foglio)

(a) Senza l'anello di regolazione un disturbo $\bar{q}$ si ripercuote direttamente sull'uscita perché il guadagno di G_2 è unitario.

Invece, con la retroazione, un disturbo costante $\bar{q}$ fornisce un contributo in uscita che a transitorio esaurito è pari a

$$\bar{q} \frac{G_2(0)}{1+G_1(0)G_2(0)G_3(0)} = \bar{q} \frac{1}{1+\mu}$$

Per attenuare il disturbo di almeno 100 volte è allora necessario che $(1+\mu) \geq 100$, cioè $\boxed{\mu \geq 99}$

(b) Basta usare la formula delle tre costanti di tempo che dice che il sistema è stabile se

$$\mu \leq \mu_{crit} \triangleq (T_1+T_2+T_3)\left(\frac{1}{T_1}+\frac{1}{T_2}+\frac{1}{T_3}\right)-1 =$$

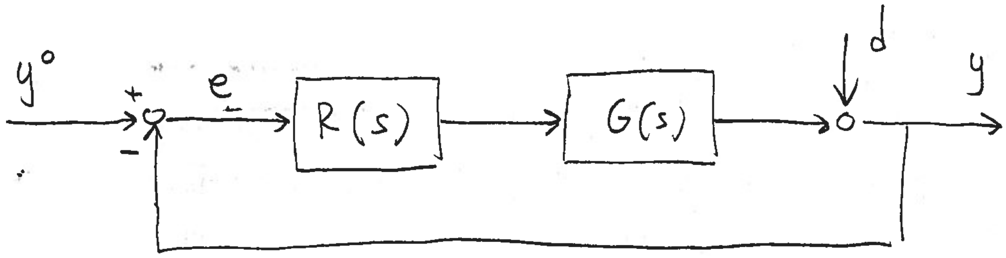
$$= (5+5+0.2)(0.2+0.2+5)-1 =$$

$$= (10.2)(5.4)-1 = 54.8$$

(c) Non esiste pertanto alcun valore di μ che soddisfa i due requisiti perché non può essere che contemporaneamente

$$\mu \geq 99 \quad \text{e} \quad \mu \leq 54.8$$

ESERCIZIO 7.1



$$G(s) = \frac{20}{(1+s)(1+0{,}1s)} \quad , \; y_0(t) = sca(t) \quad , \; d(t) = \sin(0{,}2t)$$

specifiche del progetto:
$$\begin{cases} \phi_m \geq 60^\circ \\ \omega_c \geq 1 \text{ rad/s} \\ |e_\infty| < 0{,}2 \end{cases}$$

$$R(s) = \underbrace{\frac{\mu_R}{s^{g_R}}}_{\substack{\text{prog statico} \\ R^*(s)}} \; \underbrace{\frac{\Pi(1+sT_{R_i})}{\Pi(1+sT_{R_i})}}_{\substack{\text{prog dinamico} \\ \tilde{R}(s)}}$$

progetto statico

$$e_\infty^{y_0} = \begin{cases} \dfrac{1}{1+\mu} = \dfrac{1}{1+20\mu_R} & g=0 \quad (g_R=0) \\ 0 & g \geq 1 \quad (g_R \geq 1) \end{cases}$$

$$|e_\infty^d| = \left|\frac{E(s)}{D(s)}\right|_{s=j0{,}2} \cdot \underset{\substack{\downarrow \\ \text{ampiezza} \\ \text{della sinusoide} \\ \text{d'ingresso}}}{1} = \left| - \frac{1}{1+L(s)} \right|_{s=j0{,}2} \underset{\substack{\downarrow \\ \text{perché } 0{,}2 < \omega_c \geq 1 \text{ rad/s}}}{\simeq} \left|\frac{1}{L(s)}\right|_{s=j0{,}2}$$

$$g=0 \Rightarrow |e_\infty| \leq |e_\infty^{y_0}| + |e_\infty^{d}| \leq 0{,}2$$

$$\begin{cases} |e_\infty^{y_0}| \leq 0{,}1 \\ |e_\infty^{d}| \leq 0{,}1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{1+20\mu_R} \leq 0{,}1 \quad \mu_R \geq \dfrac{9}{20} \rightarrow \boxed{\mu_R = 1} \\ |R(j0{,}2)\cdot G(j0{,}2)| \geq 10 \end{cases}$$

