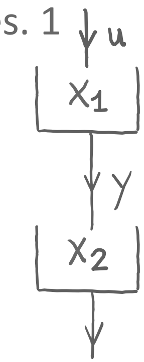
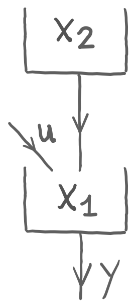
- Introduzione
- Formulazione del modello (dinamico, lineare, tempo-invariante)
- Movimento ed equilibrio
- Stabilità
- I sistemi non lineari (cenni)
- Raggiungibilità ed osservabilità
- Progetto di sistemi di controllo (nel dominio del tempo)
- Segnali e sistemi nel dominio della frequenza
- Progetto di sistemi di controllo (nel dominio della frequenza)

RAGGIUNGIBILITA' (da un solo ingresso) e OSSERVABILITA' (da una sola uscita)

es. 1


Nel ricavare il modello esterno da quello interno (formulazione del modello), abbiamo notato (con i due semplici esempi in figura) che:

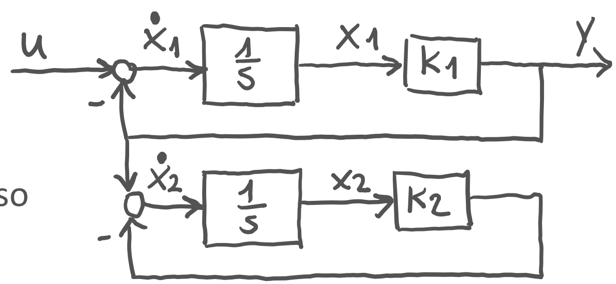
1) Alcune variabili di stato (o loro combinazioni) possono non influenzare l'uscita (la x_2 nell'es. 1). Le abbiamo chiamate <u>variabili non osservabili</u> (var. n.o.)
Le var. n.o. non contribuiscono al modello esterno che risulta quindi avere dimensione più piccola di quello interno e pari al numero di <u>variabili osservabili</u> (var. o.).

es. 2


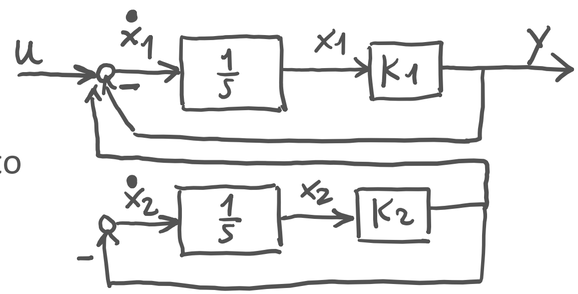
2) Alcune variabili di stato (o loro combinazioni) possono non essere influenzate dall'ingresso (la x_2 nell'es. 2). Le abbiamo chiamate <u>variabili non raggiungibili</u> (var. n.r.). La presenza di var. n.r. e o. (n.r.o., come la x_2 nell'es. 2) determina radici in comune nei polinomi N e D del mod. esterno, quindi una F.d.T di dimensione inferiore al mod. esterno e pari al numero di var. r.o.

Se una delle variabili x è n.r. o n.o., ciò si vede facilmente da una rappresentazione grafica del sistema o dallo schema a blocchi che rappresenta le singole variabili.

es. 1:
da x_2 non c'è collegamento causale (nel verso delle frecce) a y



es. 2:
da u non c'è collegamento causale a x_2.



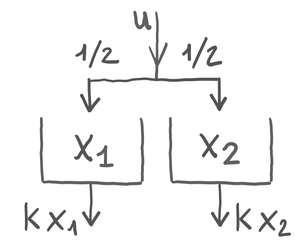
Altrimenti, non è sempre facile capire se ci sono combinazioni delle variabili x che sono n.r. e/o n.o. Consideriamo delle nuove variabili $z = Tx$ diamo definizioni di var. z_i r., n.r., o., n.o., e una teoria per identificarle. Iniziamo con la raggiungibilità.

RAGGIUNGIBILITA' (da un solo ingresso)

Consideriamo il solo effetto dell'ingresso ($x(0)=0$) sulle nuove variabili z. Le var. non raggiungibili sono quelle, se ci sono, che hanno movimento forzato nullo.

Var. z_i raggiungibile: movimento forzato non nullo.

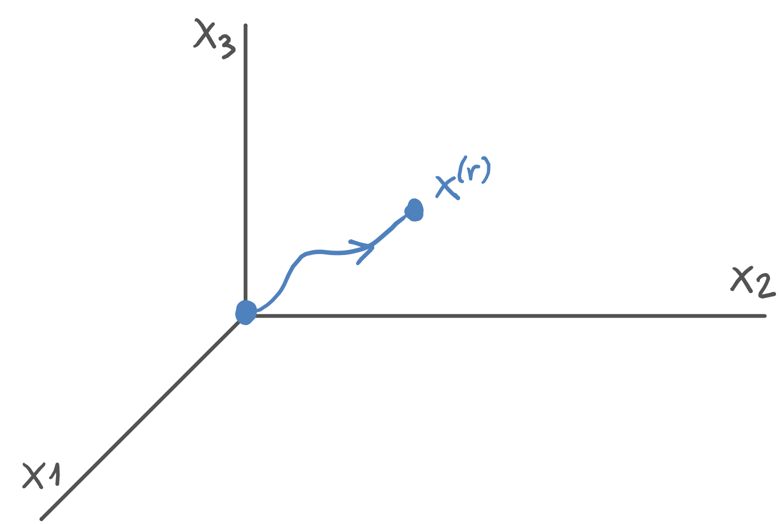
Var. z_i non raggiungibile: movimento forzato nullo.



Esempio: $z_1 = x_1$ o $z_1 = x_2$ sono entrambe var. raggiungibili.
$z_2 = x_1 - x_2$ è la var. n.r., perché i serbatoi sono identici (stesso k, altrimenti sarebbe r.)
Nota: la var. r. z_1 può esser scelta con molta libertà, basta che sia indipendente da z_2.
Nota: il fatto che esistano $n=2$ var r. indipendenti (p.e. le x originali) non significa che non ne esistano di n.r.

