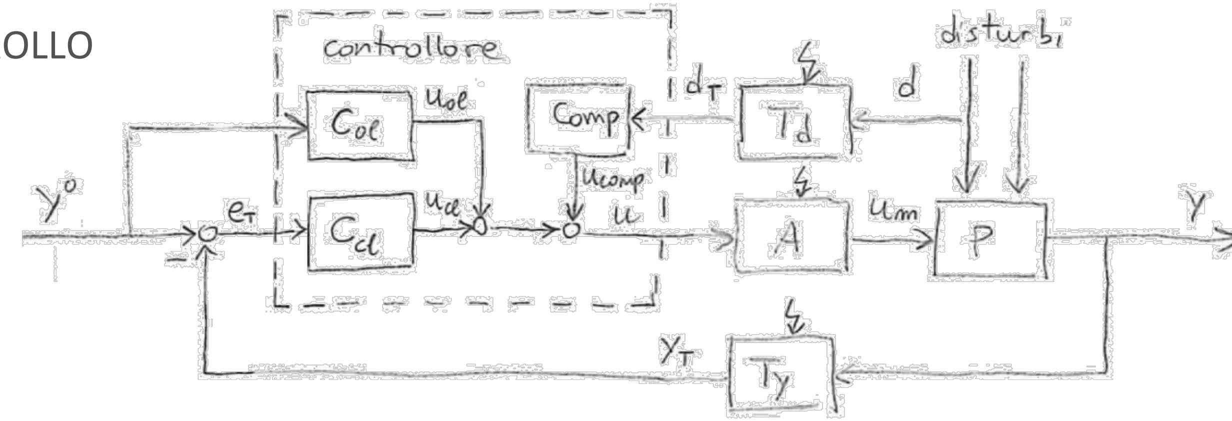
PROGETTO DI SISTEMI DI CONTROLLO
(nel dominio del tempo)



Obiettivo: vogliamo sfruttare le 3 proprietà studiate del movimento

stabilità, raggiungibilità, osservabilità

al fine di progettare la legge di controllo $u(t)$ = …

Notazione: fino ad ora abbiamo considerato i vari segnali come funzioni del tempo, p.e. $u(t)$, che danno il valore assunto dal segnale al tempo t. Il tempo è la variabile indipendente rispetto alla quale formuliamo il modello e ne ricaviamo dei risultati. Per questo motivo parliamo di "dominio del tempo".

Ciò si contrappone al "dominio della frequenza", in cui si considerano le trasformate (Laplace a t.c.; Z a t.d.) dei segnali, che rappresentano il contributo al segnale di segnali armonici al variare della frequenza. La frequenza diventa la variabile indipendente del modello (la F.d.T.) rispetto alla quale di ricavano i risultati.

RAGGIUNGIBILITA': una strategia di controllo in anello aperto

Obiettivo: trasferire x da x_0 a x^0 in tempo t

Soluzione: trovare $u_{[0,t)}(\cdot)$ tale che $x^0 = x(t) = \phi(t)x_0 + \Psi(t)u_{[0,t)}(\cdot)$

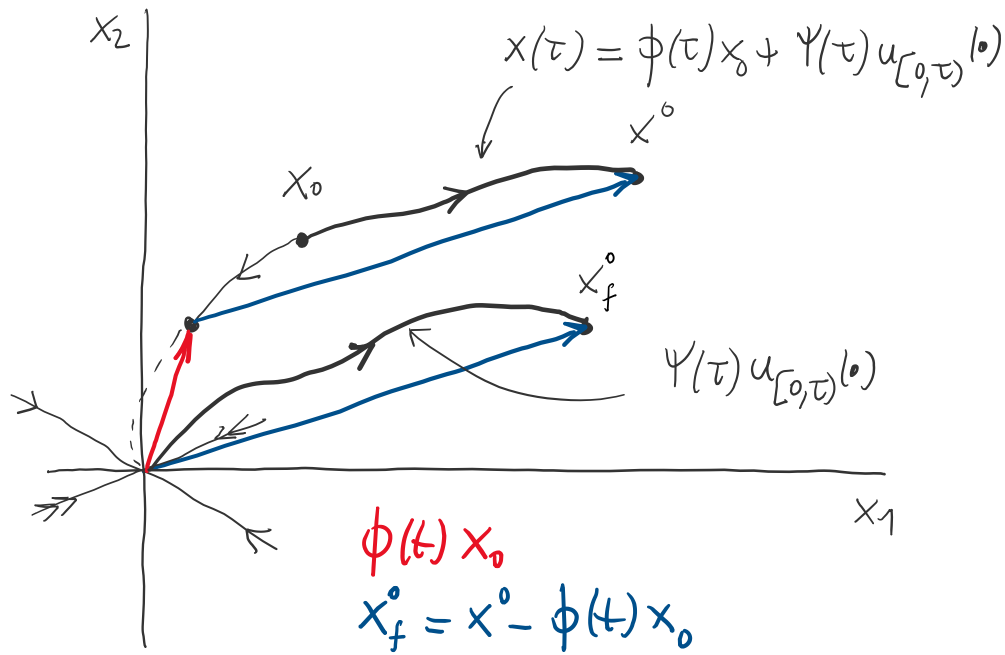
È possibile $\longleftrightarrow$ $x_f^0 = x^0 - \phi(t)x_0 \in X_r(t)$

Soluzione esplicita: $u(\tau) = \dots$ per $\tau \in [0,t)$

(è la stessa che trasferisce x da $x(0)=0$ a x_f^0 in tempo t)

Nota: x^0 non è un equibrio (corrispondente a $u(t)=u^0$), ma solo uno stato di interesse da raggiungere al tempo t.

Se lo fosse potrei raggiungerlo e poi applicare $u(\tau)=u^0$ per $\tau \geq t$, ma attenzione alla stabilità...



RAGGIUNGIBILITA': la legge di controllo in anello aperto (nel caso c.r., $\det(R) \neq 0$)

Obiettivo: $x(t) = \Psi(t)\, u_{[0,t)}(\cdot) = x_f^0$

t.d.: $t \leq n$

$$x(n) = A^{n-1} b\, u(0) + A^{n-2} b\, u(1) + \dots + Ab\, u(n-2) + b\, u(n-1) = R \underbrace{\begin{bmatrix} u(n-1) \\ u(n-2) \\ \vdots \\ u(1) \\ u(0) \end{bmatrix}}_{U} = x_f^0$$

$\rightarrow U = R^{-1} x_f^0$

Nota: $t = n$ se $u(0) \neq 0$ ($A^{n-1}b$ è necessario per ottenere x_f^0)

$t < n$ se alcuni valori iniziali in U sono nulli (si può spostare $t = 0$ in modo da avere $u(0) \neq 0$)

t = num. campioni di U dal primo $\neq 0$ all'ultimo $u(n-1)$

Nota: se il sist. non è c.r. ($\det(R) = 0$, rango$(R) = n_r < n$) e $x_f^0 \in X_r$, si scompone il sist. in parte r. (stato z_r) e n.r. (stato z_{nr}). Risulta $z_f^0 = Tx^0 = \begin{bmatrix} z_r^0 \\ 0 \end{bmatrix}$ e il calcolo di $u(t)$ si effettua imponendo $z_r(n_r) = z_r^0$.

RAGGIUNGIBILITA': la legge di controllo in anello aperto (nel caso c.r., $\det(R) \neq 0$)

Obiettivo: $x(t) = \Psi(t)\, u_{[0,t)}(\cdot) = x_f^0$

t.c.: $t > 0$ qualsiasi

È un problema di analisi "funzionale". Ci sono ∞ sol., perchè è sempre possibile aggiungere ad una sol $u_{[0,t)}(\cdot)$ un ingresso $\tilde{u}_{[0,t)}(\cdot)$ a cui corrisponde un mov. che parte e arriva in $x(0) = 0$ (lo spazio nullo dell'operatore $\Psi(t)$, ovvero $\Psi(t)\,\tilde{u}_{[0,t)}(\cdot) = 0$).

La sol. a minima "energia" $\int_0^t u(\tau)^2 d\tau$ (è quella ortogonale allo sp. nullo di $\Psi(t)$) risulta

$$u(\tau) = b^T e^{A(t-\tau)} W_r(t)^{-1} x_f^0 \quad , \text{ con } W_r(t) = \int_0^t e^{A\tau} b b^T e^{A^T\tau} d\tau$$

↳ matrice $n \times n$ detta gramiano di ragg.

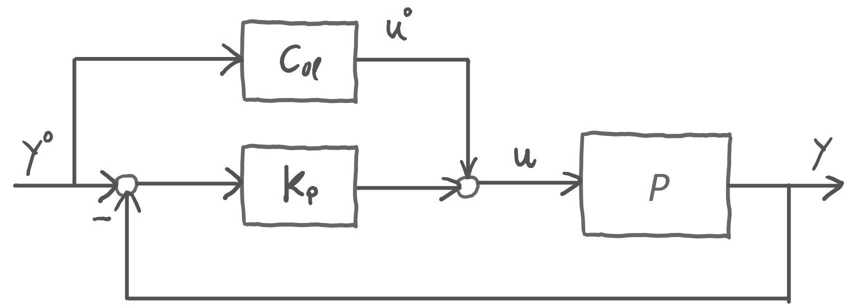
↳ invertibile $\forall t > 0 \longleftrightarrow \det(R) \neq 0$

Nota: più t è piccolo, più gli elementi di $W_r(t)$ risultano piccoli $\rightarrow u(\tau)$ grande $\rightarrow$ alta "potenza" richiesta per il trasferimento

LEGGE DI CONTROLLO (algebrica) o retroazione statica dello stato

La RAGGIUNGIBILITA' ci offre anche una strategia di controllo in anello chiuso che generalizza la semplice legge di controllo proporzionale

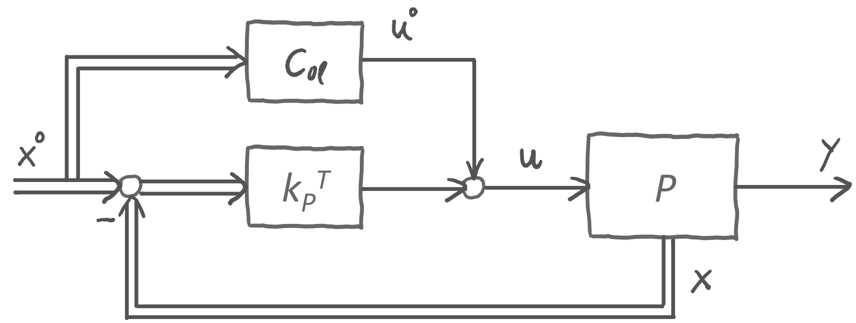
$$u(t) = u^0 + K_p(y^0 - y)$$

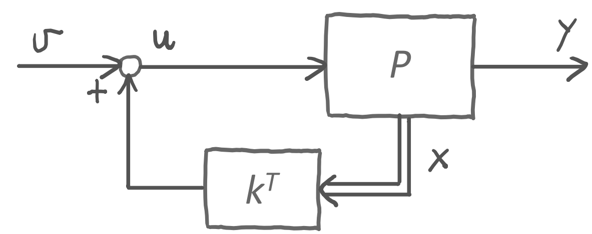


dove (u^0, x^0, y^0) è equilibrio del processo *P* e y^0 è un riferimento costante.