OSS: disturbo in retroazione

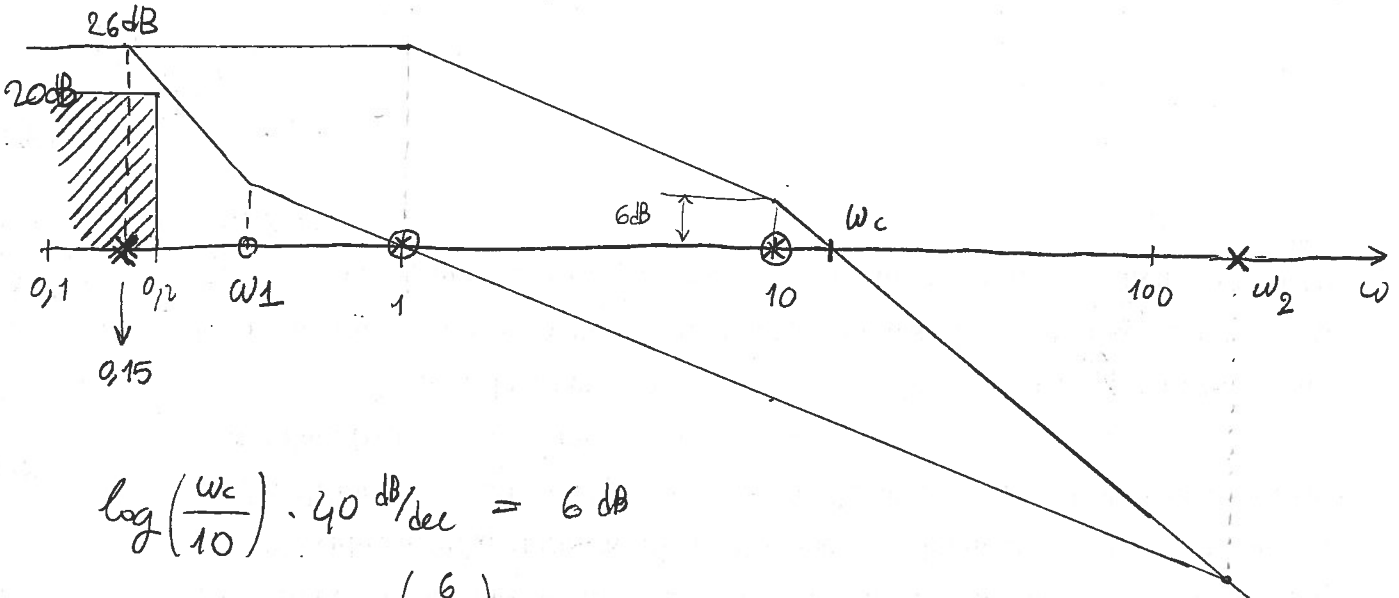
$$\frac{E(s)}{\Delta r(s)} = \frac{L(s)}{1+L(s)} \qquad \left|\frac{E(j\omega)}{\Delta r(j\omega)}\right| \simeq \begin{cases} 1 & \text{se } \omega \ll \omega_c \\ |L(j\omega)| & \text{se } \omega \gg \omega_c \end{cases}$$

se il disturbo sinusoidale è in retroazione e ha $\omega < \omega_c$ non si può fare nulla !!

<u>progetto dinamico</u>

$$L^*(s) = \underbrace{R^*(s)}_{1} G(s) = \frac{20}{(1+s)(1+0{,}1s)}$$

$20\log_{10} 20 \simeq 26$



$$\log\left(\frac{\omega_c}{10}\right)\cdot 40\ ^{dB}/_{dec} = 6\ dB$$

$$\omega_c = 10\cdot 10^{\left(\frac{6}{40}\right)} = 14{,}13\ ^{rad}/_{s}$$

$$\angle L^*(j14{,}13) = -\operatorname{atan}(14{,}13) - \operatorname{atan}(1{,}413) \cong -140^\circ \rightarrow \varphi_m = 40^\circ$$

calcolo ω_1

$$\log\left(\frac{\omega_1}{0,15}\right) \cdot 40\,dB/dec + \log\left(\frac{1}{\omega_1}\right) \cdot 20\,dB/dec = 26\,dB$$

$$\log\left[\left(\frac{\omega_1}{0,15}\right)^2\right] + \log\left(\frac{1}{\omega_1}\right) = \left(\frac{26}{20}\right)$$

