TRASFORMATA DI FOURIER (per un segnale reale $y(t)$)

$$\mathcal{F}[y(t)] = Y(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} y(t)\, e^{-i\omega t} dt = \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} y(t)\cos(\omega t)\, dt}_{Re(Y(\omega))} + i \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} y(t)\sin(\omega t)\, dt}_{Im(Y(\omega))}$$

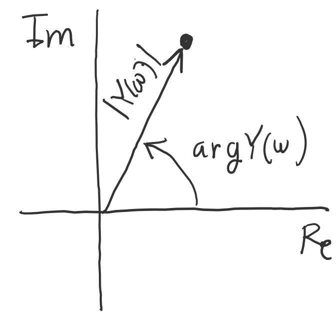
È una funzione complessa della variabile reale ω

Cosa significa? Lo si capisce dall'antitrasformata

$$y(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} Y(\omega)\, e^{i\omega t} d\omega = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty} Re\left(Y(\omega)e^{i\omega t}\right) d\omega = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\Big(\underbrace{Re\, Y(\omega)}_{|Y(\omega)|\cos(\arg Y(\omega))}\cos \omega t - \underbrace{Im\, Y(\omega)}_{|Y(\omega)|\sin(\arg Y(\omega))}\sin \omega t\Big) d\omega$$

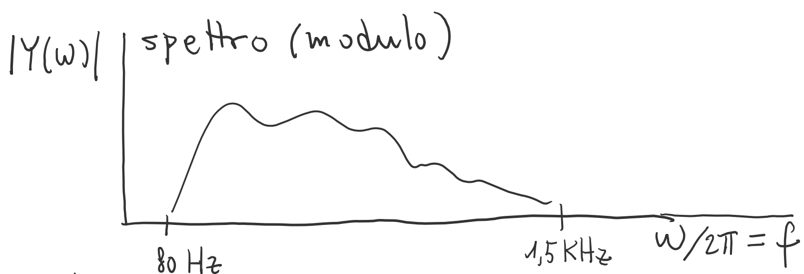
$$\uparrow$$

$$Y(-\omega)\, e^{-i\omega t} = \overline{Y(\omega)\, e^{i\omega t}}$$



$$y(t) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty} |Y(\omega)| \cos\left(\omega t + \arg Y(\omega)\right) d\omega$$

$$Y(\omega) = |Y(\omega)| \arg Y(\omega)$$

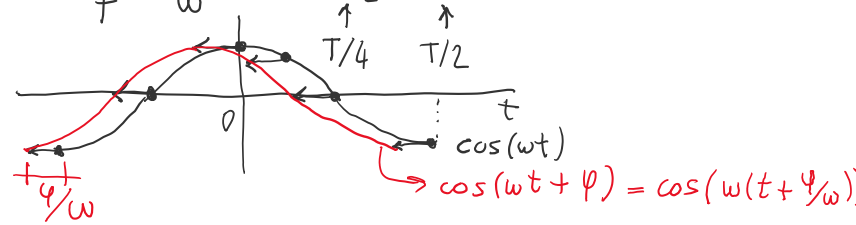


$$T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega}$$

$\omega t = \frac{\pi}{2}$ $\quad$ $\omega t = \pi$

$\uparrow$ $\quad$ $\uparrow$

$T/4$ $\quad$ $T/2$



TRASFORMATA DI FOURIER A TEMPO DISCRETO (DTFT) ($y(t)$ reale)

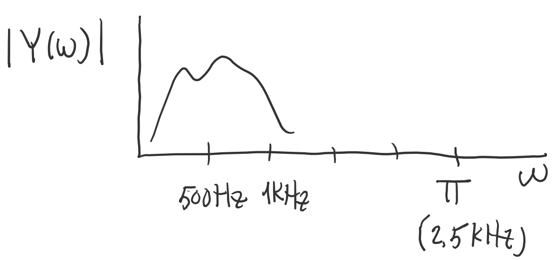
Nota: da non confondere con la Discrete F.t. (DFT) che è un'approssimazione su un n. finito di campioni y_k, $k = 1, \dots, N$ (vedi algoritmo FFT)

$$\mathcal{F}[y(t)] = Y(\omega) = \sum_{t=-\infty}^{+\infty} y(t)\, e^{-i\omega t} = \underbrace{\sum y(t) \cos \omega t}_{\mathrm{Re}\, Y(\omega)} + i \underbrace{\sum y(t) \sin \omega t}_{\mathrm{Im}\, Y(\omega)}$$