Legge di controllo:

$$\begin{aligned} u(t) &= u^0 + K_p^T(x^0 - x) \\ &= u^0 + K^T(x - x^0) \\ &= \underbrace{u^0 - K^T x^0}_{v^0} + \underbrace{K^T x}_{\text{retroazione statica dello stato}} \end{aligned}$$



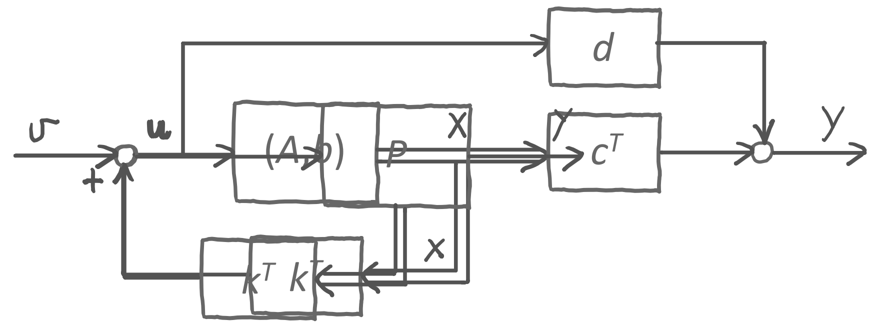


$K = -K_p = [k_1, k_2, \dots, k_n]$

$v^0 = u^0 - K^T x^0$: valore cost. per il segnale esterno v che regola l'equilibrio di riferim. (contiene C_{ol}!)

Idea: se il sistema di controllo è as. stab., $x(t) \to x^0$ a partire da qualsiasi $x(0)$.

Raggiungibilità e stabilità del sistema di controllo

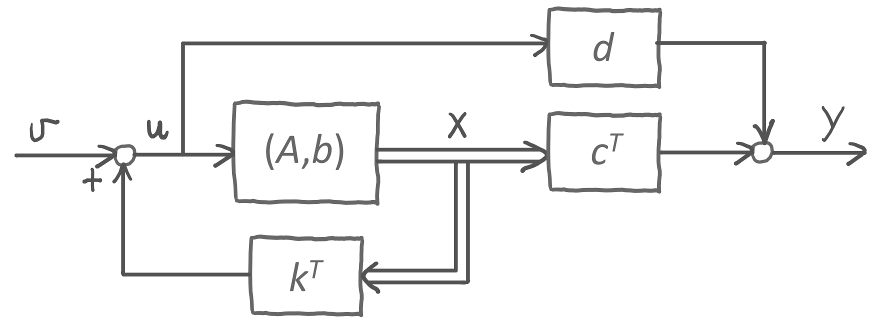


$$u(t) = k^T x + v$$

$$px = Ax + bu = Ax + bk^T x + bv$$
$$= (A + \underbrace{bk^T}) x + bv$$

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 & k_2 & \cdots & k_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 k_1 & \cdots & b_1 k_n \\ b_2 k_1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \\ b_n k_1 & & b_n k_n \end{bmatrix} = [b_i k_j]$$

Raggiungibilità e stabilità del sistema di controllo



$$u(t) = k^T x + v$$

$$px = Ax + bu = Ax + bk^T x + bv$$
$$= \underbrace{(A + bk^T)}_{A_c} x + bv$$

Teorema: assegnamento degli autovalori

Scelto un polinomio (monico) desiderato $\Delta^0(p)$, esiste (unico) il vettore k tale che $\Delta_{A_c}(p) = \Delta^0(p)$ se e solo se il sistema (A, b) è c.r.

Come determinare *k*?

1) Si calcola $\Delta_{A_c}(p) = \det(pI - A_c) = \lambda^n + \alpha_1^{(c)}(k)\lambda^{n-1} + \dots + \alpha_n^{(c)}(k)$

Nota: $\alpha_i^{(c)}(k)$ dipendono linearmente dai coeff. $k_1, \dots k_n$

2) Si impone $\Delta_{A_c}(p) = \Delta^0(p) = \lambda^n + \alpha_1^0 \lambda^{n-1} + \dots + \alpha_n^0$

$$\begin{cases} \alpha_1^{(c)}(k) = \alpha_1^0 \\ \vdots \\ \alpha_n^{(c)}(k) = \alpha_n^0 \end{cases}$$

n eq. lineari nelle n incognite $k_i \to k_i = \dots$

$$\boxed{\text{unica soluzione sotto la condizione } \det(R) \neq 0}$$

ESEMPIO: controllo del braccio robotico

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{h}{J} \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{J} \end{bmatrix} \rightarrow R = [b \;\; Ab] = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{J} \\ \frac{1}{J} & -\frac{h}{J^2} \end{bmatrix} \rightarrow \det R = -\frac{1}{J^2} \neq 0 \quad (\text{c.r.})$$

$$c^T = [1 \quad 0], \quad d = [0]$$

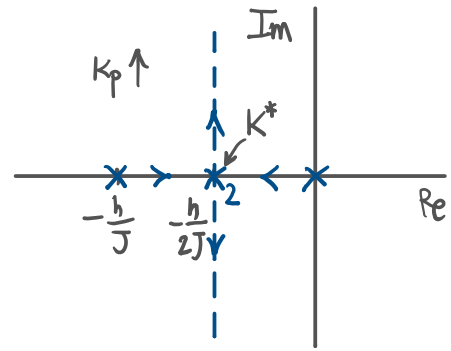
Abbiamo già analizzato il controllore proporzionale

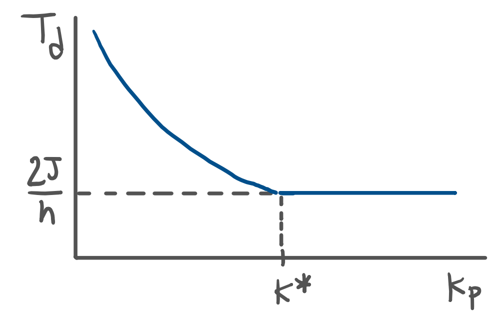
$$u(t) = u^0 + k_p(y^0 - y)$$

con equilibrio di rif. $x^0 = \begin{bmatrix} y^0 \\ 0 \end{bmatrix}$ e $u^0 = 0$

$$\dot{x} = Ax + bu = Ax - k_p b c^T x + k_p y^0$$

$$A_c = A - k_p b c^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k_p}{J} & -\frac{h}{J} \end{bmatrix}$$





Legge di controllo:

$$A_c = A + bK^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{h}{J} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{J} \end{bmatrix} [k_1 \;\; k_2] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{k_1}{J} & \frac{k_2 - h}{J} \end{bmatrix}, \quad \begin{aligned} v^0 &= u^0 - K^T x^0 = -k_1 y^0 \\ u(t) &= k_1(x_1 - y^0) + k_2 x_2 \end{aligned}$$

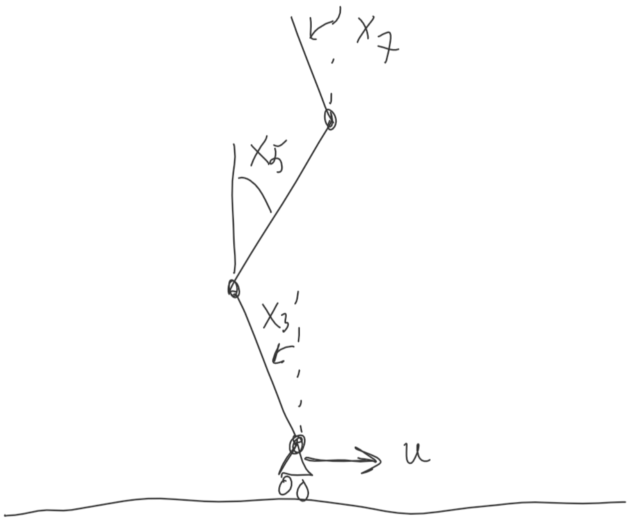
$$\Delta_{A_c}(p) = p^2 + \frac{h - k_2}{J} p - \frac{k_1}{J}$$

$$\Delta^\circ(p) = \left(p + \frac{1}{T_1^\circ}\right)\left(p + \frac{1}{T_2^\circ}\right)$$

$$\begin{cases} \frac{h - k_2}{J} = \frac{1}{T_1^\circ} + \frac{1}{T_2^\circ} & \longrightarrow \quad k_2 = h - J\left(\frac{1}{T_1^\circ} + \frac{1}{T_2^\circ}\right) \\ -\frac{k_1}{J} = \frac{1}{T_1^\circ T_2^\circ} & \longrightarrow \quad k_1 = -\frac{J}{T_1^\circ T_2^\circ} \end{cases}$$

T_1°, T_2°: cost. di tempo desiderate, p.e. $T_1^\circ = T_d^\circ$ e $T_2^\circ = T_d^\circ / 10$

ESEMPIO: il pendolo (multiplo) rovesciato



$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ \vdots \end{bmatrix} \begin{array}{l} \text{pos carrello} \\ \text{vel carrello} \\ \text{pos ang asta 1} \\ \text{vel ang asta 1} \\ \left.\begin{array}{l} \\ \\ \end{array}\right\} \text{asta 2} \\ \\ \end{array}$$

p.e. $=0$

$$x^0 = \begin{bmatrix} x_1^0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} \\ \\ \end{array}\right\} \text{carrello} \\ \left.\begin{array}{l} \\ \\ \end{array}\right\} \text{asta 1} \\ \left.\begin{array}{l} \\ \\ \end{array}\right\} \text{asta 2} \end{array}$$