$$\log\left(\frac{\omega_1^{\cancel{2}}}{(0,15)^2} \frac{1}{\cancel{\omega_1}}\right) = \frac{26}{20} \qquad \omega_1 = (0,15)^2 \, 10^{\frac{26}{20}} \cong 0,49 \text{ rad/s}$$

calcolo ω_2

$$\log\left(\frac{\omega_2}{1}\right) \cdot \cancel{20}^{\,2}\,\cancel{dB/dec} = \log\left(\frac{\omega_2}{14,13}\right) \cdot \cancel{40\,dB/dec}$$

$$\log(\omega_2) = \log\left[\left(\frac{\omega_2}{14,13}\right)^2\right] \qquad \cancel{\omega_2} = \frac{\omega_2^{\cancel{2}}}{(14,13)^2} \qquad \omega_2 \simeq 200 \text{ rad/s}$$

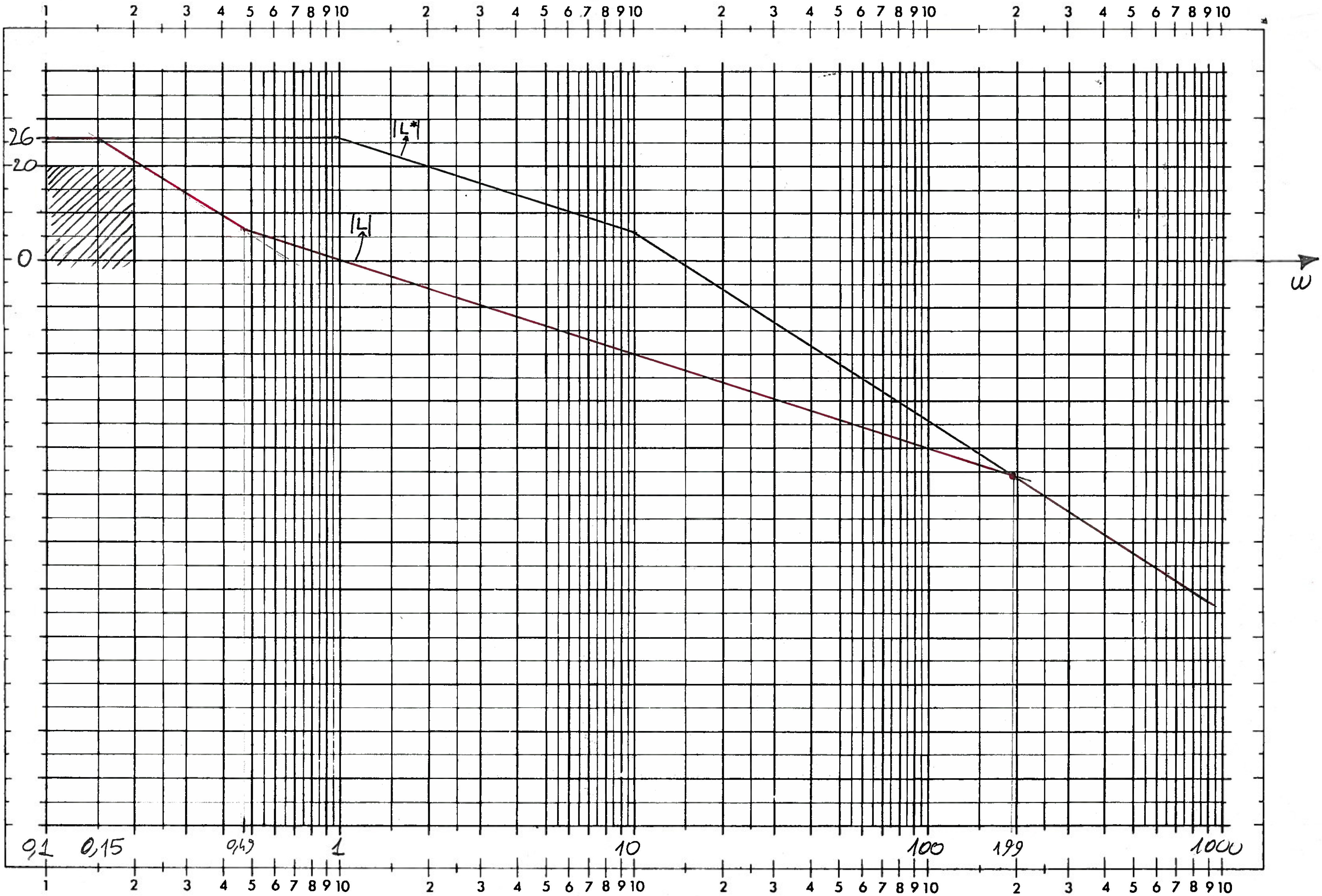
$$\omega_2 \cong 200$$

$$L(s) = 20 \frac{\left(1 + \frac{s}{0,49}\right)}{\left(1 + \frac{s}{0,15}\right)^2 \left(1 + \frac{s}{200}\right)}$$

