

- Introduzione
- Formulazione del modello (dinamico, lineare, tempo-invariante)
- Movimento ed equilibrio
- Stabilità
- I sistemi non lineari (cenni)
- Raggiungibilità ed osservabilità
- Progetto di sistemi di controllo (nel dominio del tempo)
- Risposte a ingressi "canonici"
- Progetto di sistemi di controllo (nel dominio della frequenza)

TEST DI STABILITA'

Obiettivo: ottenere delle condizioni di stabilità espresse sui coefficienti α_i di $\Delta_A(\lambda)$ (o su quantità facilmente ottenibili da A , come $\text{tr}(A)$ e $\det(A)$), per evitare il calcolo dei λ_i .

Nota: è una motivazione oggi superata se A è assegnata (le radici di un polinomio assegnato si calcolano numericamente con algoritmi efficienti). Restano test interessanti per discutere la stabilità in funzione di parametri non assegnati.

Nota: i test discriminano solo l'asintotica stabilità e la forte instabilità.

RIPASSO: traccia $\text{tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}$ e determinante $\det(A)$

Proprietà: $\text{tr}(A) = \sum_{i=1}^n \lambda_i$, $\det(A) = \prod_{i=1}^n \lambda_i$

$$\begin{aligned}\Delta_A(\lambda) &= \lambda^n + \alpha_1 \lambda^{n-1} + \dots + \alpha_n \quad (\text{non fattorizzato}) \\ &= (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \dots (\lambda - \lambda_n) \quad (\text{fattorizzato con } \lambda_i \text{ indistinti}) \\ &= \lambda^n - \underbrace{\sum_i \lambda_i}_{\alpha_1 = -\text{tr}(A)} \lambda^{n-1} + \underbrace{\sum_{i \neq j} \lambda_i \lambda_j}_{\alpha_2} \lambda^{n-2} - \underbrace{\sum_{i \neq j \neq k} \lambda_i \lambda_j \lambda_k}_{\alpha_3} \lambda^{n-3} + \dots + \underbrace{(-1)^n \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n}_{\alpha_n = (-1)^n \det(A)}\end{aligned}$$

$n=2$, regola pratica per scrivere $\Delta_A(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \lambda^2 - \text{tr}(A) \lambda + \det(A)$

TEST RAPIDI DI INSTABILITA': Sono condizioni facili da verificare e sufficienti per la (f.) instabilità t. continuo

Test di instabilità della traccia

$$\text{tr}(A) > 0 \rightarrow A \text{ (f.) instab.}$$

$$\text{tr}(A) = \sum_{i=1}^n \lambda_i = \sum_{i=1}^n \text{Re}(\lambda_i) > 0 \rightarrow \text{c'è qualche } \text{Re}(\lambda_i) > 0$$

Se $\text{tr}(A) = 0$, possiamo solo concludere che A non è as. stab.
potrebbero esserci sia λ con $\text{Re} < 0$ che λ con $\text{Re} > 0$,
oppure di tutti con $\text{Re}(\lambda_i) = 0$

Se $\text{tr}(A) < 0$, non possiamo concludere nulla

Test di instab. del determinante

$$\underbrace{(-1)^n \det(A)}_{\propto n} < 0 \rightarrow A \text{ (f.) instab.}$$

$$\det(A) = \prod_{i=1}^n \lambda_i \quad \text{e} \quad \lambda_i \cdot \bar{\lambda}_i = |\lambda_i|^2 > 0$$

n pari: $\det(A) < 0 \rightarrow$ numero dispari di λ_i reali < 0
 $\rightarrow$ numero dispari (almeno uno)
di λ_i reali > 0 .

n dispari: $\det(A) > 0 \rightarrow$ numero pari di λ_i reali < 0
 $\rightarrow$ numero dispari (almeno uno)
di λ_i reali > 0 .

Se $\det(A) = 0 \rightarrow A$ non è as. stab. ($\exists \lambda = 0$)

Se $(-1)^n \det(A) > 0 \rightarrow$ non posso concludere nulla

Nota: $\det(A)$ non è poi così "rapido" da calcolare se n è grande

TEST RAPIDI DI INSTABILITA'

t. discreto

Test di instabilità della traccia

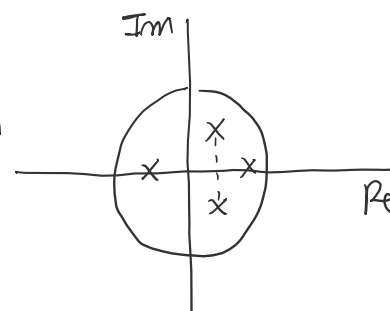
$$|\text{tr}(A)| > n \rightarrow A \text{ (f.) instab.}$$

Se tutti i λ_i sono stabili o critici,
 $-1 \leq \text{Re}(\lambda_i) \leq 1$, risulta $-n \leq \text{tr}(A) \leq n$

$$|\text{tr}(A)| > n \rightarrow \text{qualche } |\lambda_i| > 1$$

Se $|\text{tr}(A)| = n$ possiamo solo concludere
 che A non è as. stab.