Linearizzazione

$\delta x = x - x^0 = x$ (fissando $x_1^0 = 0$)

$\delta u = u - u^0 = u$ ($u^0 = 0$)

$\dot{x} = Ax + bu$ (sistema linearizzato)

Raggiungibilità: $R = [b, Ab, \dots, A^5 b]$ (2 aste)

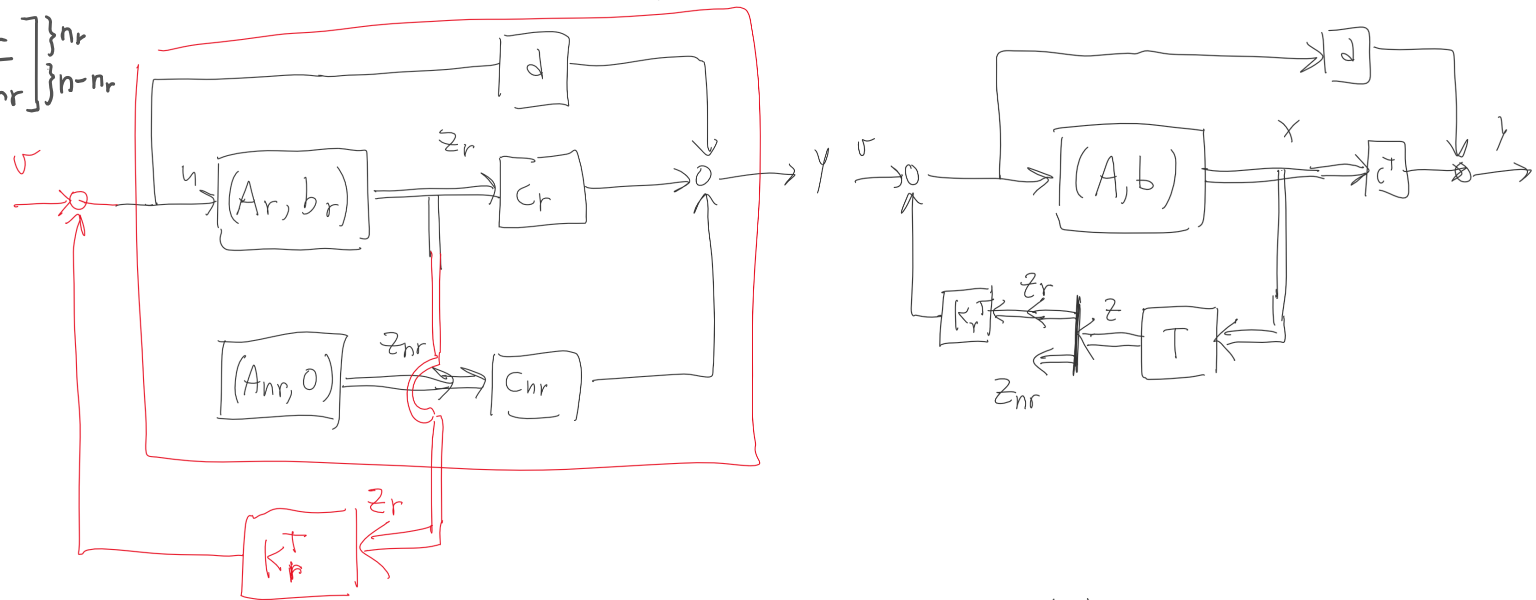
$\det(R) \neq 0 \rightarrow u = K^T x + \underbrace{u^0 - K^T x^0}_{v^0 = 0}$

Il caso di sistema non c.r. e la STABILIZZABILITA'

Progettiamo una legge di controllo ridotta sullo stato z_r della parte ragg.

$$z = Tx\,, \quad z = \begin{bmatrix} z_r \\ \hline z_{nr} \end{bmatrix} \begin{matrix} \}n_r \\ \}n-n_r \end{matrix}$$

$$n_r = \text{rango}(R)$$



$$u = K_r^T z_r + v$$ $\longrightarrow$ posso scegliere "a piacere" $\Delta_{A_r + b_r K_r^T}(\lambda)$

$\longrightarrow$ mentre non posso modificare $\Delta_{A_{nr}}(\lambda)$

Sistemi stabilizzabili. Idea: sono quelli che possono essere resi as. stab. (se non lo sono già) con una retroazione statica dello stato.

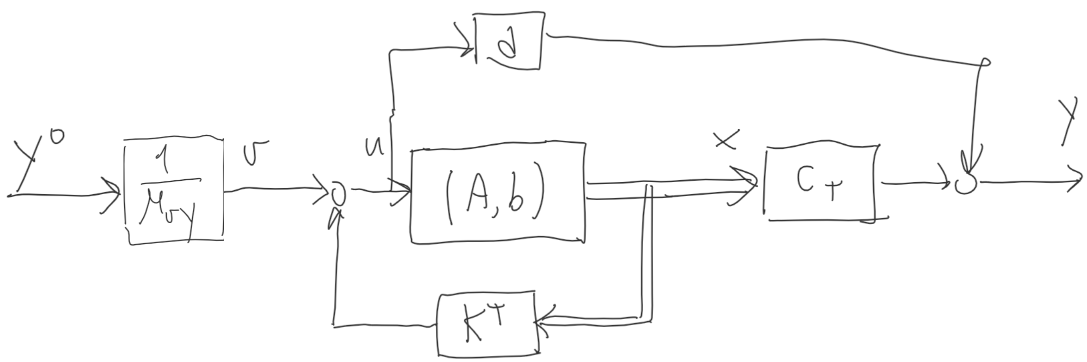
Def: sistema stabilizzabile : sist. con la parte n.r. assente o as. stab.

Nota sul calcolo di v^0

1) $v^0 = u^0 - k^T x^0$, (u^0, x^0) è l'equilibrio desiderato

2) senza passare attraverso (u^0, x^0), ma solo considerando y^0

Dopo aver determinato K^T imponendo la stabilità desiderata si calcola il guadagno μ_{vy} da v a y.



$$px = A_c x + bv$$

$$y = c^T x + du = c^T x + d k^T x + dv = \underbrace{(c^T + d k^T)}_{c_c^T} x + dv$$

Il nostro desiderio è $\mu_{y^0 y} = 1 \rightarrow v^0 = \dfrac{y^0}{\mu_{vy}}$

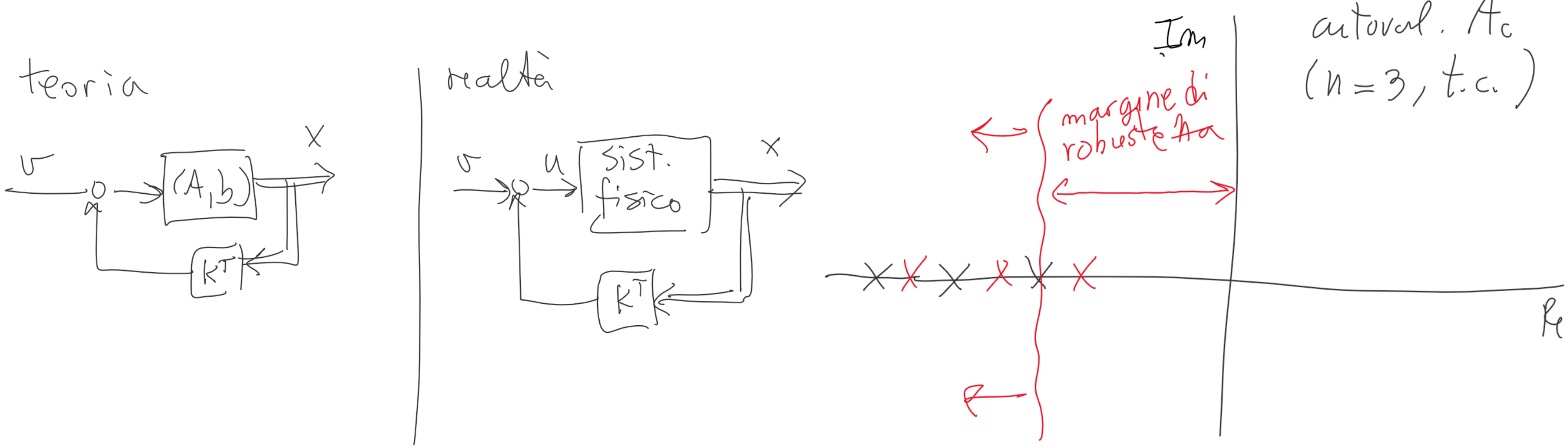
$$\mu_{vy} = \begin{cases} -c_c^T A_c^{-1} b + d & (t.c.) \\ c_c^T (I - A_c)^{-1} b + d & (t.d.) \end{cases}$$

Nota: il controllo della precisione del controllo è in anello aperto

il valore di μ_{vy} sarà diverso da quello calcolato quando la legge di controllo viene implementata sul sistema fisico $\longrightarrow \mu_{y^0 y} \neq 1$

Nota sulla robustezza della stabilità del sistema di controllo

La stabilità è invece determinata in anello chiuso.
Pur di fissare gli autovalori di A_c "sufficientemente stabili", il sistema di controllo resta as. stab. a fronte di errori modellistici significativi



→ robustezza della stabilità del sistema di controllo

OSSERVABILITA': anche l'osservabilità ci da un'opportunità interessante per il controllo

Noi abbiamo discusso le variabili z_o osservabili come quelle responsabili della uscita libera ($z_o(0)=0 \to y_{lib}(t)=0 \ \forall t \geq 0$, $z_{o,i}(0) \neq 0 \to y_{lib}(t) \neq 0$)

In modo equivalente, le var z_o sono quelle per cui è possibile risalire al valore iniziale $z_o(0)$ a partire dall'uscita libera in un intervallo $[0,\tau]$

$$y_{lib\,[0,\tau]}(\cdot) \longrightarrow z_o(0) \qquad \left.\begin{array}{l} y_{[0,\tau]}(\cdot) \\ u_{[0,\tau]}(\cdot) \end{array}\right\} \ y_{lib}(t) = y(t) - y_{for}(t)$$

($x(0)$ se sist. c.o.)