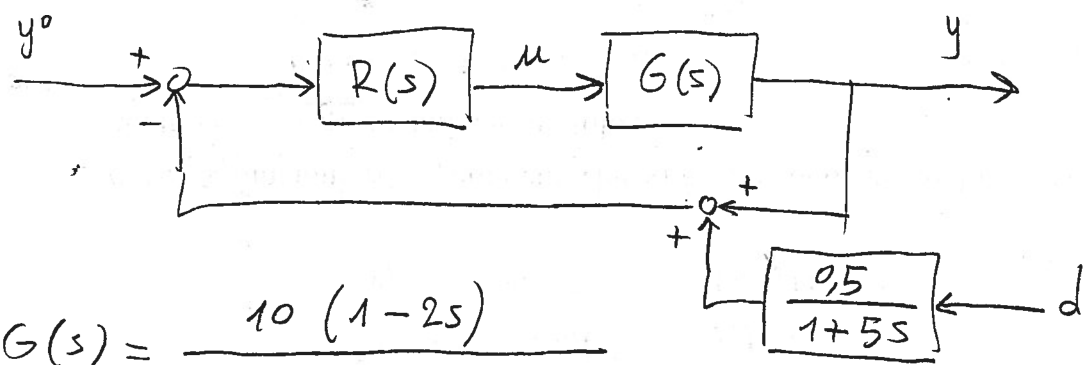
$$R(s) = \frac{\left(1 + \frac{s}{0,49}\right)(1+s)(1+0,15)}{\left(1 + \frac{s}{0,15}\right)^2 \left(1 + \frac{s}{200}\right)}$$

$$\measuredangle L(j1) = +\operatorname{atan}\left(\frac{1}{0,49}\right) - 2\operatorname{atan}\left(\frac{1}{0,15}\right) - \operatorname{atan}\left(\frac{1}{200}\right) =$$

$$\cong 63,9^\circ - 2(81,5^\circ) - 0,3^\circ = -99,4^\circ \rightarrow \boxed{\varphi_m = 80,6^\circ}$$


|L*|
|L|
26
-20
0
ω
0,1
0,15
0,49
1
10
100
1,99
1000

II - ESERCIZIO 7.2



$$G(s) = \frac{10\,(1-2s)}{s\,(1+10s)(1+0{,}1\,s)}$$

$y^{\circ}(t) = 2\,\mathrm{sca}(t)\ , \quad d(t) = \mathrm{sca}(t)$

<u>specifiche di progetto</u>
$$\begin{cases} \varphi_m \geq 40^\circ \\ |e_\infty| \text{ minimo} \\ \omega_c \text{ più estesa possibile} \end{cases}$$

<u>progetto statico</u> $\quad R^*(s) = \dfrac{\mu_R}{s^{g_R}} \quad (g = g_R + 1)$

$e_\infty^{y^{\circ}} = 0 \quad \forall g_R \geq 0$

$\rightarrow g_R = 0\ , \ \mu_R$ libero

$e_d = 0{,}5 \quad \forall g_R \geq 0 \longrightarrow$ (vedi schema prima pg.)

<u>progetto dinamico</u>

$$\boxed{\begin{aligned} & 40 \cdot \log_{10}\left(\frac{0{,}5}{0{,}1}\right) + 20 \log_{10}\left(\frac{\omega_c}{0{,}5}\right) = 40 \\ & \omega_c = 0{,}5 \cdot 10^{\wedge}((40 - 40\log_{10}(5))/20) = 2 \end{aligned}}$$

- $\mu_R = 1 \rightarrow L^*(s) = G(s) \longrightarrow \begin{cases} \omega_c = 2 \text{ rad/s} \\ \angle L(j\omega_c) = \end{cases}$