È una funzione complessa dell'angolo ω di rotazione, per transizione, di cos e sin si ripete "periodica" ogni 2π. Come prima, il significato si vede bene dall'antitrasformata

$$y(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} Y(\omega)\, e^{i\omega t}\, d\omega = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} \mathrm{Re}\left(Y(\omega)\, e^{i\omega t}\right) d\omega = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\Big(\underbrace{\mathrm{Re}\, Y(\omega)}_{|Y(\omega)|\cos(\arg Y(\omega))} \cos \omega t - \underbrace{\mathrm{Im}\, Y(\omega)}_{|Y(\omega)| \sin(\arg Y(\omega))} \sin \omega t\Big)\, d\omega$$

$$y(t) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} |Y(\omega)| \cos(\omega t + \arg Y(\omega))\, d\omega$$



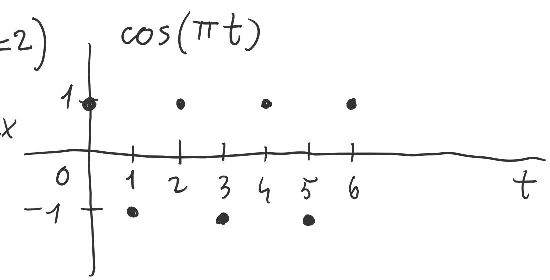
$f_c = 5\,\mathrm{KHz}$, $T_c = 0.2\,\mathrm{ms}$

$f_{max} = \frac{1}{2}\frac{1}{T_c} = 2{,}5\,\mathrm{KHz}$

$f_{max} = \frac{1}{2}$ ($T_{min} = 2$)

$\omega_{max} = 2\pi f_{max}$

$= \pi$



TRASFORMATA DI LAPLACE (per un segnale reale $y(t)$)

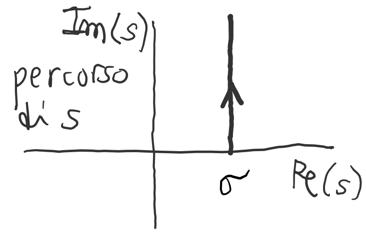
Differenze rispetto a Fourier:

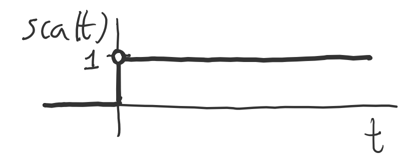
1) $y(t)$ è definito solo per $t \geq 0$ (o supposto nullo per $t<0$)
È pensata per segnali (in-out-stato) di sistemi dinamici che partono da $x(0)$

2) $i\omega$ diventa una variabile complessa $s = \sigma + i\omega$
Nell'integrale: $e^{-i\omega t} \to e^{-\sigma t}(\cos\omega t + i\sin\omega t)$ e si possono trasformare segnali divergenti esponenzialmente (tipici dei sistemi lineari instabili)

$$\mathcal{L}[y(t)] = Y(s) = \int_0^{+\infty} y(t)\, e^{-st}\, dt \;\longrightarrow\; \mathcal{L}[y(t)]_{s=\sigma+i\omega} = \mathcal{F}\left[\, y(t)\cdot \mathrm{sca}(t)\, e^{-\sigma t}\,\right]$$

Quindi per $t \geq 0$ si ottiene l'antitrasformata





$$y(t)\cdot \underbrace{\mathrm{sca}(t)}_{1}\, e^{-\sigma t} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} Y(s)\big|_{s=\sigma+i\omega} \cdot e^{i\omega t}\, d\omega$$

$$\longrightarrow\; y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} Y(s)\, e^{st}\, d\omega = \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} |Y(\sigma+i\omega)|\, e^{\sigma t} \cos(\omega t + \arg Y(\sigma+i\omega))\, d\omega$$