Il nome "osservabilità" viene infatti dalla possibilità di "osservare" tutto il vettore di stato (o solo la parte z_o se il sist. non è c.o.) misurando una sola variabile d'uscita.

Nota: è una possibilità molto interessante per l'automatica, perchè misurare tutto x (p.e. per la legge di controllo) è costoso.

OSSERVABILITA': calcolo di $x(0)$ a partire da $y_{lib}(\tau)$, $\tau \in [0,t]$

t.d.: $y_{lib}(t) = c^T A^t x(0)$

$$\begin{aligned} y(0) &= c^T x(0) \\ y(1) &= c^T A x(0) \\ &\vdots \\ y(n-1) &= c^T A^{n-1} x(0) \\ &\vdots \end{aligned}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} y(0) \\ y(1) \\ \vdots \\ y(n-1) \end{bmatrix}}_{Y} = \begin{bmatrix} c^T \\ c^T A \\ \vdots \\ c^T A^{n-1} \end{bmatrix} x(0)$$

se $\det(\mathcal{O}) \neq 0 \rightarrow x(0) = \mathcal{O}^{-1} Y$

il sistema si dice <u>completamente oss</u> (c.o.)

(tutte le variabili sono oss.)

$\mathcal{O} \rightarrow$ matrice di osservabilità

le sue righe sono i vettori $c, A^T c, \dots, (A^T)^{n-1} c$

(vettori di oss.)

se $\det(\mathcal{O}) = 0 \rightarrow$ ci sono ∞ sol come possibili $x(0)$

Una sol è quella (incognita) x_0 da cui il sistema è partito per generare y_{lib}

Le ∞ soluzioni che otteniamo sono del tipo $x(0) = x_0 + \alpha x_{0,no}$ con $\mathcal{O} \cdot x_{0,no} = 0$

Nota: restano le stesse ∞ sol. anche considerando le eq. $y(t) = c^T A^t x(0)$, $t \geq n$
perchè le righe $c^T A^t$ con $t \geq n$ sono combinazioni delle prime n

$n_o = \text{rango}(\mathcal{O}) \rightarrow$ le prime n_o righe di $\mathcal{O}$ sono indip.

$x_{0,no}$ sono cond. iniziali che generano $y_{lib}(t) = 0 \ \forall t \geq 0$

$\hookrightarrow \in$ sp. nullo di $\mathcal{O}$ = X_{no} sotto-spazio di non osservabilità : ha dimensione $n - n_o$

OSSERVABILITA' calcolo di $x(0)$ a partire da $y_{lib}(\tau)$, $\tau \in [0,t]$

t.c.: $y_{lib}(t) = c^T e^{At} x(0) = c^T \left(I + At + A^2 \frac{t^2}{2} + \dots \right) x(0)$

Se $\det(\theta) \neq 0$, $x(0)$ può essere calcolato elaborando una registrazione di $y_{lib\,[0,t)}(\cdot)$ con $t>0$ qualsiasi. È un problema di analisi "funzionale" che ha la seguente soluzione:

$$x(0) = W_\theta(t)^{-1} \int_0^t e^{A^T \tau} c\, y_{lib}(\tau)\, d\tau, \quad \text{con} \quad W_\theta(t) = \int_0^t e^{A^T \tau} c c^T e^{A\tau}\, d\tau$$

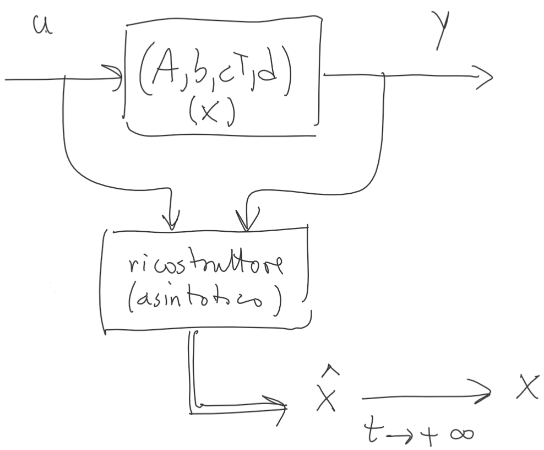
↳ matrice $n \times n$ detta gramiano di oss.

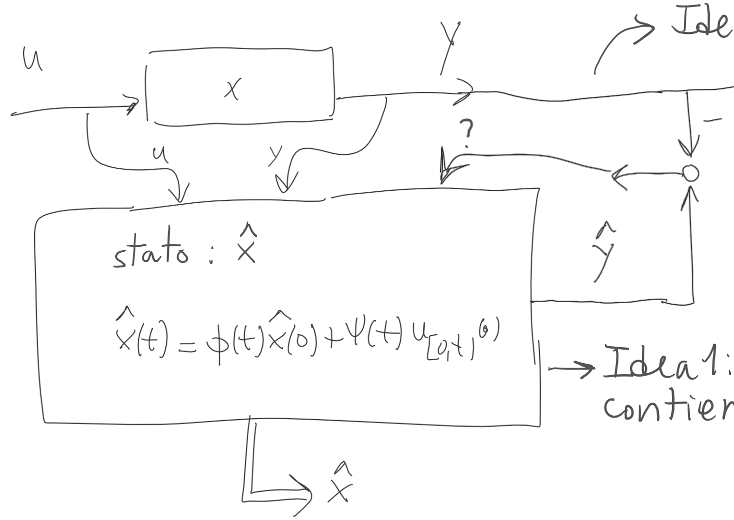
↳ invertibile $\forall t > 0 \iff \det \theta \neq 0$

Nota: più che $x(0)$ sarebbe interessante (per l'automatica, ma non solo) avere una stima di $x(t)$ che si aggiorna in tempo reale. Non è comodo calcolare $x(0)$ e poi $x(t)$ in avanti con la formula di Lagrange. Inoltre il calcolo in "anello aperto" non è robusto.

RICOSTRUTTORE ASINTOTICO DELLO STATO

Consideriamo il caso (A, c^T) c.o.





Idea 2: la stima $\hat{x}$ viene corretta in funzione dell'errore di stima di y

Idea 1: il ricostruttore contiene il modello del sist.

Supponiamo, per semplicità, il sistema ben descritto dal modello (A, b, c^T, d)

sistema: $px = Ax + bu$ ricostrutt: $p\hat{x} = A\hat{x} + bu + \ell(\hat{y} - y)$, $\ell = \begin{bmatrix} \ell_1 \\ \ell_2 \\ \vdots \end{bmatrix}$

$y = c^T x + du$ $\qquad \hat{y} = c^T\hat{x} + du$

errore di ricostruzione : $e = \hat{x} - x$

dinamica dell'errore: $pe = p\hat{x} - px = A\hat{x} + \cancel{bu} + \ell(c^T\hat{x} + \cancel{du} - c^Tx - \cancel{du}) - Ax - \cancel{bu}$

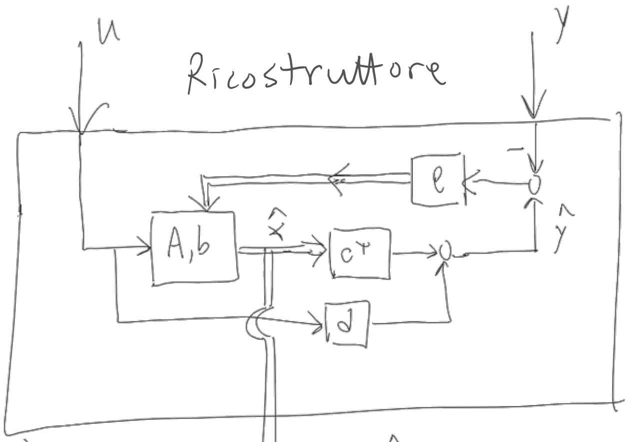
$$= A\underbrace{(\hat{x} - x)}_{e} + \underbrace{\ell c^T}_{n \times n}(\hat{x} - x) = \underbrace{(A + \ell c^T)}_{A_e} e$$

Nel caso ideale (sistema = modello) la dinamica dell'errore di ricostruzione è autonoma $pe = (A + \ell c^T) e$.

Se scelgo ℓ in modo da avere $(A+\ell c^T)$ as. stab $\rightarrow$ $e(t) \rightarrow 0 \ \forall e(0)$

Teorema (è ancora quello di assegnamento degli autovalori)

Scelto un polinomio (monico) desiderato $\Delta^0(p)$, esiste (unico) il vettore ℓ tale che $\Delta_{A_e}(p) = \Delta^0(p)$ se e solo se il sistema (A, c^T) è c.o.



Nota: nel caso non ideale (sistema $\neq$ modello), il ricostruttore resta as. stab. (robustezza della stab. di $A+\ell c^T$). Se u e y sono limitati (come tipico), $e = \hat{x} - x$ resta limitato e tanto più piccolo quanto più il modello è accurato.

$\hat{x} \xrightarrow[t \to +\infty]{} x$ (T_d della matrice $A + \ell c^T$)

$\hat{x}(0)$ = qualsiasi

(a t.d. $T_d = 0$ se $\Delta_{A_e}(\lambda) = \lambda^n$ (autov di A_e tutti nulli))

Come determinare *l* (come fatto per *k* per la retroazione statica dello stato)?