$|L^*(j\omega_c)| = 1 \rightarrow \omega_c = 2$ rad/s

$\angle L^*(j\omega_c) = -90^\circ - \mathrm{atan}(10 \cdot 2) - \mathrm{atan}(2 \cdot 2) - \mathrm{atan}(0{,}1 \cdot 2) =$

$\cong -90^\circ - 87{,}1^\circ - 76{,}0^\circ - 11{,}3^\circ \simeq -264{,}4^\circ \rightarrow$ instabile

<u>oss</u>: se lo zero fosse stato di segno opposto si sarebbe ottenuto:

$\angle L^*(j\omega_c) = -90^\circ - 87{,}1^\circ + 76^\circ - 11{,}3^\circ \simeq -112{,}4^\circ \rightarrow$ stabile

- $R(s) = \mu_R$

Con un regolatore algebrico si deve imporre $\measuredangle L(j\omega_c) = -140°$
Dal diagramma di Bode si ottiene $\omega_c < 0{,}1$, infatti risulta

$$\measuredangle L(j0{,}1) = -90° - \operatorname{atan}(10 \cdot 0{,}1) - \operatorname{atan}(2 \cdot 0{,}1) - \operatorname{atan}(0{,}1 \cdot 0{,}1) =$$

$$= -90° - 45° - 11{,}3° - 0{,}6° \simeq -146{,}9°$$

$$\mu_R \cong -40\,dB \rightarrow \mu_R = 10^{-2} = 0{,}01$$

- Per ottenere ω_c maggiore si deve adottare un regolatore dinamico ma attenzione

→ Non si può cancellare lo zero a fase non minima con un polo del regolatore, altrimenti si "cancella" un polo instabile che resta autovalore del sistema quindi il sistema ad anello chiuso diventa <u>instabile</u> !!

→ in pratica non si può mai avere $\omega_c > \frac{1}{-\tau_z}$ dove $-\tau_z > 0$ è la costante di tempo dello zero a fase non min. perché se si taglia con pendenza -1 si ha
(in assenza di altri zeri a f. non. min)

$$\measuredangle L(j\omega_c) = -90° + \underbrace{\measuredangle(1 + j\tau_z \omega)}_{< -45°} + \cdots ,$$

- Cancellando il polo in bassa frequenza e aggiungiamo un polo in alta frequenza, poi regoliamo la banda agendo sul guadagno μ_R

$$L(s) = \frac{10\,\mu_R(1-2s)}{s(1+0{,}1s)(1+0{,}01s)}, \quad R(s) = \mu_R \frac{(1+10s)}{(1+0{,}01s)}$$

fissando $\omega_c = 0{,}2$, si ottiene

$$\measuredangle L(j0{,}2) = -90° - \operatorname{atan}(2 \cdot 0{,}2) - \operatorname{atan}(0{,}1 \cdot 0{,}2) - \operatorname{atan}(0{,}01 \cdot 0{,}2) =$$

$$= -90° - 21{,}8° - 1{,}1° - \underset{\uparrow (*)}{0{,}1°} = -113°$$

$\rightarrow \varphi_m = 67°$

> OSS : si potrebbe aumentare ω_c finché risulta $\varphi_m = 40°$ per ottenere una banda più ampia

Calcolo di μ_R

dal diagramma di Bode ottenuto per $\mu_R = 1$, si ottiene

$\mu_R = -|L_{\mu_R=1}(j0{,}2)| \cong -33\,dB$, oppure $20 \log_{10}\left(\frac{10}{0{,}2}\right) = 33{,}97$

$\mu_R = 10^{\left(-\frac{33}{20}\right)} \cong 0{,}022 \rightarrow$ per la precisione $\frac{10\mu_R}{s}$ taglia in $0{,}2 \rightarrow \mu_R = \frac{0{,}2}{10} =$