Per capire chi sono (e quante sono) le var. n.r. indipendenti, consideriamo l'insieme $X_r(t)$ degli stati $x^{(r)}$ raggiungibili da $x(0)=0$ in tempo t.

$$X_r(t) = \left\{ x^{(r)} = \Psi(t)\, u_{[0,t)}(\cdot) \right\}$$



Analizziamo $\mathcal{X}_r(t)$ a t.d.:

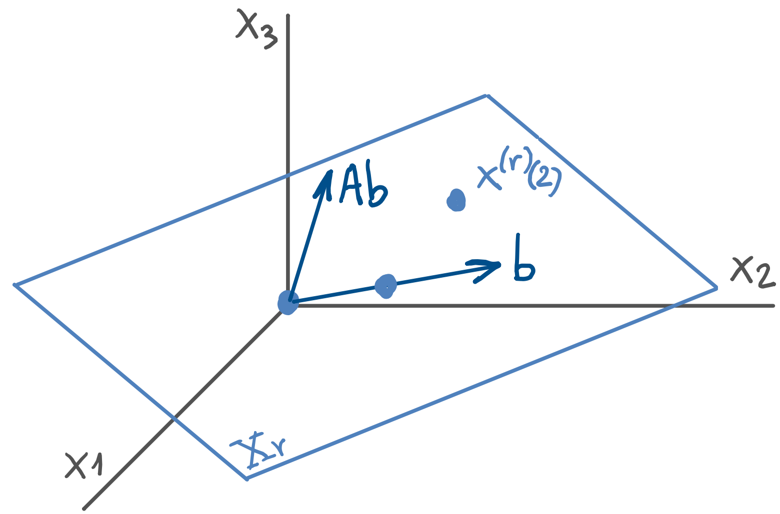
$x(1) = A\cancel{x(0)} + b\,u(0)$

$x(2) = A\,x(1) + b\,u(1) = A\,b\,u(0) + b\,u(1)$

$x(3) = A\,x(2) + b\,u(2) = A^2 b\,u(0) + Ab\,u(1) + b\,u(2)$

$\vdots$

$x(t) =$ comb. (lineare) di $b, Ab, A^2b, \dots A^{t-1}b$



Nota: $\mathcal{X}_r(t)$ è un sotto-spazio

Quanti e quali tra i vettori $b, Ab, A^2b, \dots A^{t-1}b$ sono indipendenti?

Nota: se $A^k b$ è comb. dei precedenti, allora lo sono anche tutti i successivi $A^{k+\tau}b$

$$A^k b = \sum_{i=0}^{k-1} \gamma_i A^i b \;\rightarrow\; A^{k+1} b = A\,A^k b = \gamma_{k-1} A^k b + \sum_{i=0}^{k-2} \gamma_i A^{i+1} b = \text{comb. di } b, Ab, \dots, A^{k-1} b$$

Nota: $A^n b$ è sempre comb. dei precedenti (perchè $\Delta_A(A) = 0 \rightarrow A^n$ è comb. di $I, A, \dots, A^{n-1}$)

$\mathcal{X}_r(t)$ aumenta di dimensione nei primi istanti fino a $t = n_r =$ massimo numero di vet. $b, Ab, A^2b, \dots, A^{n_r-1}b$ indipendenti, detti vettori di raggiungibilità. Per $t \geq n_r$ risulta

$\mathcal{X}_r(t) = \mathcal{X}_r$ = sotto-spazio di raggiungibilità = generato dai vett. di raggiungibilità

Si definisce $R = [\,b, Ab, A^2b, \dots A^{n-1}b\,]$ matrice di raggiungibilità: rango$(R) = n_r$ e $X_r =$ immagine(R)

Se det$(R) \neq 0$ ($n_r = n$), il sistema (ovvero, la coppia (A,b)) si dice completamente raggiungibile.

Il caso a t.c. è analogo. L'unica differenza è che $X_r(t) = X_r$ = immagine(R) per qualsiasi $t>0$.

Infatti, fissato un qualsiasi $t>0$ e considerando le espansioni di $x(t)$ e $u(t)$ in $t=0$

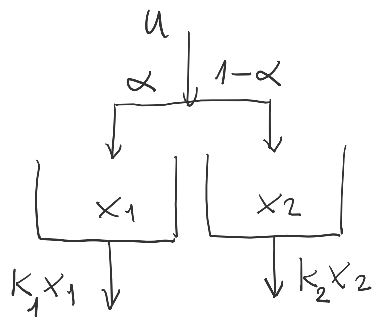
$$x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} x^{(k)}(0)\frac{t^k}{k!} \quad e \quad u(t) = \sum_{k=0}^{\infty} u^{(k)}(0)\frac{t^k}{k!}$$

dall'equazione di stato $\dot{x} = Ax + bu$ e le sue derivate $x^{(k+1)} = Ax^{(k)} + bu^{(k)}$, si ottiene

$$\dot{x}(0) = A\cancel{x(0)} + bu(0)$$
$$\ddot{x}(0) = A\dot{x}(0) + b\dot{u}(0) = Abu(0) + b\dot{u}(0)$$
$$x^{(3)}(0) = A\ddot{x}(0) + b\ddot{u}(0) = A^2bu(0) + Ab\dot{u}(0) + b\ddot{u}(0) \quad \rightarrow \quad x(t) \in X_r$$
$$\vdots$$
$$x^{(k)}(0) = \text{comb. di } b, Ab, \dots, A^{k-1}b$$
$$\vdots$$

Nota: scegliendo opportunamente $u_{[0,t)}(\cdot)$ (ovvero tutti gli ∞ coefficienti $u^{(k)}(0)$) si riesce a raggiungere un qualsiasi punto di X_r all'istante t (con $t>0$ qualsiasi! Vedremo più avanti una formula esplicita per l'ingresso $u_{[0,t)}(\cdot)$ da applicare – è una strategia di controllo in anello aperto)

ESEMPIO



$$\dot{x}_1 = \alpha u - k_1 x_1$$
$$\dot{x}_2 = (1-\alpha) u - k_2 x_2$$

$$A = \begin{bmatrix} -k_1 & 0 \\ 0 & -k_2 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} \alpha \\ 1-\alpha \end{bmatrix}$$

$$R = \begin{bmatrix} b & Ab \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & -k_1\alpha \\ 1-\alpha & -k_2(1-\alpha) \end{bmatrix}, \quad \det(R) = \alpha(1-\alpha)(k_1-k_2)$$

Nota: se $n>2$, A^2b si ottiene moltiplicando A per Ab (non serve calcolare A^2!)

$0<\alpha<1$ e $k_1 \neq k_2 \longrightarrow \det(R) \neq 0 \longrightarrow$ sist. c.r.