Se $|\text{tr}(A)| < n$ non possiamo concludere nulla



Test di instab. del determinante

$$|\det(A)| > 1 \rightarrow A \text{ (f.) instab.}$$

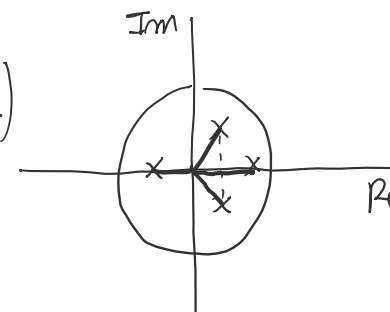
$$|\det(A)| = \prod_{i=1}^n |\lambda_i| \quad \left(\begin{array}{l} \text{modulo nel caso di } \lambda_i \\ \text{complesso, } \lambda \cdot \bar{\lambda} = |\lambda|^2 \end{array} \right)$$

Se tutti i λ_i sono stabili o critici, $|\lambda_i| \leq 1$
 $|\lambda_i| \leq 1$, risulta $|\det(A)| \leq 1$

$$|\det(A)| > 1 \rightarrow \text{qualche } |\lambda_i| > 1$$

Se $|\det(A)| = 1$, possiamo solo concludere che A non è as. stab.

Se $|\det(A)| < 1$, non possiamo concludere nulla



UNA CONDIZIONE NECESSARIA (RAPIDA) DI STABILITA' A T. CONTINUO

$\alpha_i > 0 \quad \forall i$ è cond. necessaria per l'as. stab.

Nota: non è sufficiente. Esempio: $\lambda^3 + \lambda^2 + \lambda + 6 = (\lambda + 2)(\lambda^2 - \lambda + 3)$, $\lambda_1 = -2$, $\lambda_{2,3} = \frac{1 \pm i\sqrt{11}}{2}$

Nota: se $\exists \alpha_i < 0 \rightarrow A$ (f.) instab. (lo abbiamo già visto per $i = n$)

Se $\alpha_i \geq 0 \quad \forall i$, con qualche $\alpha_i = 0$, concludiamo solo che A non è as. stab.

p.e. $\lambda^2 + 1$, $\lambda_{1,2} = \pm i$; $\lambda^3 + 5\lambda + 6 = (\lambda + 1)(\lambda^2 - \lambda + 6)$, $\lambda_1 = -1$, $\lambda_{2,3} = \frac{1 \pm i\sqrt{23}}{2}$

La dimostrazione si basa sul legame tra i coeff. α_i e gli autoval. λ_i
(banale nel caso λ_i tutti reali)

$$\Delta_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \cdots (\lambda - \lambda_n)$$

$$= \lambda^n - \underbrace{\sum_i \lambda_i}_{\alpha_1 > 0} \lambda^{n-1} + \underbrace{\sum_{i \neq j} \lambda_i \lambda_j}_{\alpha_2 > 0} \lambda^{n-2} - \underbrace{\sum_{i \neq j \neq k} \lambda_i \lambda_j \lambda_k}_{\alpha_3 > 0} \lambda^{n-3} + \cdots + \underbrace{(-1)^n \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n}_{\alpha_n > 0}$$

Nota: non è poi così rapida, perché richiede il calcolo di tutti gli α_i

Nota: se ne può ricavare una versione a t.d. (ancora meno rapida, vedi dopo)

TEST DI ASINTOTICA STABILITA'

Ci sono due criteri necessari e sufficienti a t.c. per l'as. stab., dovuti a Edward Routh (inglese) e Adolf Hurwitz (tedesco). Sono equivalenti, noi vediamo il primo.

Nota: i criteri di Routh-Hurwitz generalizzano quello di Cartesio, che considera solo radici reali.

Si applicano al polinomio $P(\lambda) = \alpha_0 \lambda^n + \alpha_1 \lambda^{n-1} + \dots + \alpha_{n-1} \lambda + \alpha_n$
non necessariamente monico ($\alpha_0 \neq 0$)

Cartesio: il numero di radici reali > 0 di $P(\lambda)$ è al più pari al numero di cambi di segno nella sequenza dei coefficienti $\alpha_i \neq 0$, $i = 0, 1, \dots, n$.