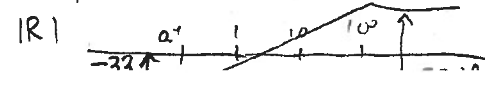
Si ottiene

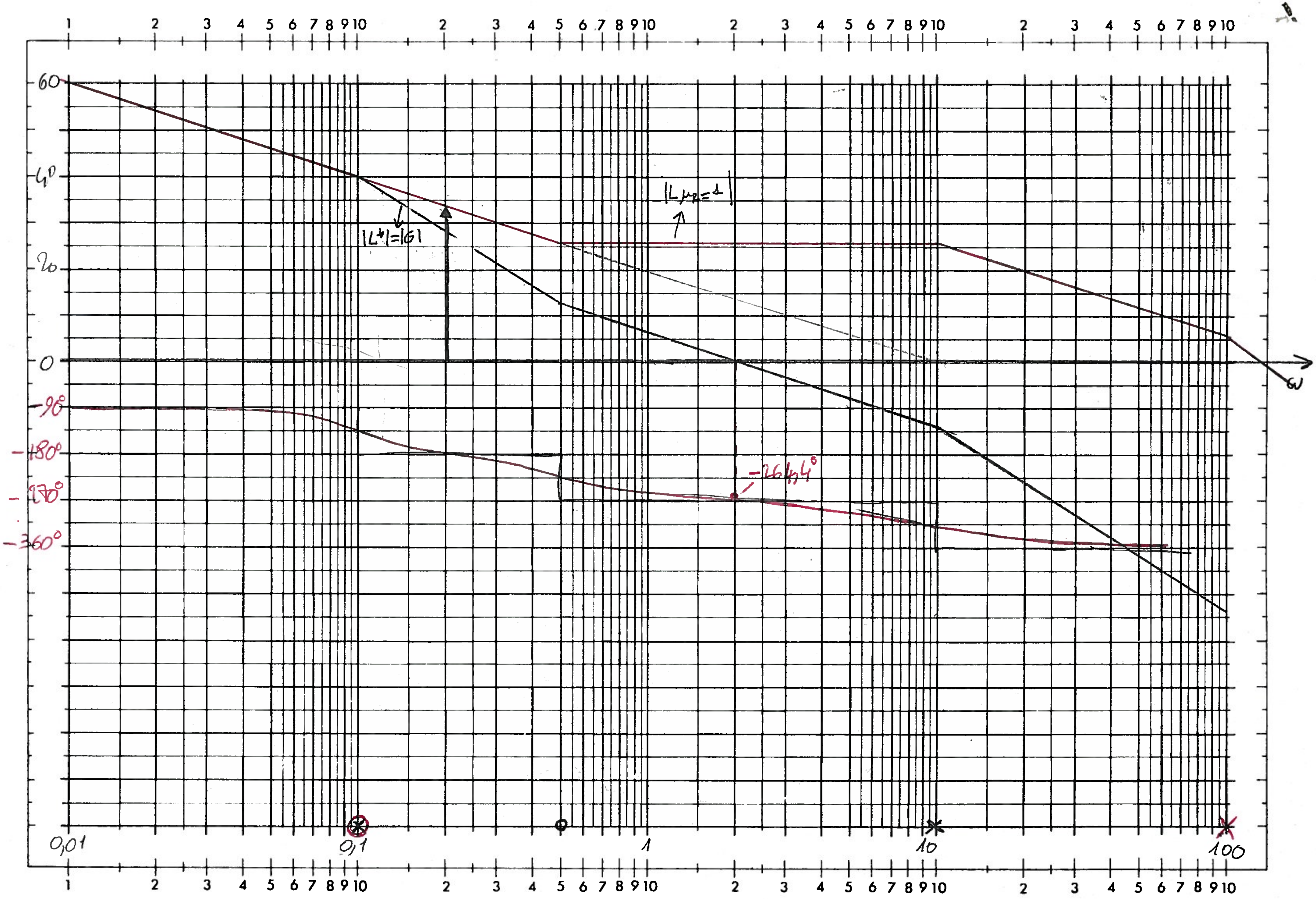
$$\boxed{R(s) = 0{,}022 \frac{1+10s}{1+0{,}01s}}$$