$\det(R) = 0$ se

due casi banali: $\alpha = 0 \rightarrow x_1$ non è ragg. $X_r = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

$\alpha = 1, \dots$

più interessante è il caso

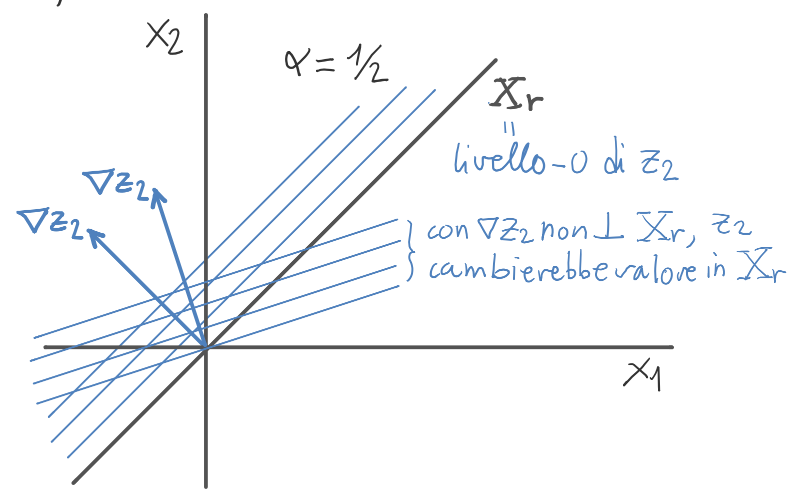
$0<\alpha<1$, $k_1 = k_2 \longrightarrow X_r = \left\{ \begin{bmatrix} \alpha \\ 1-\alpha \end{bmatrix} \right\}$

ma qual'è la variabile non ragg.?

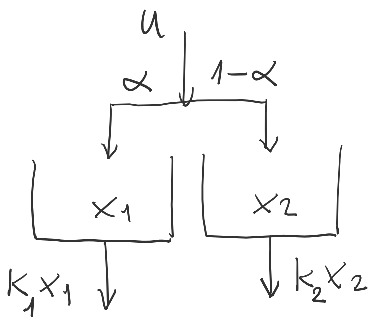
Se $\alpha = 1/2$ sappiamo che $z_2 = x_1 - x_2$

È la comb. con $\nabla z_2 \perp X_r \rightarrow \nabla z_2 = [1-\alpha, -\alpha]$

$z_2 = (1-\alpha)x_1 - \alpha x_2$



ESEMPIO



$$\dot{x}_1 = \alpha u - k_1 x_1$$
$$\dot{x}_2 = (1-\alpha) u - k_2 x_2$$

$$A = \begin{bmatrix} -k_1 & 0 \\ 0 & -k_2 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} \alpha \\ 1-\alpha \end{bmatrix}$$

$$R = [\, b \;\; Ab \,] = \begin{bmatrix} \alpha & -k_1\alpha \\ 1-\alpha & -k_2(1-\alpha) \end{bmatrix}, \quad \det(R) = \alpha(1-\alpha)(k_1-k_2)$$

Nota: se $n>2$, A^2b si ottiene moltiplicando A per Ab (non serve calcolare A^2!)

$0<\alpha<1$ e $k_1 \neq k_2 \;\rightarrow\; \det(R) \neq 0 \;\rightarrow\;$ sist. c.r.

$\det(R) = 0$ se

due casi banali: $\alpha = 0 \rightarrow x_1$ non è ragg. $X_r = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

$\alpha = 1, \ldots$

più interessante è il caso

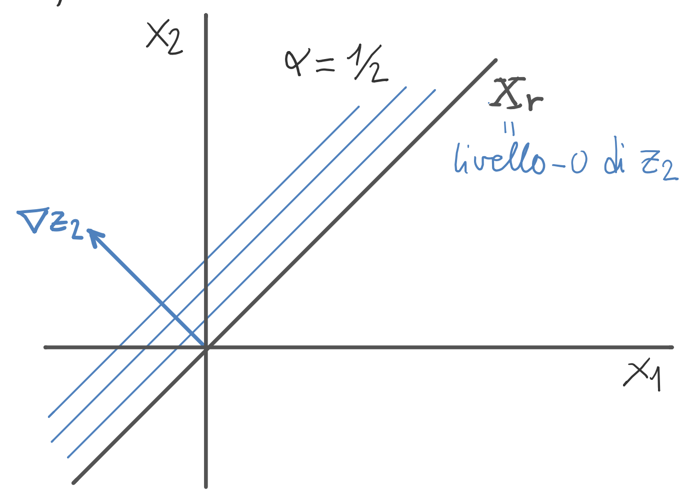
$0<\alpha<1$, $k_1 = k_2 \;\rightarrow\; X_r = \left\{ \begin{bmatrix} \alpha \\ 1-\alpha \end{bmatrix} \right\}$

ma qual'è la variabile non ragg.?

Se $\alpha = 1/2$ sappiamo che $z_2 = x_1 - x_2$

È la comb. con $\nabla z_2 \perp X_r \rightarrow \nabla z_2 = [1-\alpha, -\alpha]$

$$z_2 = (1-\alpha)x_1 - \alpha x_2$$



Caratterizzazione algebrica delle var. r. e n.r.

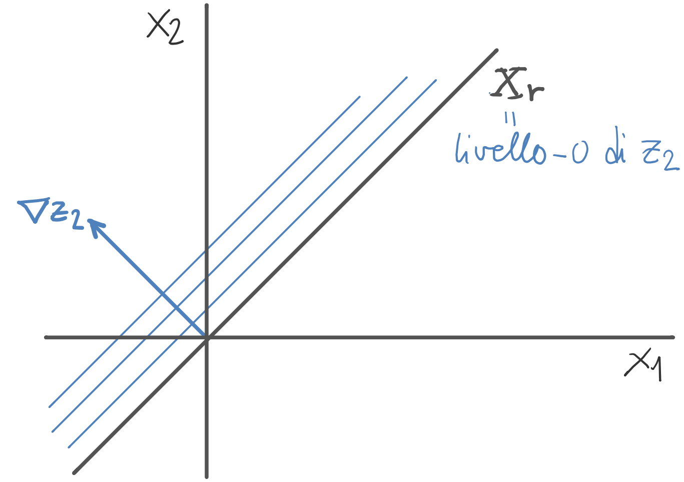
in termini del loro gradiente ∇z_i = coeff. della combinazione delle var. *x*