1) Si calcola $\Delta_{A_e}(p) = \det(pI - A_e) = \lambda^n + \alpha_1^{(e)}(\ell)\lambda^{n-1} + \dots + \alpha_n^{(e)}(\ell)$

Nota: $\alpha_i^{(e)}(\ell)$ dipendono linearmente dai coeff. $\ell_1, \dots \ell_n$

2) Si impone $\Delta_{A_e}(p) = \Delta^0(p) = \lambda^n + \alpha_1^0\lambda^{n-1} + \dots + \alpha_n^0$

$$\begin{cases} \alpha_1^{(e)}(\ell) = \alpha_1^0 \\ \vdots \\ \alpha_n^{(e)}(\ell) = \alpha_n^0 \end{cases}$$ n eq. lineari nelle n incognite $\ell_i \rightarrow \ell_i = \dots$

$\boxed{\text{unica soluzione sotto la condizione } \det(\mathcal{O}) \neq 0}$

ESEMPIO: controllo del braccio robotico

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{h}{J} \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{J} \end{bmatrix} \rightarrow \mathcal{O} = \begin{bmatrix} c^T \\ c^T A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \det\mathcal{O} = 1 \quad (\text{c.o.})$$

$$c^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad d = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$$

$$A_e = A + \ell c^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{h}{J} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \ell_1 \\ \ell_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ell_1 & 1 \\ \ell_2 & -\frac{h}{J} \end{bmatrix}$$

$$\Delta_{A_e}(p) = p^2 + \left(\frac{h}{J} - \ell_1\right)p - \left(\frac{h}{J}\ell_1 + \ell_2\right)$$

$$\Delta^0(p) = \left(p + \frac{1}{T_1^0}\right)\left(p + \frac{1}{T_2^0}\right)$$

$$\begin{cases} \frac{h}{J} - \ell_1 = \frac{1}{T_1^0} + \frac{1}{T_2^0} \\ -\left(\frac{h}{J}\ell_1 + \ell_2\right) = \frac{1}{T_1^0 T_2^0} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \ell_1 = \frac{h}{J} - \frac{1}{T_1^0} - \frac{1}{T_2^0} \\ \ell_2 = -\frac{h}{J}\ell_1 - \frac{1}{T_1^0 T_2^0} \end{cases}$$

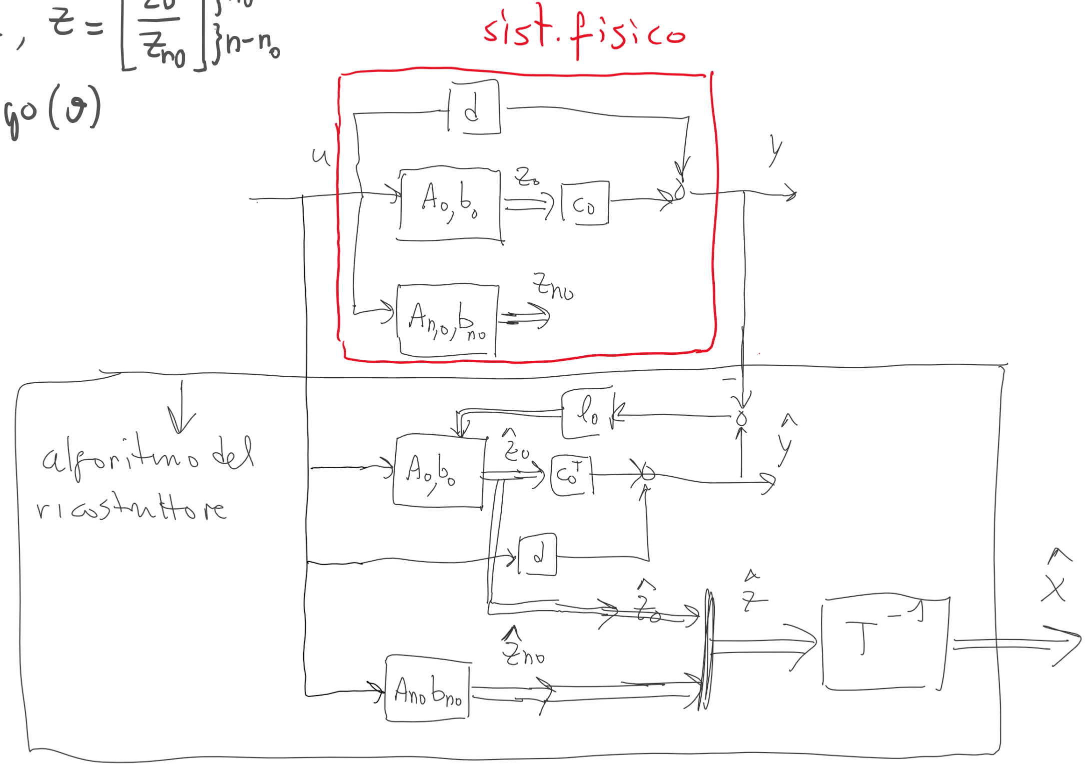
Nota: se si misura x_2 ($c^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$) il sistema risulta non c.o.

Il caso di sistema non c.o. e la RIVELABILITA'

Progettiamo un ricostruttore ridotto, del solo stato z_o della parte oss.

$z = Tx\,,\quad z = \begin{bmatrix} z_o \\ \hline z_{no} \end{bmatrix} \begin{matrix} \}n_o \\ \}n-n_o \end{matrix}$

$n_o = \text{rango}(\vartheta)$



- posso scegliere "a piacere" $\Delta_{A_o + l_o c_o^T}(\lambda)$
- non posso modificare $\Delta_{A_{no}}(\lambda)$
- $A_o + l_o c_o^T$ as. stab $\rightarrow \hat{z}_o \xrightarrow[t\to+\infty]{} z_o$
- nel caso ideale, $\hat{z}_{no} - z_{no}$ è un movimento libero $\rightarrow \hat{z}_{no} \rightarrow z_{no}$ se A_{no} as. stab

Sistemi rivelabili. Idea: sono quelli per cui è possibile ricostruire (asintoticamente) lo stato elaborando u e y.

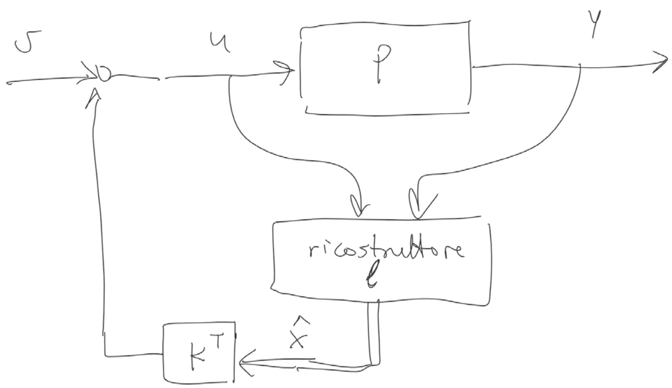
Def: sistema <u>rivelabile</u>: sist. con la parte n.o. assente o as. stab.

Il REGOLATORE = RICOSTRUTTORE (asintotico) + LEGGE DI CONTROLLO (algebrica)

Idea: applicare la legge di controllo alla ricostruzione dello stato: $u = k^T \hat{x} + v$

Funziona? Ancora posso scegliere "a piacere" gli autov. del processo modificati dalla retroaz.?

P: stabilizzabile e rivelabile



$$p x = Ax + bu = Ax + bk^T\hat{x} + bv$$

$$p\hat{x} = A\hat{x} + bu + \ell(\hat{y} - y)$$

$$= A\hat{x} + bk^T\hat{x} + bv + \ell(c^T\hat{x} + \cancel{du} - c^T x - \cancel{du})$$

$$= (A + bk^T + \ell c^T)\hat{x} - \ell c^T x + bv$$

$$y = c^T x + du$$

$$\hat{y} = c^T\hat{x} + du$$

$$p\begin{bmatrix} x \\ \hat{x} \end{bmatrix} = \underbrace{\left[\begin{array}{c|c} A & bk^T \\ \hline -\ell c^T & A+bk^T+\ell c^T \end{array}\right]}_{A_{reg}} \begin{bmatrix} x \\ \hat{x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b \\ \hline b \end{bmatrix} v$$

Idea: il ricostruttore funziona anche in presenza della legge di controllo, quindi mi aspetto che n degli autov di A_{reg} siano quelli di $A + \ell c^T$.

Consideriamo quindi il cambio di var: $z = \begin{bmatrix} x \\ e \end{bmatrix} = \overbrace{\left[\begin{array}{c|c} I & 0 \\ \hline -I & I \end{array}\right]}^{T} \begin{bmatrix} x \\ \hat{x} \end{bmatrix}$

$$p\begin{bmatrix} x \\ \hat{x} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} A & bk^T \\ \hline -lc^T & A+bk^T+lc^T \end{array}\right] \begin{bmatrix} x \\ \hat{x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b \\ \hline b \end{bmatrix} v$$

$$pe = p\hat{x} - px = (A+\cancel{bk^T}+lc^T)\hat{x} - lc^T x + \cancel{bv} - Ax - \cancel{bk^T\hat{x}} - \cancel{bv} = (A+lc^T)\underbrace{(\hat{x}-x)}_{e} = (A+lc^T)e$$

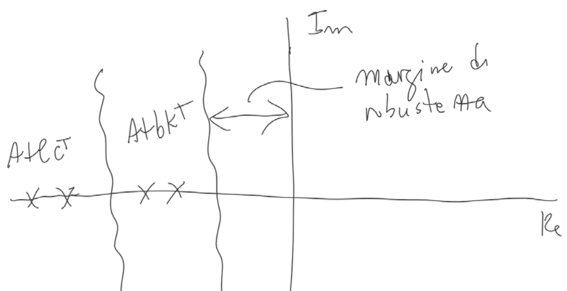
$$px = Ax + bk^T\hat{x} + bv = Ax + bk^T x + bk^T e + bv = (A+bk^T)x + bk^T e + bv$$

$\hat{x} \to x+e$

in termini di (x, e)

$$p\begin{bmatrix} x \\ e \end{bmatrix} = \underbrace{\left[\begin{array}{c|c} A+bk^T & bk^T \\ \hline 0 & A+lc^T \end{array}\right]}_{\tilde{A}_{reg}} \begin{bmatrix} x \\ \hline e \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b \\ \hline 0 \end{bmatrix} v \longrightarrow \Delta_{A_{reg}}(\lambda) = \Delta_{A_c}(\lambda)\,\Delta_{A_e}(\lambda)$$