$$\boxed{L(s) = \frac{0{,}22\,(1-2s)}{s(1+0{,}1s)(1+0{,}01s)}}$$

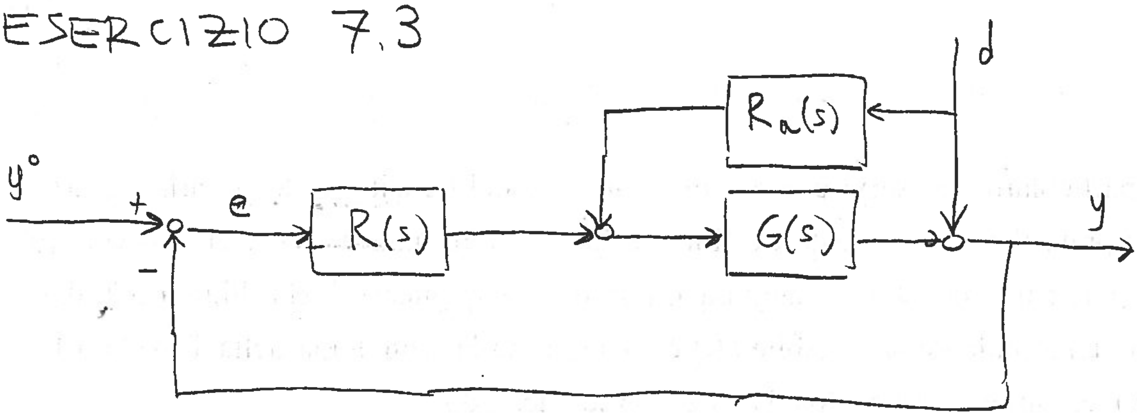
- gli zeri a fase non minima di G devono restare zeri di

(*) • il polo in alta frequenza in R non influenza la stabilità ma rende realizzabile il controllore. Per limitare l'azione di controllo se ne potrebbero mettere due di poli, tanto φ_m non la cambia




60
40
20
0
-90°
-180°
-270°
-360°
ω
|L*|=|G|
|L_{PR}=1|
-264,4°
0,01
0,1
1
10
100

III ESERCIZIO 7.3



R : controllore in anello chiuso

Ra : controllore in anello aperto (disturbo misurabile)

$$G(s) = \frac{10}{(1+s)(1+0{,}1s)} e^{-0{,}1s}, \quad R_a(s) = \frac{\mu}{1+s\tau}$$

$$y^\circ(t) = A\,\mathrm{sca}(t), \quad d(t) = B \sin(4t)$$

<u>specifiche di progetto</u> : $\begin{cases} \varphi_m \geq 60^\circ \\ \omega_c \geq 0{,}5 \text{ rad/s} \\ |e_\infty| = 0 \quad \forall A, B \end{cases}$

<u>progetto statico</u> : $R^*(s) = \dfrac{\mu_R}{g_R}$

$$e_\infty^{y^\circ} = \begin{cases} \dfrac{A}{1+\mu} & g_R = 0 \\ 0 & g_R \geq 1 \end{cases} \longrightarrow g_R = 1$$

$$|e_\infty^d| = B \left| \frac{E(s)}{D(s)} \right|_{s=j4} = 0 \quad \text{se} \quad \frac{E(s)}{D(s)} \text{ ha due zeri in } \pm j4$$

$$\frac{E(s)}{D(s)} = \frac{1}{1+L(s)} + \frac{R_a(s)G(s)}{1+L(s)} = \frac{1+R_a(s)G(s)}{1+R(s)G(s)} \triangleq H(s)$$

$$|H(j4)| = 0 \quad \leftrightarrow \quad 1 + R_a(j4)\,G(j4) = 0$$

$$R_a(j4) = -\frac{1}{G(j4)} \quad \leftrightarrow \quad \begin{cases} |R_a(j4)| = \dfrac{1}{|G(j4)|} \\ \measuredangle R_a(j4) = \measuredangle\left(-\dfrac{1}{G(j4)}\right) \end{cases}$$

$$G(j4) = \frac{10}{(1+j4)(1+0{,}4j)}\, e^{-0{,}4j}$$

$$|G(j4)| = \frac{10}{\sqrt{1+16}\,\sqrt{1+0{,}16}} \cong 2{,}25 \cong 7{,}1\ \mathrm{dB}$$

$$\measuredangle G(j4) = -\operatorname{atan} 4 - \operatorname{atan} 0{,}4 - 0{,}4\,\frac{180}{\pi} =$$