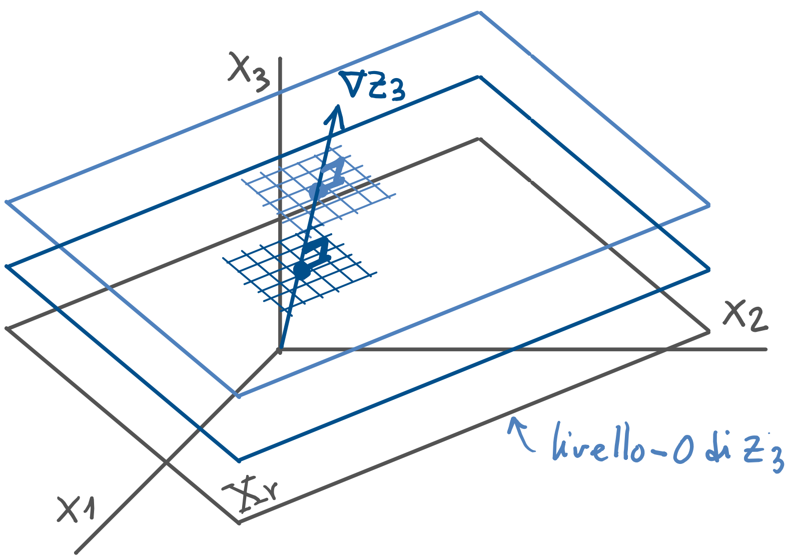
Var. z_i <u>non raggiungibile</u>: gradiente $\nabla z_i \perp X_r$

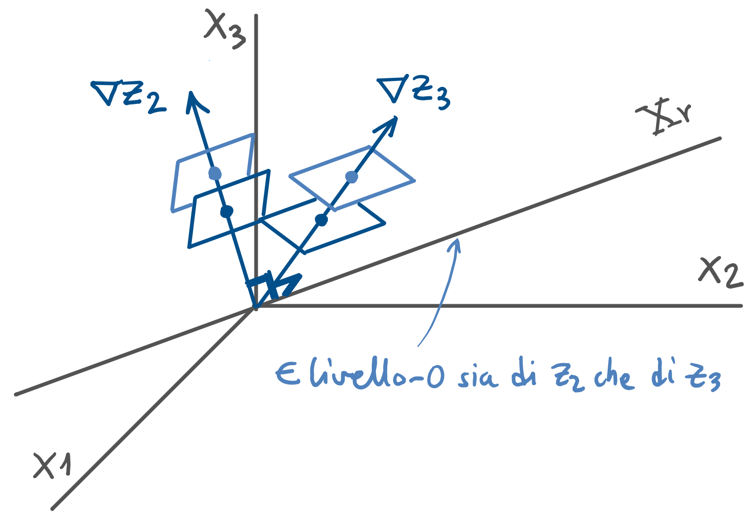
($\perp$ a tutti i vett. di ragg. $b, Ab, A^2 b, \dots A^{n_r-1} b$)

Ce ne sono $n-n_r$ indipendenti, $i = n_r+1,\dots,n$

(le elenchiamo come secondo gruppo di nuove var.)





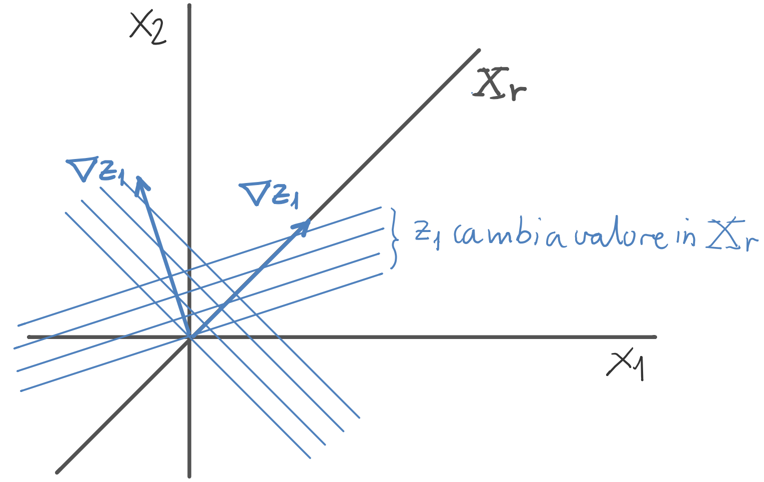


Caratterizzazione algebrica delle var. r. e n.r.

In termini del loro gradiente ∇z_i = coeff. della combinazione delle var. x

Var. z_i non raggiungibile: gradiente $\nabla z_i \perp X_r$
($\perp$ a tutti i vett. di ragg. $b, Ab, A^2b, \dots A^{n_r-1}b$)
Ce ne sono $n - n_r$ indipendenti, $i = n_r+1,\dots,n$
(le elenchiamo come secondo gruppo di nuove var.)

Var. z_i raggiungibile: gradiente ∇z_i non $\perp X_r$
(non $\perp$ ad almeno uno dei vett. di ragg, p.e. $\nabla z_i^T = A^{i-1}b$)
Ce ne sono n_r indipendenti, $i = 1,\dots,n_r$
(le elenchiamo come primo gruppo di nuove var.)

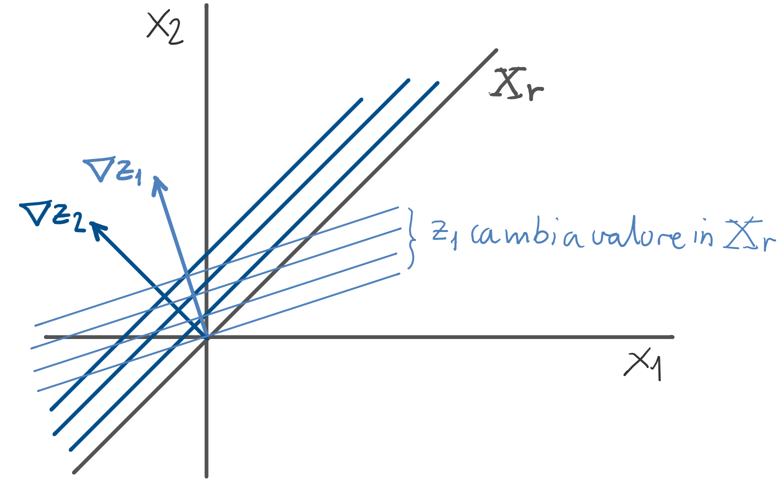


Caratterizzazione algebrica delle var. r. e n.r.

In termini del loro gradiente ∇z_i = coeff. della combinazione delle var. x

Var. z_i non raggiungibile: gradiente $\nabla z_i \perp X_r$
($\perp$ a tutti i vett. di ragg. $b, Ab, A^2b, \ldots A^{n_r-1}b$)
Ce ne sono $n-n_r$ indipendenti, $i = n_r+1,\ldots,n$
(le elenchiamo come secondo gruppo di nuove var.)