Esempio: i polinomi che rispettano la cond. necessaria per l'as. stab. (α_i stesso segno, $i = 0, 1, \dots, n$) non hanno (per Cartesio) radici reali > 0 , ma ne possono avere di complesse con. con $\text{Re}(\lambda_i) > 0$.

$$\lambda^3 + \lambda^2 + \lambda + 6 = (\lambda + 2)(\lambda^2 - \lambda + 3), \quad \lambda_1 = -2, \quad \lambda_{2,3} = \frac{1 \pm i\sqrt{11}}{2}$$

CRITERIO DI ROUTH

Tabella di Routh: $n+1$ righe, $n+1$ colonne, numerate da 0 a n

	c.0	c.1	c.2	...	c.j	c.j+1	...
r.0	$\alpha_0=1$	α_2	α_4	...			α "pari"
r.1	α_1	α_3	α_5	...			α "dispari"
⋮							
r.i-2							
r.i-1							
r.i	$r_{i,0}$	$r_{i,1}$	$r_{i,2}$	...	$r_{i,j}$		
⋮							

(oppure 0 se l'indice $> n$)
p.e. $\alpha_4 = 0$ se $n=2$

$$r_{ij} = -\frac{1}{r_{i-1,0}} \det \begin{bmatrix} r_{i-2,0} & r_{i-2,j+1} \\ r_{i-1,0} & r_{i-1,j+1} \end{bmatrix}$$

Nota: vanno calcolati solo gli elementi che servono per calcolare la prima colonna. Se $r_{i,0} = 0$, ci si ferma, $r_{i+1,0}$ non è definito.

$\text{Re}(\lambda_i) < 0 \forall i \iff r_{i,0} \neq 0 \forall i$ e tutti dello stesso segno

Inoltre, se $r_{i,0} \neq 0 \forall i$, il numero di radici con $\text{Re} > 0$ coincide col numero di cambi di segno nella prima colonna e le restanti radici hanno $\text{Re} < 0$.

Nota: se c'è una radice con $\text{Re} = 0$, allora risulta un elemento $r_{i,0} = 0$ (ma non viceversa)

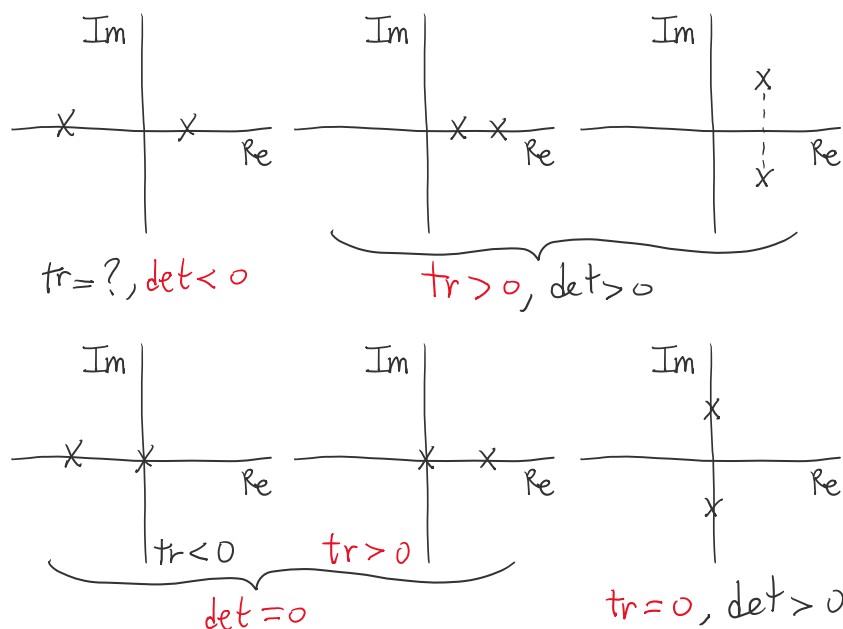
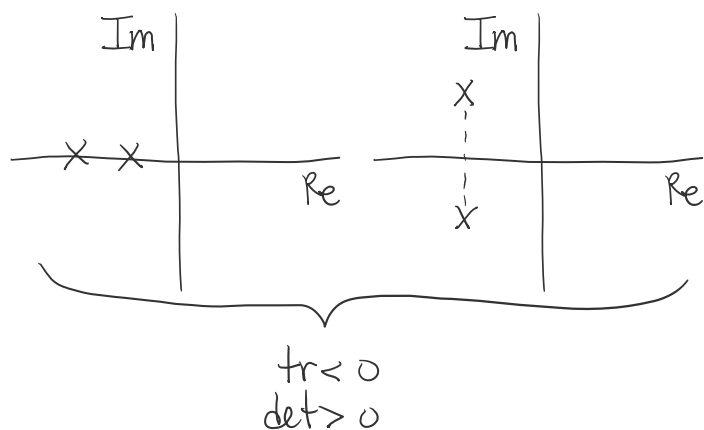
ROUTH $n=2$: $\Delta_A(\lambda) = \lambda^2 + \alpha_1 \lambda + \alpha_2$