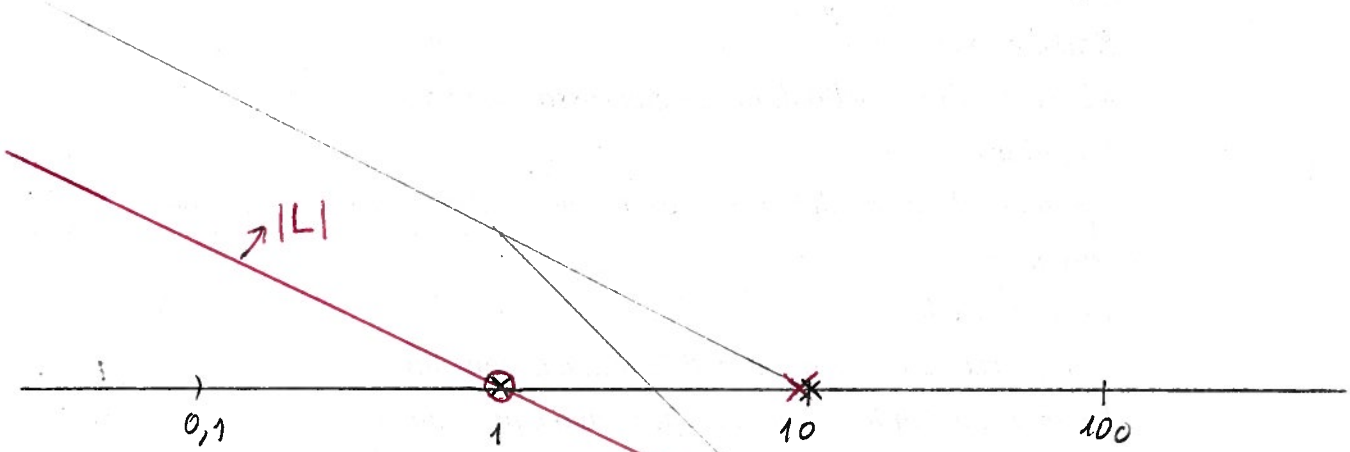
$$= -76{,}0^\circ - 21{,}8^\circ - 22{,}9^\circ = -120{,}7^\circ$$

$$\begin{cases} \dfrac{\mu}{\sqrt{1+16\tau^2}} = \dfrac{1}{2{,}25} \\ -\operatorname{atan} 4\tau = -180^\circ + 120{,}7^\circ \end{cases} \quad \begin{cases} \mu = \dfrac{\sqrt{1+16\tau^2}}{2{,}25} = 0{,}87 \\ \tau = \dfrac{\tan(59{,}3)}{4} = 0{,}42 \end{cases}$$

posto $\boxed{g_R = 1,\ \mu = 0{,}87,\ \tau = 0{,}42} \longrightarrow |e_\infty| = 0 \quad \forall A, B$

progetto dinamico

$$\mu_R = 1 \rightarrow L^*(s) = \frac{10\, e^{-0,1 s}}{s(1+s)(1+0,1s)}$$



$$40 \log_{10}\left(\frac{\omega_c}{1}\right) = 20$$

$$\omega_c = 10^\wedge\left(\frac{20}{40}\right) \cong 3.16$$

$$\angle L^*(j\omega_c) = -0.1 \cdot 3.16 \cdot \frac{180}{\pi} - 90 - \mathrm{atan}(3.16)$$

$$- \mathrm{atan}(0.1 \cdot 3.16) = -18.11 - 90 - 72{,}44 - 17{,}54$$

$$= -198,\ldots \quad \text{INSTABILE}$$

$$L(s) = \frac{10\, \mu_R\, e^{-0,1 s}}{s(1+0,1s)^2}$$

Fissando μ_R in modo che risulti $\omega_c = 1$ si ottiene

$$\measuredangle L(j) = -0,1 \frac{180°}{\pi} - 90° - 2\, \mathrm{atan}(0,1) =$$

$$= -5,7° - 90° - 2 \cdot 5,7° = -107,1° \rightarrow \boxed{\varphi_m = 72,9°}$$

$$\mu_R = -20\,\mathrm{dB} \rightarrow \mu_R = 10^{-1} = 0,1$$

$$L(s) = \frac{e^{-0,1s}}{s(1+0,1s)^2}$$

$$R(s) = \frac{0,1}{s} \frac{(1+s)}{(1+0,1s)}$$

<u>OSS</u> : quando c'è il termine di ritardo, non è possibile cancellarlo con un anticipo nel regolatore, perché un regolatore che prevede il futuro non può essere costruito

$$\left| e^{-j\omega\tau} \right| = 1 \quad , \quad \angle e^{-j\omega\tau} = -\omega\tau \frac{180°}{\pi}$$

$$\omega = \frac{1}{\tau} \Rightarrow \angle e^{-j\omega\tau} = -\frac{180°}{\pi} = 57,3°$$

difficilmente si riesca a porre $\omega_c > \frac{1}{\tau}$