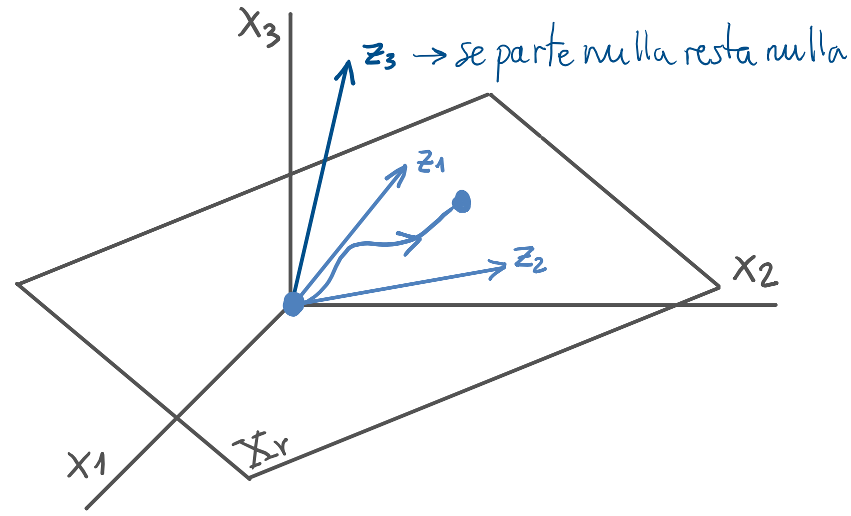
Var. z_i raggiungibile: gradiente ∇z_i non $\perp X_r$
(non $\perp$ ad almeno uno dei vett. di ragg, p.e. $\nabla z_i^T = A^{i-1}b$)
Ce ne sono n_r indipendenti, $i = 1,\ldots,n_r$
(le elenchiamo come primo gruppo di nuove var.)



In termini dei loro nuovi assi z_i nello spazio di stato x

Asse var. z_i raggiungibile: in X_r
(p.e. $z_i = A^{i-1}b$, $i = 1,\ldots,n_r$).

Asse var. z_i non raggiungibile: non in X_r
(p.e. $\perp X_r$, $i = n_r+1,\ldots,n$).



SCOMPOSIZIONE IN PARTI RAGGIUNGIBILE E NON RAGGIUNGIBILE

Effettuiamo il cambio di variabili $z = Tx$, con $z = \left[\begin{array}{c} z_r \\ \hline z_{nr} \end{array}\right]$ $z_r = [z_1, \ldots, z_{n_r}]^T$, var. ragg. $z_{nr} = [z_{n_r+1}, \ldots, z_n]^T$, var. non ragg.

Costruzione della matrice T per righe

$$T = \left[\begin{array}{c} \nabla z_{r,i} \\ i = 1, \ldots, n_r \\ \hline \nabla z_{nr,i} \\ i = 1, \ldots, n-n_r \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} n_r \text{ righe non } \perp X_r \\ \hline n-n_r \text{ righe } \perp X_r \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} n_r \text{ righe indip. di completamento} \\ \hline n-n_r \text{ righe } \perp b, \ldots, A^{n_r-1}b \end{array}\right]$$

p.e. complet. $\perp$ con $b, \ldots, A^{n_r-1}b$

Costruzione della matrice T^{-1} per colonne

$$T^{-1} = \left[\begin{array}{c|c} \text{assi } z_{r,i} & \text{assi } z_{nr,i} \\ i = 1, \ldots, n_r & i = 1, \ldots, n-n_r \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} n_r \text{ colonne} & n-n_r \text{ colonne} \\ \text{in } X_r & \text{non in } X_r \end{array}\right]$$

$$= \left[\begin{array}{c|c} b, \ldots, A^{n_r-1}b & \begin{array}{c} n-n_r \text{ colonne indip.} \\ \text{di completamento} \end{array} \end{array}\right]$$

p.e. complet. $\perp$ con $n-n_r$ colonne $\perp X_r$

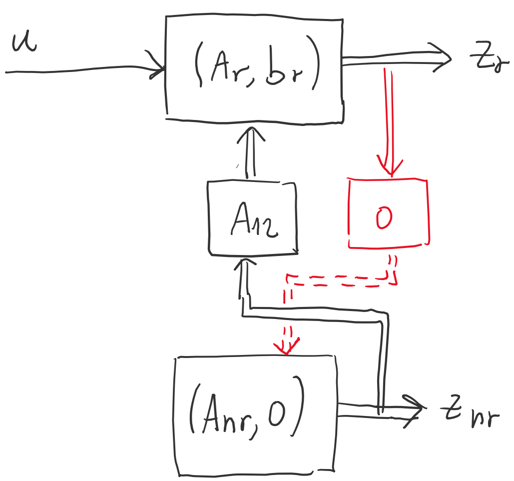
Effettuato il cambio di variabili, si ottiene

$$TAT^{-1} = \begin{array}{cc} \overbrace{}^{n_r} & \overbrace{\phantom{A_{12}}}^{n-n_r} & \\ \left[\begin{array}{c|c} A_r & A_{12} \\ \hline 0 & A_{nr} \end{array}\right] & & \begin{array}{l} \}\, n_r \\ \}\, n-n_r \end{array} \end{array} \qquad Tb = \left[\begin{array}{c} b_r \\ \hline 0 \end{array}\right] \qquad R_r = \left[b_r, A_r b_r, \ldots, A_r^{n_r-1} b_r\right]$$

$$\det(R_r) \neq 0$$

$$p z_r = A_r z_r + A_{12} z_{nr} + b_r u$$

$$p z_{nr} = A_{nr} z_{nr}$$

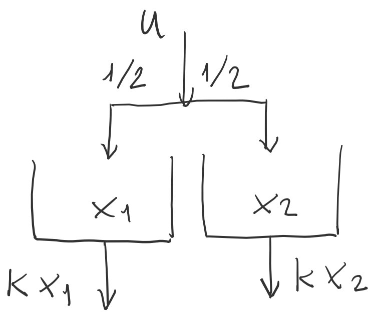


parte ragg.
completam. ragg. da u
riceve anche l'influenza delle var z_{nr} attraverso A_{12}

parte non ragg.
non influenzata da u, nemmeno indirettamente attraverso z_r

Nota: anche gli autovalori (e quindi i modi) si dividono in ragg. e non ragg.