Nota: scelta di l e k^T

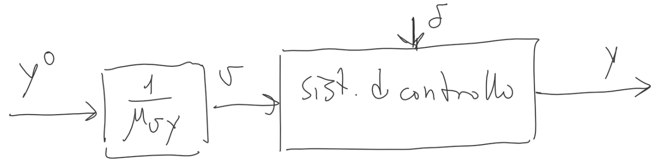


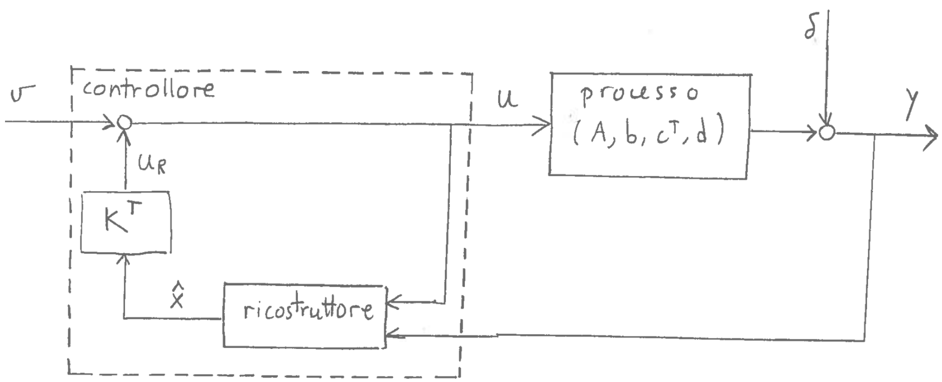
Precisione del controllo (calcolo di v^0)

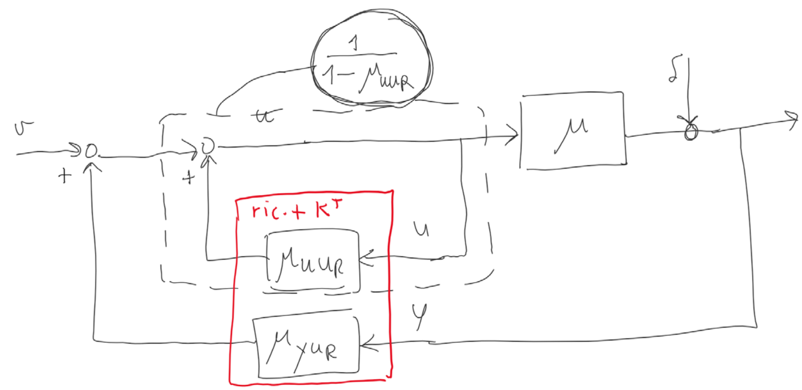
1) $u = K^T\hat{x} + v = u^0 + K^T(\hat{x} - x^0) \longrightarrow v^0 = u^0 - K^T x^0$

(u^0, x^0) è l'equilibrio del processo a cui corrisponde y^0

2) $v^0 = y^0 / \mu_{vy}$







calcolo di μ_{vy}: $\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + bu + \ell(c^T\hat{x} + du - y) = (A + \ell c^T)\hat{x} + (b + d\ell)u - \ell y$ (t.c.)

$$\mu_{uu_R} = -K^T(A+\ell c^T)^{-1}(b+d\ell)$$
$$\mu_{yu_R} = K^T(A+\ell c^T)^{-1}\ell$$
$$\Rightarrow \mu_{vy} = \frac{\frac{1}{1-\mu_{uu_R}}\mu}{1 - \frac{1}{1-\mu_{uu_R}}\mu\mu_{yu_R}}$$

, μ = guadagno del processo

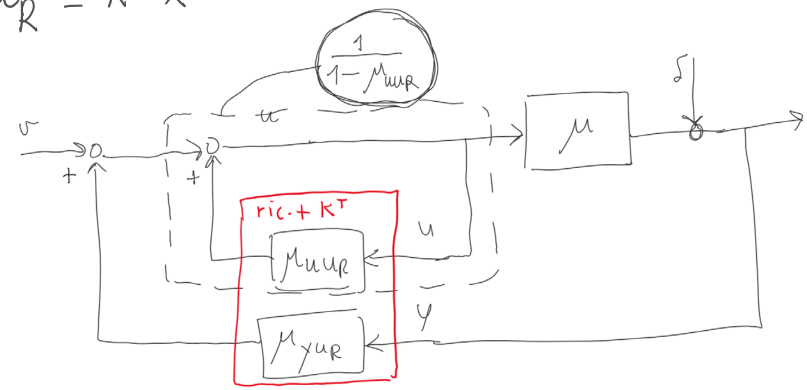
$$\mu = -c^T A^{-1} b + d$$

In presenza di disturbo costante $\bar{\delta}$

$$y \rightarrow \mu_{vy}\bar{v} + \mu_{\delta y}\bar{\delta}, \quad \text{con} \quad \mu_{\delta y} = \frac{1}{1 - \frac{1}{1-\mu_{uu_R}}\mu\mu_{yu_R}}$$

Calcolo di μ_{vy} a t.d.

$$\hat{x}(t+1) = (A+\ell c^T)\hat{x} + (b+d\ell)u - \ell y \quad , \quad u_R = K^T\hat{x}$$



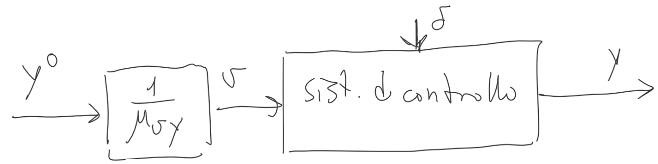
$$\mu_{uu_R} = -K^T\left(I-(A+\ell c^T)\right)^{-1}(b+d\ell)$$

$$\mu_{yu_R} = K^T\left(I-(A+\ell c^T)\right)^{-1}\ell$$

$$\mu_{vy} = \frac{\frac{1}{1-\mu_{uu_R}}\mu}{1-\frac{1}{1-\mu_{uu_R}}\mu\mu_{yu_R}} \qquad \mu_{\delta y} = \frac{1}{1-\frac{1}{1-\mu_{uu_R}}\mu\mu_{yu_R}}$$

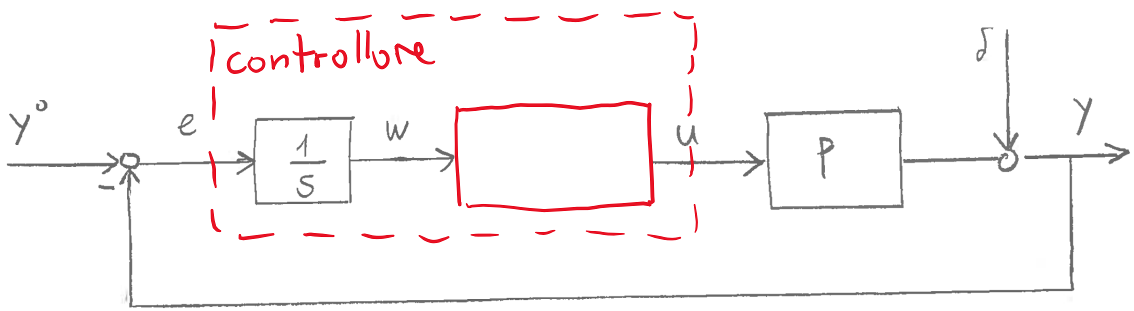
La precisione del controllo non è soddisfacente, perché

- è realizzata in anello aperto



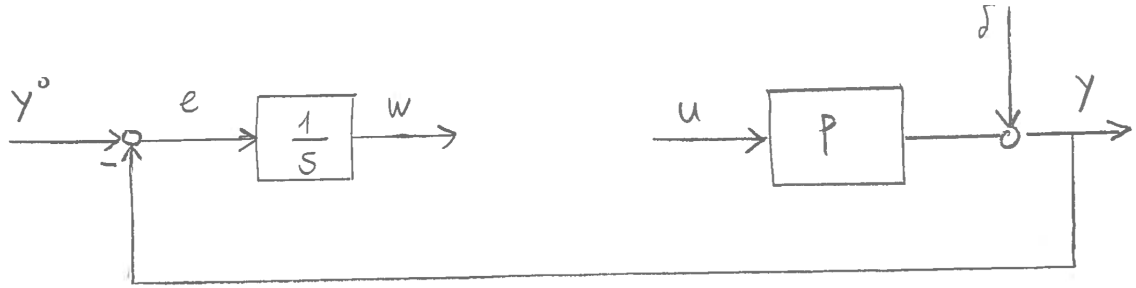
- non tiene conto di eventuali disturbi $y \to \mu_{\bar{v}y}\bar{v} + \mu_{\delta y}\bar{\delta}$
- il legame tra i guadagni $\mu_{\bar{v}y}$ e $\mu_{\delta y}$ e i vettori ℓ e K^T non è semplice (e comunque sarebbe meglio poter controllare stabilità e precisione in modo indipendente).

Idea: l'azione integrale del controllo, ovvero un contributo a *u* dell'integrale dell'errore di controllo.



Supponendo as. stab. il sist. di controllo e y^o e d costanti, tutti i segnali dello schema convergeranno a valori costanti (sono possibili uscite di un sistema as. stab. con ingressi costanti) $\longrightarrow$ $e \to 0$, altrimenti w divergerebbe.

Regolatore con regolazione a zero dell'errore (a fronte di riferimento e disturbo di processo costanti)



- Se il sistema in figura, con stato $z = \begin{bmatrix} x \\ \xi \end{bmatrix}$ è c.r. dall'ingresso u (ciò richiede che P non abbia zeri nell'origine!) e c.o. dall'uscita $w = \xi$, possiamo determinare un regolatore che assegni "arbitrariamente" i $2(n+1)$ autovalori del sistema di controllo.

- In assenza di disturbo ($\delta = 0$), il sistema è descritto da

$$\dot{x} = Ax + bu \,, \quad y = c^T x + du$$

$$\dot{\xi} = e = y^o - c^T x - du \,, \quad w = \xi$$

$$\dot{z} = \tilde{A} z + \tilde{B} \begin{bmatrix} u \\ y^o \end{bmatrix}, \quad w = \tilde{c}^T z + \tilde{d}^T \begin{bmatrix} u \\ y^o \end{bmatrix}$$

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ -c^T & 0 \end{bmatrix} \quad \tilde{B} = \begin{bmatrix} \overset{\tilde{b}}{\overset{\parallel}{\begin{bmatrix} b \\ -d \end{bmatrix}}} & \begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix} \end{bmatrix}$$

$$\tilde{c}^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \tilde{d}^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Nota sulla ragg. e oss. del "processo esteso" dall'integratore (t.c.)