	c.0	c.1	c.2
r.0	1	α_2	0
r.1	α_1	0	
r.2	$r_{2,0}$		

$$r_{2,0} = -\frac{1}{r_{1,0}} \det \begin{bmatrix} r_{0,0} & r_{0,1} \\ r_{1,0} & r_{1,1} \end{bmatrix} = -\frac{1}{\alpha_1} \det \begin{bmatrix} 1 & \alpha_2 \\ \alpha_1 & 0 \end{bmatrix} = -\frac{1}{\alpha_1} (-\alpha_1 \alpha_2) = \alpha_2$$

$$A \text{ as.stab} \iff \begin{cases} \alpha_1 > 0 \\ \alpha_2 > 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \text{tr}(A) < 0 \\ \det(A) > 0 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{criterio} \\ \text{tr-det} \\ n=2, \text{t.c.} \end{array}$$

$$\text{tr}(A) = \lambda_1 + \lambda_2, \det A = \lambda_1 \lambda_2$$



Nota: la condizione necessaria per l'as.stab. ($\alpha_i > 0 \forall i$) è anche sufficiente per $n=2$.

ROUTH $n=3$: $\Delta_A(\lambda) = \lambda^3 + \alpha_1 \lambda^2 + \alpha_2 \lambda + \alpha_3$

	c.0	c.1	c.2	c.3
r.0	1	α_2	0	
r.1	α_1	α_3	0	
r.2	$r_{2,0}$	$r_{2,1}$		
r.3	$r_{3,0}$			

$$r_{2,0} = -\frac{1}{\alpha_1} \det \begin{bmatrix} 1 & \alpha_2 \\ \alpha_1 & \alpha_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{\alpha_1} (\alpha_1 \alpha_2 - \alpha_3)$$

$$r_{2,1} = -\frac{1}{\alpha_1} \det \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \alpha_1 & 0 \end{bmatrix} = 0$$

$$r_{3,0} = -\frac{1}{r_{2,0}} \det \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_3 \\ r_{2,0} & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{r_{2,0}} \cancel{\alpha_2} \alpha_3 = \alpha_3$$

$$A \text{ as. stab} \iff \begin{cases} \alpha_1 > 0 \\ \alpha_2 > \frac{\alpha_3}{\alpha_1} \\ \alpha_3 > 0 \end{cases}$$

Nota: la cond. necessaria ($\alpha_i > 0 \forall i$)
non è sufficiente per $n \geq 3$.

ESEMPIO:

$$\lambda^3 + \lambda^2 + \lambda + 6 = (\lambda + 2)(\lambda^2 - \lambda + 3) \quad \lambda_1 = -2, \quad \lambda_{2,3} = \frac{1 \pm i\sqrt{11}}{2}$$

$$\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} \alpha_1 = 1 \\ \alpha_3 = 6 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha_1 < 0 \\ \alpha_2 > 0 \end{array} \right. \\ \alpha_2 = 1 < \frac{\alpha_3}{\alpha_1} = 6 \end{array}$$

CRITERIO "DI ROUTH" A T. DISCRETO

Ci interessa un test che sia soddisfatto se e solo se il polinomio

$$\Delta_A(z) = z^n + \alpha_1 z^{n-1} + \dots + \alpha_{n-1} z + \alpha_n \quad \text{ha radici } z_i \text{ tutte con } |z_i| < 1$$

Idea: applicare una trasformazione $z = f(s)$ invertibile, che metta in corrispondenza le radici z_i con $|z_i| \leq 1$ di $\Delta_A(z)$ con le radici s_i con $\operatorname{Re}(s_i) \leq 0$ di un polinomio $P(s)$, a cui applicare il criterio a t.c.