ESEMPIO



$$A = \begin{bmatrix} -k & 0 \\ 0 & -k \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} \underbrace{\begin{matrix}1/2 \\ 1/2\end{matrix}}_{b} & \underbrace{\begin{matrix}-k/2 \\ -k/2\end{matrix}}_{Ab} \end{bmatrix}, \quad X_r = \left\{ \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix} \right\}$$

$$n_r = \text{rango}(R) = 1$$

Scelgo T e ricavo T^{-1} con variabili $z_2 = z_{nr} = x_1 - x_2$, $z_1 = z_r = x_1$

$$T = \begin{bmatrix} \nabla z_1 \\ \hline \nabla z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \rightarrow T^{-1} = \frac{1}{-1} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underbrace{\begin{matrix}1 \\ 1\end{matrix}}_{2b} & \underbrace{\begin{matrix}0 \\ -1\end{matrix}}_{\hookrightarrow \text{ completamento (non } \perp)} \end{bmatrix}, \quad TAT^{-1} = A, \quad Tb = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Scelgo T^{-1} e ricavo T

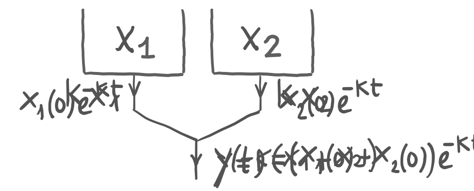
$$T^{-1} = \left[b \mid \text{completamento} \right] = \begin{bmatrix} 1/2 & \underbrace{\begin{matrix}1/2 \\ -1/2\end{matrix}}_{\substack{\hookrightarrow \text{ comp. } \perp \\ \text{(è una scelta tipica)}}} \\ 1/2 & \end{bmatrix} \rightarrow T = \frac{1}{-1/2} \begin{bmatrix} -1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{matrix} z_1 = z_r = x_1 + x_2 \\ z_2 = z_{nr} = x_1 - x_2 \end{matrix}$$

$$TAT^{-1} = A, \quad Tb = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

OSSERVABILITA' (da una sola uscita)

Consideriamo il solo effetto dello stato iniziale sull'uscita y ($u(t)=0$). Le var. non osservabili sono quelle, se ci sono, il cui valore iniziale non influenza y, perché l'uscita libera risulta determinata da un numero ristretto ($<n$) di altre variabili, che sono quelle osservabili.

Esempio: x_1 e x_2 sono entrambe var. n.o. anche se "fisicamente" influenzano y.
Il loro valore iniziale singolarmente non conta, ciò che conta è $x_1(0)+x_2(0)$, perché i serbatoi sono uguali (stesso k, altrimenti conterebbero).



$z_1 = x_1 + x_2$ è la var. o. Se (e solo se) $z_1(0)\neq 0$ si ottiene y non nulla.

Fissata $z_1(0)$, il val. iniziale di qualsiasi altra combinazione z_2 indipendente (p.e. $z_2 = x_1$ o $z_2 = x_2$) non conta (p.e. $z_1(0)=0$ e $x_1(0)$ qualsiasi con $x_2(0)=-x_1(0)$, ammettendo valori negativi di x_1 e x_2).

Nota: la var. n.o. z_2 può esser scelta con molta libertà, basta che sia indipendente da z_1.
Nota: il fatto che esistano $n=2$ var n.o. indipendenti (p.e. le x originali) non significa che non ne esistano di o.

Nota: Se tutte le var. o. partono nulle, $y_{\text{lib}}(t)=0$ indipendentemente dal valore iniziale di quelle n.o.
Possiamo quindi dare le seguenti definizioni:

Var. z_i osservabile: $z_i(0)\neq 0$ implica $y_{\text{lib}}(t)\neq 0$ (per qualche $t\geq 0$).

Var. z_i non osservabile: è possibile avere $y_{\text{lib}}(t)=0$ (per ogni $t\geq 0$) con $z_i(0)\neq 0$
(perché ciò accada devono essere nulle tutte le var. oss.).

Per caratterizzare algebricamente le var. o e n.o., caratterizziamo gli stati iniziali $x(0)\neq 0$ per cui $y_{\text{lib}}(t)=0$.

$$X_{no} = \{ x(0) : y_{lib}(t) = 0 ,\ t \geq 0 \}$$

Analizziamo X_{no} a t.d.: $y_{lib}(t) = c^T A^t x(0)$

$y(0) = c^T x(0) = 0$
$y(1) = c^T A x(0) = 0$
$\vdots$
$y(t) = c^T A^t x(0) = 0$
$\vdots$

Quante condizioni dobbiamo considerare per imporre $y_{\text{lib}}(t)=0$ per ogni $t\geq 0$?
Analogamente a quanto visto per i vettori di ragg., dei t vettori (colonna) $c, A^Tc, (A^T)^2c, \dots, (A^T)^{t-1}c$ solo i primi $n_o \leq n$ sono indipendenti, con $(A^T)^{n_o}c$ primo vettore combinazione dei precedenti.
Basta quindi imporre le prime n_o condizioni.

Imponendo le prime n condizioni, si caratterizza X_{no} come spazio nullo della matrice $\mathcal{O} = \begin{bmatrix} c^T \\ c^TA \\ c^TA^2 \\ \vdots \\ c^TA^{n-1} \end{bmatrix}$

$X_{no} = \{ x(0) : \mathcal{O}x(0) = 0 \}$

$\mathcal{O}$ è detta <u>matrice di osservabilità</u> e i vettori (colonna) $c, A^Tc, (A^T)^2c, \dots, (A^T)^{n_o-1}c$ <u>vettori di osservabilità</u>.
X_{no} è un sotto-spazio di dimensione $n-n_o$ e n_o è il rango di $\mathcal{O}$.

Se $\det(O)\neq 0$ ($n_o=n$), il sistema (ovvero, la coppia (A,c^T)) si dice <u>completamente osservabile</u>.

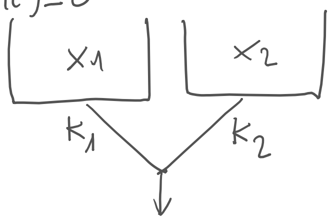
Il caso a t.c. è analogo, con riferimento allo sviluppo di Taylor di $y_{\text{lib}}(t)$ in $t=0$: $y_{lib}(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} y^{(k)}(0) \frac{t^k}{k!}$

$$y_{lib}(t) = c^T e^{At} x(0) \rightarrow y^{(k)}(0) = c^T A^k e^{At} x(0) \Big|_{t=0} = c^T A^k x(0)$$

Pertanto, se $\mathcal{O}x(0) = 0$, le derivate $y^{(k)}(0) = 0$ risultano tutte nulle, per ogni $k \geq 0$.