$\longrightarrow$ $y(t)$ è scomposto in segnali base del tipo $e^{\sigma t}\cos(\omega t + \varphi)$

TRASFORMATA ZETA (per un segnale <u>reale</u> $y(t)$)

Differenze rispetto a Fourier:

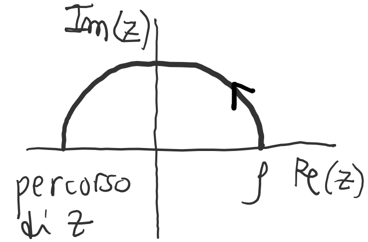
1) $y(t)$ è definito solo per $t \geq 0$ (o supposto nullo per $t < 0$)
   È pensata per segnali (in-out-stato) di sistemi dinamici che partono da $x(0)$

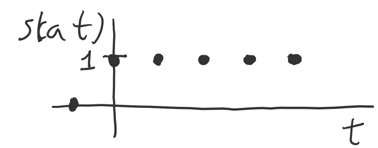
2) $e^{i\omega}$ diventa la variabile complessa $z = \rho e^{i\omega}$
   Nella somma: $e^{-i\omega t} \to \rho^{-t} (\cos \omega t + i \sin \omega t)$ e si possono trasformare segnali divergenti esponenzialmente (tipici dei sistemi lineari instabili)

$$\mathcal{Z}[y(t)] = Y(z) = \sum_{t=0}^{+\infty} y(t)\, z^{-t} \quad \longrightarrow \quad \mathcal{Z}[y(t)]_{z=\rho e^{i\omega}} = \mathcal{F}[\, y(t) \cdot \mathrm{sca}(t)\, \rho^{-t}\,]$$

Quindi per $t \geq 0$ si ottiene l'antitrasformata

$$y(t) \cdot \underbrace{\mathrm{sca}(t)}_{1}\, \rho^{-t} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} Y(z)\big|_{z=\rho e^{i\omega}} \cdot e^{i\omega t}\, d\omega$$





$$\longrightarrow\ y(t) = \mathcal{Z}^{-1}[Y(z)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} Y(z)\, z^{t}\, d\omega \ = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{+\pi} |Y(\rho e^{i\omega})|\, \rho^{t} \cos(\omega t + \arg Y(\rho e^{i\omega}))\, d\omega$$

$\longrightarrow$ $y(t)$ è scomposto in segnali base del tipo $\rho^{t} \cos(\omega t + \varphi)$

TRASFORMATA DI LAPLACE

$$\mathcal{L}[y(t)] = Y(s) = \int_0^\infty y(t)\, e^{-st}\, dt$$

ESEMPI: segnali di tipo "modo"

$$y(t) = e^{\lambda t} \quad Y(s) = \int_0^\infty e^{-(s-\lambda)t} dt = -\frac{1}{s-\lambda}\int_0^\infty -(s-\lambda) e^{-(s-\lambda)t} dt = -\frac{1}{s-\lambda} e^{-(s-\lambda)t}\Big|_0^\infty \overset{\mathrm{Re}(s)=\sigma>\lambda}{=} \frac{1}{s-\lambda}$$

$$y(t) = te^{\lambda t} \quad Y(s) = \int_0^\infty t e^{-(s-\lambda)t} dt = -\frac{1}{s-\lambda}\int_0^\infty -(s-\lambda) e^{-(s-\lambda)t} \cdot t\, dt$$

$$\boxed{\text{caso particolare:} \quad y(t) = \mathrm{sca}(t) \quad Y(s) = \frac{1}{s}}$$

$$\text{"per parti"} = \underbrace{-\frac{1}{s-\lambda} t e^{-(s-\lambda)t}\Big|_0^\infty}_{0 \text{ per } \sigma>\lambda} + \frac{1}{s-\lambda}\int_0^\infty e^{-(s-\lambda)t} dt = -\frac{1}{(s-\lambda)^2}\underbrace{\int_0^\infty -(s-\lambda) e^{-(s-\lambda)t} dt}_{=-1 \text{ come prima}} = \frac{1}{(s-\lambda)^2}$$