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ -c^T & 0 \end{bmatrix} \quad \tilde{B} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} b \\ -d \end{bmatrix} & \begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix} \end{bmatrix}$$

$$\tilde{c}^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \tilde{d}^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- Il processo esteso è c.r. $\longleftrightarrow$ $\begin{cases} P \text{ originale è c.r.} \\ \text{e non ha zeri in } s=0 \quad (\mu \neq 0) \end{cases}$

Infatti (per Cayley-Hamilton) risulta $\alpha_n b + \alpha_{n-1} Ab + \dots + \alpha_1 A^{n-1} b + A^n b = 0$

$$R = \begin{bmatrix} b & Ab & A^2 b & \cdots & A^n b \\ -d & -c^T b & -c^T Ab & \cdots & -c^T A^{n-1} b \end{bmatrix}$$

che moltiplicando per $c^T A^{-1}$ a sinistra diventa

$\alpha_n c^T A^{-1} b + \alpha_{n-1} c^T b + \dots + \alpha_1 c^T A^{n-2} b + c^T A^{n-1} b = 0$

quindi, con (A, b) c.r., se (e solo se) $d = c^T A^{-1} b$ $(\mu = 0)$ le $n+1$ colonne di R sono linearmente dipendenti

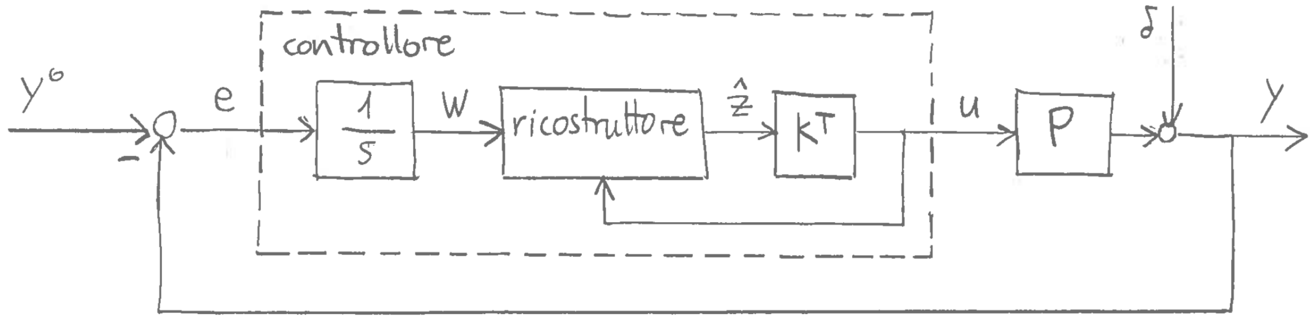
- Il processo esteso è c.o. $\longleftrightarrow$ P originale è c.o.

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -c^T & 0 \\ -c^T A & 0 \\ \vdots & \vdots \\ -c^T A^{n-1} & 0 \end{bmatrix}$$

- L'equazione di stato del ricostruttore (sempre con $\delta = 0$) dovrebbe essere

$$\dot{\hat{z}} = \tilde{A}\hat{z} + \tilde{b}u + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} y^o + \ell(\tilde{c}^T\hat{z} - \tilde{c}^T z)$$

ma togliamo il contributo di y^o. Ciò permette di ottenere lo schema seguente, che ha comunque per autovalori quelli di $\tilde{A}+\tilde{b}k^T$ e $\tilde{A}+\ell\tilde{c}^T$.

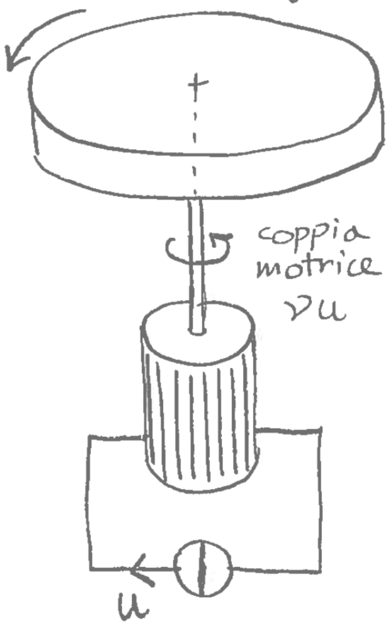


- Senza l'ingresso y^o (e δ) al ricostruttore, $\hat{z} \not\to z$, ma non importa ai fini del controllo! Quello che conta è la stabilità del sistema di controllo. Gli $n+2$ autovalori non dipendono dal contributo di y^o al ric. perché tale contributo non modifica l'anello dello schema.

- Se il sistema di controllo è as. stab., $e \to 0$ a fronte di ingressi y^o e δ costanti. Ciò anche se P non è esattamente descritto dal sistema (A, b, c^T, d) (robustezza del sistema di controllo!)

Esempio: controllo di velocità di un motore elettrico.

x : velocità angolare



$J = 1\ \mathrm{Kgm}^2$, $h = 20\ \mathrm{Nms}$, $\nu = 100\ \mathrm{NmA}^{-1}$

riferimento $y^0 =$ costante

costanti di tempo desiderate

- processo : $T_1 = 0.2\,s$, $T_2 = 0.1\,s$
- ricostruttore : $T_3 = 0.02\,s$, $T_4 = 0.01\,s$

$$\dot{x} = \frac{1}{J}(\nu u - hx), \quad y = x$$

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} -\frac{h}{J} & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad \tilde{B} = \begin{bmatrix} \frac{\nu}{J} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad R = \begin{bmatrix} \frac{\nu}{J} & -\frac{h\nu}{J^2} \\ 0 & -\frac{\nu}{J} \end{bmatrix} \quad \det R \neq 0$$

$$\tilde{b} = \begin{bmatrix} \frac{\nu}{J} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{c}^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \tilde{d}^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathcal{O} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad \det \mathcal{O} \neq 0$$

Infatti il processo $\left(a = -\frac{h}{J}, b = \frac{\nu}{J}, c = 1, d = 0\right)$ e' c.r., c.o. e senza zeri nell'origine $\left[P(s) = (\nu/h)/(1 + sJ/h)\right]$

Esempio: controllo di velocità di un motore elettrico.

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} -\frac{h}{J} & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \tilde{B} = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \tilde{b} \\ \shortparallel & \end{array} \\ \begin{bmatrix} \frac{\nu}{J} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\tilde{c}^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \tilde{d}^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{A} + \tilde{b} k^T = \begin{bmatrix} \frac{\nu k_1 - h}{J} & \frac{\nu k_2}{J} \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \Delta_{\tilde{A}+\tilde{b}k^T}(\lambda) = \lambda^2 + \frac{h - \nu k_1}{J}\lambda + \frac{\nu k_2}{J}$$

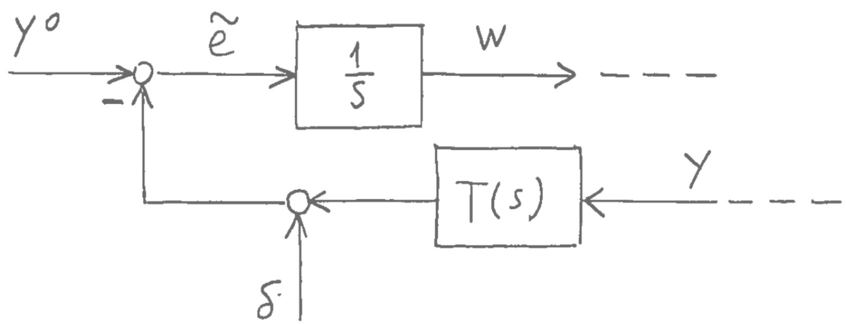
$$= \lambda^2 + \left(\frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2}\right)\lambda + \frac{1}{T_1 T_2}$$

$$\tilde{A} + l\tilde{c}^T = \begin{bmatrix} -\frac{h}{J} & l_1 \\ -1 & l_2 \end{bmatrix} \qquad \Delta_{\tilde{A}+l\tilde{c}^T}(\lambda) = \lambda^2 + \left(\frac{h}{J} - l_2\right)\lambda + l_1 - \frac{h}{J} l_2$$

$$= \lambda^2 + \left(\frac{1}{T_3} + \frac{1}{T_4}\right)\lambda + \frac{1}{T_3 T_4}$$

$$\begin{cases} k_1 = \frac{J}{\nu}\left(\frac{h}{J} - \frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2}\right) \\ k_2 = \frac{J}{\nu}\frac{1}{T_1 T_2} \end{cases} \qquad \begin{cases} l_1 = \frac{h}{J}\left(\frac{h}{J} - \frac{1}{T_3} - \frac{1}{T_4}\right) + \frac{1}{T_3 T_4} \\ l_2 = \frac{h}{J} - \frac{1}{T_3} - \frac{1}{T_4} \end{cases}$$

– considerando il trasduttore per y ed eventuali disturbi sulla misura, ovviamente $\tilde{e} \to 0$, ma non $e = y^o - y$.



Per es, se y^o e δ sono costanti (e il sistema di controllo as. stab.) a regime si ottiene

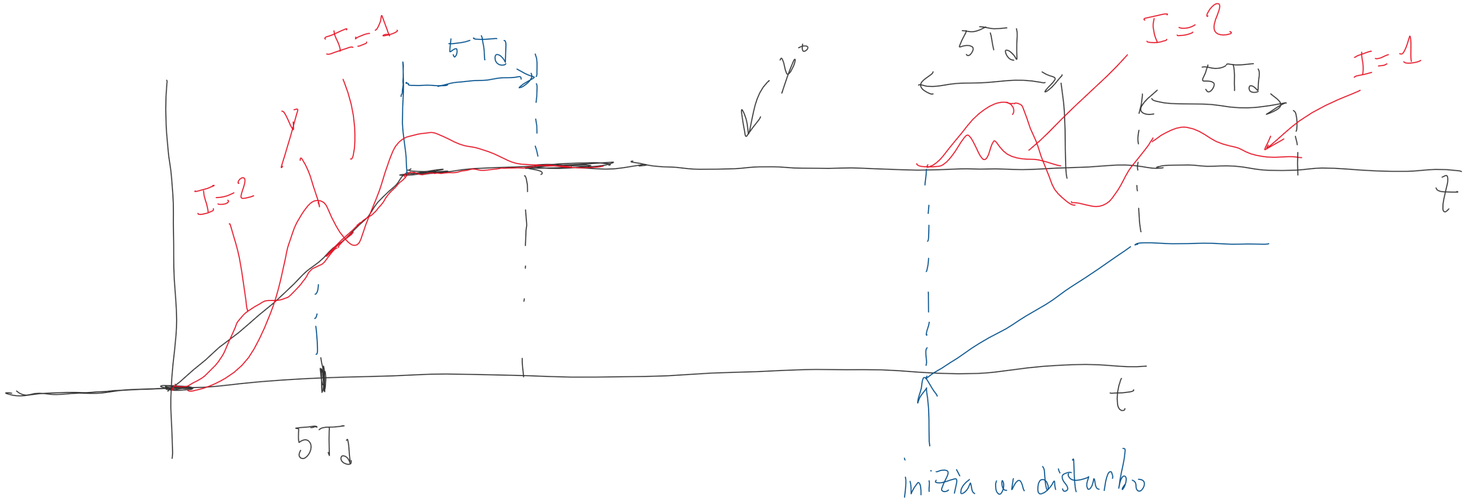
$$\tilde{e} = 0 \Rightarrow y^o = \delta + \mu_T y \Rightarrow e = y^o - y = \delta + (\mu_T - 1) y$$

Ovviamente gli errori di misura ($\delta \neq 0, \mu_T \neq 1$) sono un limite per il controllo in anello chiuso.