ESEMPIO

$u(t)=0$



$$\dot x_1 = -k_1 x_1 \qquad \dot x_2 = -k_2 x_2 \qquad y = k_1 x_1 + k_2 x_2$$

$$A = \begin{bmatrix} -k_1 & 0 \\ 0 & -k_2 \end{bmatrix} \qquad c^T = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \end{bmatrix}$$

$$c^T A = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -k_1 & 0 \\ 0 & -k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -k_1^2 & -k_2^2 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} c^T \\ c^T A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \\ -k_1^2 & -k_2^2 \end{bmatrix}, \quad \det \mathcal{O} = k_1 k_2 (k_1 - k_2)$$

$k_1 > 0,\ k_2 > 0,\ k_1 \neq k_2 \ \rightarrow\ \det(\mathcal{O}) \neq 0 \ \rightarrow$ sist. c.o.

$\det \mathcal{O} = 0$ si

due casi banali: $k_1 = 0 \rightarrow x_1$ non è oss., x_2 sì $\quad X_{no} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \quad \perp c = \begin{bmatrix} 0 \\ k_2 \end{bmatrix}$

$k_2 = 0$ ...

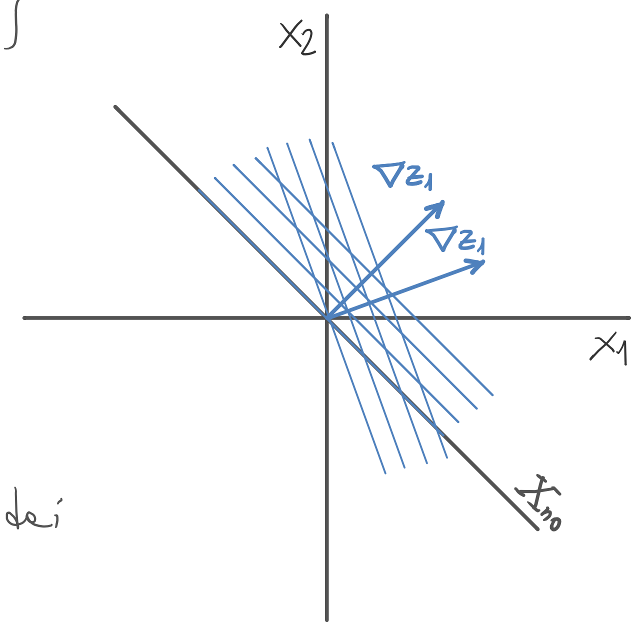
più interessante è il caso $k_1 > 0,\ k_2 > 0,\ k_1 = k_2 = k$

$X_{no} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\} \quad \perp c = \begin{bmatrix} k \\ k \end{bmatrix}$

sappiamo che la var. o. è $z_1 = x_1 + x_2$

$\rightarrow \nabla z_1 = [1 \ \ 1]$ è $\perp X_{no}$

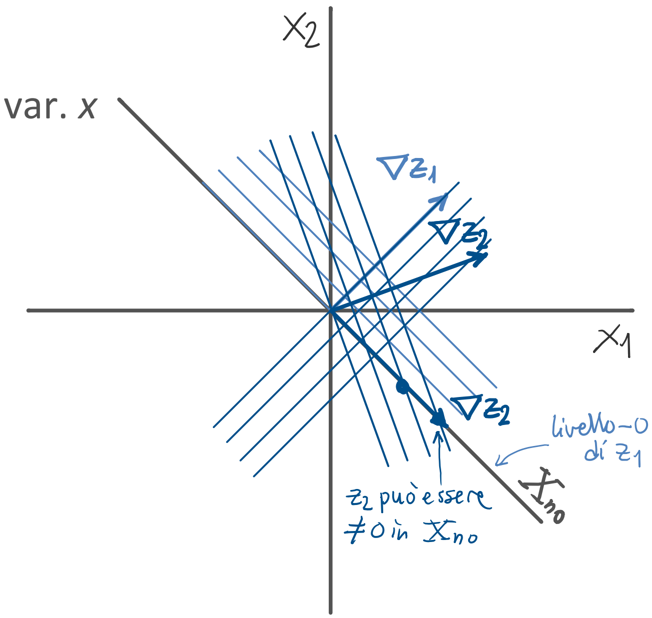
$\rightarrow \nabla z_1$ proporzionale a c^T



Intuitivamente, le var. oss. sono le combinazioni con coefficienti $\nabla z_i \perp X_{no}$, ovvero con coefficienti presi dai vettori riga $c^T, c^T A, \ldots \rightarrow$ risultano nulle in X_{no}

Caratterizzazione algebrica delle var. o. e n.o.

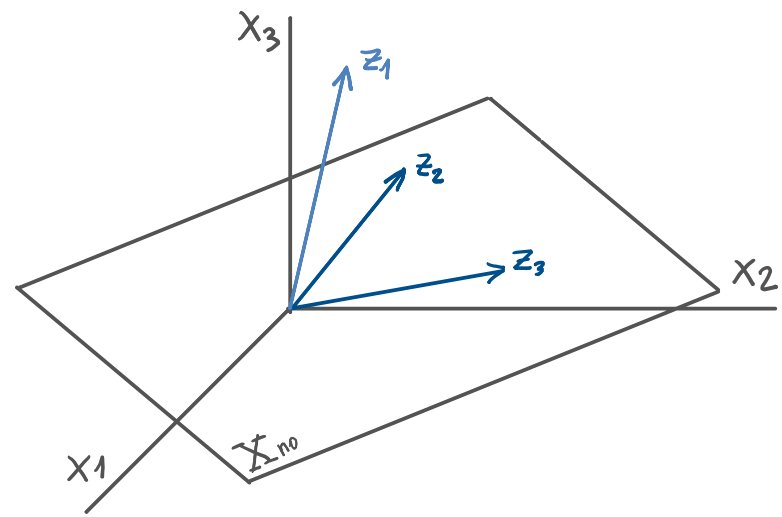
in termini del loro gradiente ∇z_i = coeff. della combinazione delle var. x



Var. z_i osservabile: gradiente $\nabla z_i \perp \mathcal{X}_{no}$
(combinazione dei vett. di oss., p.e. $\nabla z_i = c^T A^{i-1}$)
Ce ne sono n_o indipendenti, $i = 1,\ldots, n_o$
(le elenchiamo come primo gruppo di nuove var.)