$$y(t) = \cos(\omega t) \quad Y(s) = \int_0^\infty \frac{e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}}{2} e^{-st} dt = \frac{1}{2}\frac{1}{s-i\omega} + \frac{1}{2}\frac{1}{s+i\omega} = \frac{s+\cancel{i\omega}+s-\cancel{i\omega}}{2(s-i\omega)(s+i\omega)} = \frac{s}{s^2+\omega^2}$$

$$y(t) = \sin(\omega t) \quad Y(s) = \int_0^\infty \frac{e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}}{2i} e^{-st} dt = \frac{1}{2i}\frac{1}{s-i\omega} - \frac{1}{2i}\frac{1}{s+i\omega} = \frac{\cancel{s}+i\omega-\cancel{s}+i\omega}{2i(s-i\omega)(s+i\omega)} = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}$$

In generale:

$$y(t) = \frac{t^{k-1} e^{\lambda t}}{(k-1)!} \longrightarrow Y(s) = \frac{1}{(s-\lambda)^k}$$

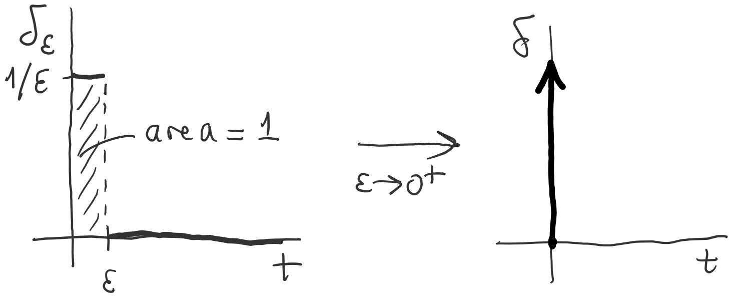
Nota: $Y(s)$ ha per "poli" gli autovalori del modo

TRASFORMATA DI LAPLACE

$$\mathcal{L}[y(t)] = Y(s) = \int_0^\infty y(t)\, e^{-st}\, dt$$

UN ESEMPIO SPECIALE: l'impulso, o delta di Dirac, $y(t) = imp(t) = \delta(t)$

Descrive matematicamente un segnale molto intenso di durata molto breve. Per es, un "colpo" imprime ad un corpo una forza impulsiva: $imp(t) = \delta(t) = \lim\limits_{\varepsilon \to 0^+} \delta_\varepsilon(t)$



Nota: per convenzione l'area è presa a destra dell'istante in cui scatta l'impulso

$$\int_0^t imp(\tau)\, d\tau = \begin{cases} 1 & \text{per } t > 0 \\ 0 & \text{per } t \leq 0 \end{cases} = sca(t)$$

Nota: dal punto di vista strettamente matematico, l'impulso non è una funzione (di t), ma un operatore che può essere applicato ad un altro segnale solo sotto integrale in dt (questi operatori sono detti "distribuzioni", da non confondere con quelle della statistica).

$$Y(s) = \int_0^\infty imp(t)\, e^{-st}\, dt \underset{\uparrow}{=} e^{-st}\Big|_{t=0} \underbrace{\int_0^{0^+} imp(t)\, dt}_{1} = 1$$

quando nell'integranda compare un impulso, possiamo valutare la parte a fattore dell'impulso nell'istante in cui questo scatta (nota: $imp(t-\tau)$ scatta in $t=\tau$) e portare questa parte fuori dall'integrale

PROPRIETA' PRINCIPALI DELLA TRASFORMATA DI LAPLACE

$$\mathcal{L}[y(t)] = Y(s) = \int_0^{\infty} y(t)\, e^{-st}\, dt$$

1) Linearità: $\mathcal{L}[\alpha_1 y_1(t) + \alpha_2 y_2(t)] = \alpha_1 Y_1(s) + \alpha_2 Y_2(s)$