- Se si mettono I integratori in cascata, $I > 1$, e si assegnano i corrispondenti $2(n+I)$ autovalori del sistema di controllo garantendo as. stabilità, allora $e \to 0$ a fronte di ingressi y° e δ polinomiali in t di grado $< I$. Infatti, ciascun segnale nell'anello, inclusa l'uscita w dell'ultimo integratore, tenderà ad un polinomio di grado $< I$ e quindi l'errore e in ingresso al primo integratore tenderà a zero (altrimenti w tenderà ad un polinomio di grado I).

Interesse per y° e δ polinomiali è transitorio

y° di avviamento/spegnimento impianto



- La trattazione si può fare anche a tempo discreto. Non cambia praticamente nulla. L'integratore a t.d. ha equazione di stato

$$\begin{aligned}\xi(t+1) &= \xi(t) + e(t)\\ &= \xi(t) + y^o(t) - \delta(t) - c^T x(t) - d u(t)\end{aligned}$$

$$e \longrightarrow \boxed{\frac{1}{z-1}} \longrightarrow w$$

pertanto cambiano anche i seguenti elementi:

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ -c^T & 1 \end{bmatrix} \quad R = \begin{bmatrix} b & Ab & A^2 b & \cdots & A^n b \\ -d & -(c^T b + d) & -(c^T A b + c^T b + d) & \cdots & -(c^T A^{n-1} b + \cdots + c^T b + d) \end{bmatrix}$$

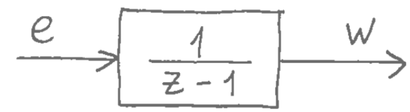
$$\det R \neq 0 \Longleftrightarrow P \text{ è c.r. e } \mu = c^T (I-A)^{-1} b + d \neq 0$$

Dimostrazione

Infatti, moltiplicando $\alpha_n b + \alpha_{n-1} A b + \cdots + \alpha_1 A^{n-1} b + A^n b$ (Cayley-Hamilton) a sinistra per $c^T(I-A)^{-1}$, se (e solo se) $d = -c^T(I-A)^{-1} b$ ($\mu = 0$), si ottiene la combinazione $\alpha_n, \alpha_{n-1}, \dots, \alpha_1, 1$ dei blocchi in seconda riga di R e quindi $\det R = 0$. Sviluppando $(I-A)^{-1} = I + A + A^2 + \cdots$ (serie geometrica di matrice), il blocco $(i+1)$-esimo si può infatti scrivere come $-c^T(A^{i-1} + \cdots + A + I - (I + A + A^2 + \cdots))b = c^T (I-A)^{-1} A^i b$.

– La trattazione si può fare anche a tempo discreto. Non cambia praticamente nulla. L'integratore a t.d. ha equazione di stato

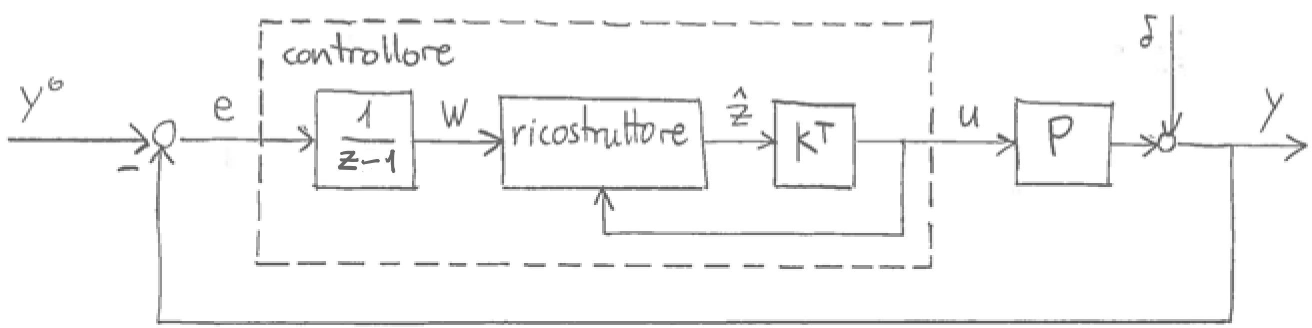
$$\begin{aligned}\xi(t+1) &= \xi(t) + e(t)\\ &= \xi(t) + y^o(t) - \delta(t) - c^T x(t) - du(t)\end{aligned}$$



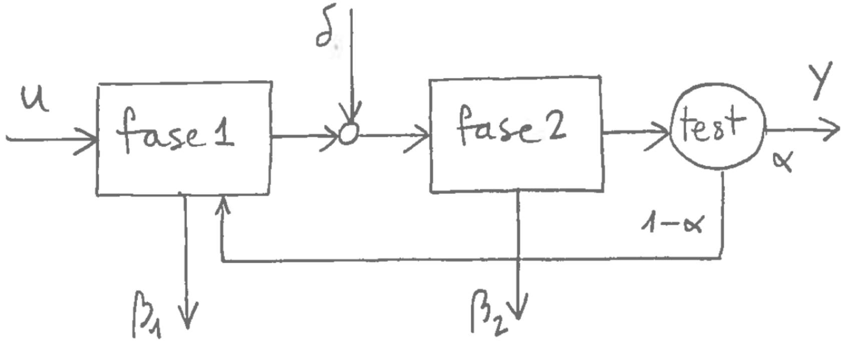
pertanto cambiano anche i seguenti elementi:

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ -c^T & 1 \end{bmatrix} \quad R = \begin{bmatrix} b & Ab & A^2 b & \cdots & A^n b \\ -d & -(c^T b + d) & -(c^T A b + c^T b + d) & \cdots & -(c^T A^{n-1} b + \cdots + c^T b + d) \end{bmatrix}$$

$$\det R \neq 0 \longleftrightarrow P \text{ è c.r. e } \mu = c^T (I - A)^{-1} b + d \neq 0$$



Esempio: sistema di produzione (da controllare in "tempo finito").



$$x_1(t+1) = u(t) + (1-\alpha)(1-\beta_2)\,x_2(t)$$
$$x_2(t+1) = (1-\beta_1)\,x_1(t) + d(t)$$
$$y(t) = \alpha(1-\beta_2)\,x_2(t)$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & (1-\alpha)(1-\beta_2) \\ 1-\beta_1 & 0 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad R = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1-\beta_1 \end{bmatrix} \quad \det R \neq 0$$

$$c^T = \begin{bmatrix} 0 & \alpha(1-\beta_2) \end{bmatrix} \quad d = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} \qquad \mathcal{O} = \begin{bmatrix} 0 & \alpha(1-\beta_2) \\ \alpha(1-\beta_1)(1-\beta_2) & 0 \end{bmatrix} \quad \det \mathcal{O} \neq 0$$

$$\mu = c^T(I-A)^{-1}b + d = \frac{\alpha(1-\beta_1)(1-\beta_2)}{1-(1-\alpha)(1-\beta_1)(1-\beta_2)} \neq 0$$

Il processo esteso:

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 0 & (1-\alpha)(1-\beta_2) & 0 \\ 1-\beta_1 & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha(1-\beta_2) & 1 \end{bmatrix} \qquad \tilde{B} = \begin{array}{cc} \tilde{b} & \\ \multicolumn{2}{c}{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}} \end{array}$$

$$\tilde{c}^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \tilde{d}^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Esempio: sistema di produzione (da controllare in "tempo finito").

$$\tilde{A}+\tilde{b}k^T = \begin{bmatrix} k_1 & (1-\alpha)(1-\beta_2)+k_2 & k_3 \\ 1-\beta_1 & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha(1-\beta_2) & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}\Delta_{\tilde{A}+\tilde{b}k^T}(\lambda) = \lambda^3 &- (k_1+1)\lambda^2 \\ &+ \left(k_1 - k_2(1-\beta_1) - (1-\alpha)(1-\beta_1)(1-\beta_2)\right)\lambda \\ &+ k_2(1-\beta_1) + k_3\alpha(1-\beta_1)(1-\beta_2) \\ &+ (1-\alpha)(1-\beta_1)(1-\beta_2)\end{aligned}$$

$$\tilde{A}+\ell\tilde{c}^T = \begin{bmatrix} 0 & (1-\alpha)(1-\beta_2) & \ell_1 \\ 1-\beta_1 & 0 & \ell_2 \\ 0 & -\alpha(1-\beta_2) & \ell_3+1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}\Delta_{\tilde{A}+\ell\tilde{c}^T}(\lambda) = \lambda^3 &- (\ell_3+1)\lambda^2 \\ &+ \left(\ell_2\alpha(1-\beta_2) - (1-\alpha)(1-\beta_1)(1-\beta_2)\right)\lambda \\ &+ \ell_1\alpha(1-\beta_1)(1-\beta_2) \\ &+ (\ell_3+1)(1-\alpha)(1-\beta_1)(1-\beta_2)\end{aligned}$$

$$\begin{cases} k_1 = -1 \\ k_2 = -\dfrac{1+(1-\alpha)(1-\beta_1)(1-\beta_2)}{1-\beta_1} \\ k_3 = \dfrac{1}{(1-\beta_1)(1-\beta_2)} \end{cases} \qquad \begin{cases} \ell_1 = 0 \\ \ell_2 = \dfrac{(1-\alpha)(1-\beta_1)}{\alpha} \\ \ell_3 = -1 \end{cases}$$