La trasformazione: $z = \frac{s+1}{s-1}$, con inversa $s = \frac{z+1}{z-1}$

Applicandola, si ottiene

$$\Delta_A\left(\frac{s+1}{s-1}\right) = \left(\frac{s+1}{s-1}\right)^n + \alpha_1 \left(\frac{s+1}{s-1}\right)^{n-1} + \dots + \alpha_n = \frac{1}{(s-1)^n} \left[(s+1)^n + \alpha_1 (s+1)^{n-1} (s-1) + \dots + \alpha_n (s-1)^n \right]$$

$$\hookrightarrow = \frac{P(s)}{(s-1)^n}, \text{ con } P(s) = \underbrace{(1+\alpha_1+\dots+\alpha_n)}_{\alpha_0^P} s^n + \underbrace{(\dots)}_{\alpha_1^P} s^{n-1} + \dots + \underbrace{(\dots)}_{\alpha_{n-1}^P} s + \underbrace{(1-\alpha_1+\alpha_2+\dots)}_{\alpha_n^P}$$

Se s_i radice di $P(s)$ (nota: $s=1$ non è radice), allora $z_i = \frac{s_i+1}{s_i-1}$ è radice di $\Delta_A(z)$.

Se $z_i \neq 1$ è radice di $\Delta_A(z)$, allora $s_i = \frac{z_i+1}{z_i-1}$ è radice di $P(s)$. Nota: se $z=1$ è radice di $\Delta_A(z)$, $P(s)$ risulta di grado $< n$

Inoltre $|z_i| \leq 1 \iff \operatorname{Re}(s_i) \leq 0$

$$|z_i|^2 = \frac{|s_i+1|^2}{|s_i-1|^2} = \frac{|\operatorname{Re}(s_i)+1+i\operatorname{Im}(s_i)|^2}{|\operatorname{Re}(s_i)-1+i\operatorname{Im}(s_i)|^2} = \frac{(\operatorname{Re}(s_i)+1)^2 + \operatorname{Im}(s_i)^2}{(\operatorname{Re}(s_i)-1)^2 + \operatorname{Im}(s_i)^2}$$

LA CONDIZIONE NECESSARIA (RAPIDA) DI STABILITA' A T. DISCRETO

Si ottiene applicando la versione a t.c. al polinomio $P(s)$ (attenzione: non è monico)

α_i^p tutti dello stesso segno, $i = 0, 1, \dots, n$ è cond. necessaria per l'as. stab.

(equivalentemente: $\frac{\alpha_i^p}{\alpha_0^p} > 0$, $i = 1, \dots, n$)

Nota: per $n=2$ è anche sufficiente, vediamo in dettaglio...

CRITERIO "DI ROUTH" A T. DISCRETO: studiamo il caso $n=2$ per ottenere un criterio tr-det .

$$\Delta_A(z) = z^2 + \alpha_1 z + \alpha_2, \quad \alpha_1 = -\text{tr}(A), \quad \alpha_2 = \det(A)$$

$$P(s) = (s+1)^2 + \alpha_1(s+1)(s-1) + \alpha_2(s-1)^2 = \underbrace{(1+\alpha_1+\alpha_2)}_{\alpha_0^P} s^2 + \underbrace{2(1-\alpha_2)}_{\alpha_1^P} s + \underbrace{1-\alpha_1+\alpha_2}_{\alpha_2^P}$$

$$A \text{ as. stab.} \iff \begin{cases} \alpha_1^P / \alpha_0^P > 0 \\ \alpha_2^P / \alpha_0^P > 0 \end{cases} \iff \alpha_0^P, \alpha_1^P, \alpha_2^P \text{ con stesso segno}$$

$$\begin{aligned} \alpha_0^P = 1 - \text{tr} + \det > 0 & \quad \begin{cases} \alpha_1^P = 2(1 - \det) > 0 \\ \alpha_2^P = 1 + \text{tr} + \det > 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \det < 1 \\ 1 + \det > -\text{tr} \end{cases} \quad \rightarrow \quad \boxed{\begin{cases} \det < 1 \\ 1 + \det > |\text{tr}| \end{cases}} \\ (1 + \det > \text{tr}) & \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha_0^P = 1 - \text{tr} + \det < 0 & \quad \begin{cases} \alpha_1^P = 2(1 - \det) < 0 \\ \alpha_2^P = 1 + \text{tr} + \det < 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \det > 1 \\ 1 + \det < -\text{tr} \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} \det > 1 \\ 1 + \det < -|\text{tr}| \\ \text{impossibile} \end{cases} \\ (1 + \det < \text{tr}) & \end{aligned}$$