2) Trasformata di una convoluzione $y(t) = \int_0^{+\infty} g(t-\tau)\, u(\tau)\, d\tau = g(t) \circledast u(t)$

$Y(s) = G(s)\, U(s)$

3) Trasformata del segnale derivato e integrato

$$\mathcal{L}[\dot{y}(t)] = Y^{(1)}(s) = s\,Y(s) - y(0) \quad , \quad \mathcal{L}\left[\int_0^t y(\tau)\, d\tau\right] = \frac{Y(s)}{s}$$

4) Valore iniziale e finale del segnale

Per segnali $y(t)$ con trasformata $Y(s) = \dfrac{P_N(s)}{P_D(s)}$ razionale fratta propria ($\mathrm{gr}\, P_D > \mathrm{gr}\, P_N$)
(il risultato vale anche più in generale)

$$\lim_{t \to 0^+} y(t) = \lim_{s \to +\infty} s\,Y(s)$$

Se le radici di $P_D(s)$ hanno $\mathrm{Re} < 0$ oppure sono nulle, allora vale anche

$$\lim_{t \to +\infty} y(t) = \lim_{s \to 0^+} s\,Y(s) \quad \text{(dove il limite può valere } \infty\text{)}$$

ANTITRASFORMATA DI SEGNALI A TRASFORMATA RAZIONALE FRATTA : il metodo di Heaviside

$$Y(s) = \frac{P_N(s)}{(s-p_1)^{a_1}(s-p_2)^{a_2}\cdots(s-p_d)^{a_d}}$$

$p_1, \ldots, p_d$ radici distinte di $P_D(s)$

si può sempre scomporre in modo univoco come $= \gamma_0$ $\longrightarrow = 0$ gr $P_N <$ gr P_D

$$+ \frac{\gamma_{11}}{s-p_1} + \frac{\gamma_{12}}{(s-p_1)^2} + \cdots + \frac{\gamma_{1a_1}}{(s-p_1)^{a_1}} + \cdots$$

$$+ \frac{\gamma_{d1}}{s-p_d} + \frac{\gamma_{d2}}{(s-p_d)^2} + \cdots + \frac{\gamma_{da_d}}{(s-p_d)^{a_d}},$$

dove i coefficienti γ_{ij} si determinano imponendo l'uguaglianza

L'antitrasformata si ottiene antitrasformando ogni singolo termine (linearità)

ESEMPIO: $Y(s) = \dfrac{\mu}{s^2(1+sT)} = \dfrac{\mu/T}{s^2(s+\frac{1}{T})} = \dfrac{\gamma_{11}}{s} + \dfrac{\gamma_{12}}{s^2} + \dfrac{\gamma_{21}}{s+\frac{1}{T}} = \dfrac{s(s+\frac{1}{T})\gamma_{11} + (s+\frac{1}{T})\gamma_{12} + s^2\gamma_{21}}{s^2(s+\frac{1}{T})}$

$\rightarrow$ dobbiamo imporre l'uguaglianza dei num: $\mu/T = (\gamma_{11}+\gamma_{21})s^2 + \left(\frac{\gamma_{11}}{T} + \gamma_{12}\right)s + \frac{\gamma_{12}}{T}$

$$\begin{cases} \gamma_{11} + \gamma_{21} = 0 \rightarrow \gamma_{21} = -\gamma_{11} \longrightarrow \gamma_{21} = \mu T \\ \frac{\gamma_{11}}{T} + \gamma_{12} = 0 \rightarrow \gamma_{12} = -\frac{\gamma_{11}}{T} \longrightarrow \gamma_{11} = -\mu T \\ \frac{\gamma_{12}}{T} = \frac{\mu}{T} \rightarrow \gamma_{12} = \mu \end{cases}$$

$$y(t) = \underbrace{\gamma_{11}}_{\gamma_{11}\,\mathrm{sca}(t)} + \underbrace{\gamma_{12}t}_{\gamma_{12}\,\mathrm{ram}(t)} + \gamma_{21}e^{-t/T} = \mu(t-T) + \mu T e^{-t/T}$$

γ_{11} sca(t) γ_{12} ram(t) $\rightarrow$

TRASFORMATA ZETA

$$\mathcal{Z}[y(t)] = Y(z) = \sum_{t=0}^{+\infty} y(t)\, z^{-t}$$

ESEMPI: segnali di tipo "modo"

$$y(t) = \lambda^t \quad Y(z) = \sum_{t=0}^{\infty} (\lambda z^{-1})^t \underset{\substack{\uparrow \\ \text{serie geom.} \\ |z|>|\lambda|}}{=} \frac{1}{1-\lambda z^{-1}} = \frac{z}{z-\lambda},$$

caso particolare: $y(t) = \mathrm{sca}(t) \quad Y(z) = \dfrac{z}{z-1}$

$$\sum t q^t = q \frac{d}{dq} \sum q^t = q \frac{d}{dq} \frac{1}{1-q} = \frac{q}{(1-q)^2}$$

$$y(t) = t\lambda^t \quad Y(z) = \sum_{t=0}^{\infty} t(\lambda z^{-1})^t = \frac{\lambda z^{-1}}{(1-\lambda z^{-1})^2} = \frac{\lambda z}{(z-\lambda)^2}$$

$$y(t) = \cos(\vartheta t) \quad Y(z) = \sum_{t=0}^{\infty} \frac{e^{i\vartheta t} + e^{-i\vartheta t}}{2} z^{-t} = \frac{1}{2}\frac{z}{z-e^{i\vartheta}} + \frac{1}{2}\frac{z}{z-e^{-i\vartheta}} = \frac{z(z-\cos\vartheta)}{z^2 - 2\cos\vartheta\, z + 1}$$

$$y(t) = \sin(\vartheta t) \quad Y(z) = \sum_{t=0}^{\infty} \frac{e^{i\vartheta t} - e^{-i\vartheta t}}{2i} z^{-t} = \frac{1}{2i}\frac{z}{z-e^{i\vartheta}} - \frac{1}{2i}\frac{z}{z-e^{-i\vartheta}} = \frac{\sin\vartheta\, z}{z^2 - 2\cos\vartheta\, z + 1}$$

In generale:

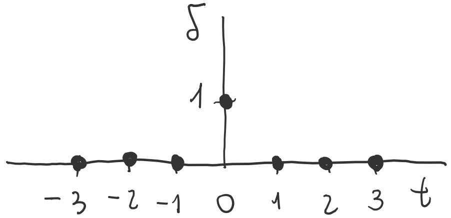
$$y(t) = \frac{t(t-1)\cdots(t-(k-2))\,\lambda^t}{(k-1)!} \longrightarrow Y(z) = \frac{\lambda^{(k-1)} z}{(z-\lambda)^k}$$

Nota: $Y(z)$ ha per "poli" gli autovalori del modo

TRASFORMATA ZETA

$$\mathcal{Z}[y(t)] = Y(z) = \sum_{t=0}^{+\infty} y(t)\, z^{-t}$$

UN ESEMPIO SPECIALE: l'impulso a t. discreto, $y(t) = \mathrm{imp}(t) = \delta(t) = \begin{cases} 1 & \text{per } t=0 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$



Analogamente al caso a t.c., vale

$$\sum_{k=0}^{t} \mathrm{imp}(k) = \begin{cases} 1 & \text{per } t \geq 0 \\ 0 & \text{per } t < 0 \end{cases} = \mathrm{sca}(t)$$

$$Y(z) = \sum_{t=0}^{\infty} \mathrm{imp}(t) = 1$$

PROPRIETA' DELLA TRASFORMATA ZETA:

Valgono proprietà analoghe al caso a t. continuo, in particolare:

1) Linearità: $\mathcal{Z}[\alpha_1 y_1(t) + \alpha_2 y_2(t)] = \alpha_1 Y_1(z) + \alpha_2 Y_2(z)$

2) Trasformata di una convoluzione $y(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} g(t-k)\, u(k)\, d\tau = g(t) \circledast u(t)$

$$Y(z) = G(z)\, U(z)$$