Var. z_i non osservabile: gradiente ∇z_i non $\perp \mathcal{X}_{no}$
(non combinazione dei vett. di oss., p.e. ∇z_i in $\mathcal{X}_{no}$)
Ce ne sono $n - n_o$ indipendenti, $i = n_o+1,\ldots, n$
(le elenchiamo come secondo gruppo di nuove var.)

In termini dei loro nuovi assi z_i nello spazio di stato x



Asse var. z_i non osservabile: in $\mathcal{X}_{no}$
($\perp$ a tutti i vett. di oss., $i = n_o+1,\ldots, n$).

Asse var. z_i osservabile: non in $\mathcal{X}_{no}$
(p.e. $\perp \mathcal{X}_{no}$, z_i = vett. di oss. = $(A^T)^{i-1}c$, $i = 1,\ldots, n_o$).

SCOMPOSIZIONE IN PARTI OSSERVABILE E NON OSSERVABILE

Effettuiamo il cambio di variabili $z = Tx$, con $z = \left[\begin{array}{c} z_o \\ \hline z_{no} \end{array}\right]$ $z_r = [z_1, \ldots, z_{n_o}]^T$, var. oss.
$z_{no} = [z_{n_o+1}, \ldots, z_n]^T$, var. non oss.

Costruzione della matrice *T* per righe

$$T = \left[\begin{array}{c} \nabla z_{o,i} \\ i = 1, \ldots, n_o \\ \hline \nabla z_{no,i} \\ i = 1, \ldots, n - n_o \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} n_o \text{ righe } \perp X_{no} \\ \hline n - n_o \text{ righe non } \perp X_{no} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} n_o \text{ righe combinazioni} \\ \text{di } c^T, \ldots, c^T A^{n_o-1} \\ \hline n - n_o \text{ righe di completamento} \end{array}\right]$$

p.e. $c^T, \ldots, c^T A^{n_o-1}$

p.e. completamento $\perp$

Costruzione della matrice T^{-1} per colonne

$$T^{-1} = \left[\begin{array}{c|c} \text{assi } z_{o,i} & \text{assi } z_{no,i} \\ i = 1, \ldots, n_o & i = 1, \ldots, n - n_o \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} n_o \text{ colonne} & n - n_o \text{ colonne} \\ \text{non in } X_{no} & \text{in } X_{no} \end{array}\right]$$

$$= \left[\begin{array}{c|c} n_o \text{ colonne indip.} & n - n_o \text{ colonne} \\ \text{di completamento} & \perp c^T, \ldots, c^T A^{n_o-1} \end{array}\right]$$

p.e. complet. $\perp$ con $c^T, \ldots, c^T A^{n_o-1}$

Effettuato il cambio di variabili, si ottiene

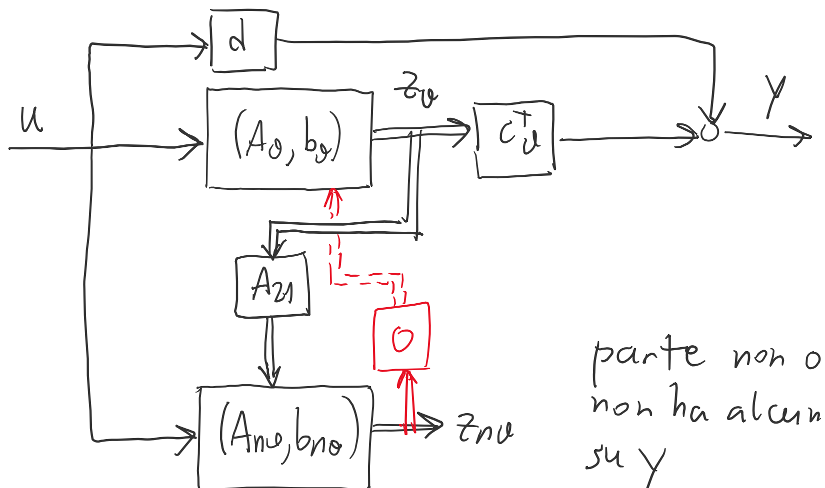
$$TAT^{-1} = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \overbrace{\quad}^{n_o} & \overbrace{\quad}^{n-n_o} \end{array} \\ \left[\begin{array}{c|c} A_o & 0 \\ \hline A_{21} & A_{no} \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{l} \}\, n_o \\ \}\, n-n_o \end{array}, \quad Tb = \left[\begin{array}{c} b_o \\ \hline b_{no} \end{array}\right], \quad \mathcal{O}_o = \begin{bmatrix} c_o^T \\ c_o^T A_o \\ c_o^T A_o^2 \\ \vdots \\ c_o^T A_o^{n_o-1} \end{bmatrix}, \quad \det \mathcal{O}_o \neq 0$$

$$cT^{-1} = \left[\begin{array}{c|c} c_o^T & 0 \end{array}\right]$$

$$p z_o = A_o z_o + b_o u$$

$$p z_{no} = A_{21} z_o + A_{no} z_{no} + b_{no} u$$

$$y = c_o^T z_o + du$$

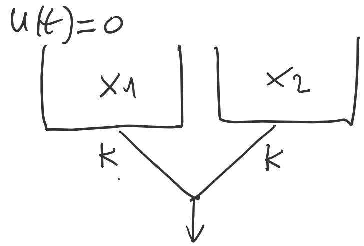


parte oss.
(completam. o.)

parte non oss.
non ha alcuna influenza su y

Nota: anche gli autovalori (e quindi i modi) si dividono in oss. e non oss.

ESEMPIO



$$A = \begin{bmatrix} -k & 0 \\ 0 & -k \end{bmatrix} \qquad \mathcal{O} = \begin{bmatrix} k & k \\ -k^2 & -k^2 \end{bmatrix} \qquad X_{no} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$$

$$c^T = [\, k \quad k \,] \qquad n_o = \text{rango}(\mathcal{O}) = 1$$

Scelgo T e ricavo T^{-1}, con $z_1 = z_o = \underbrace{[\,1 \quad 1\,]}_{\perp X_{no}} x = x_1 + x_2$ e $z_2 = z_{no} = \underbrace{[\,1 \quad 0\,]}_{\text{non } \perp \text{ a } X_{no}} x = x_1$

(ma non base di X_{no})

$$T = \begin{bmatrix} \nabla z_1 \\ \hline \nabla z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow T^{-1} = \frac{1}{-1}\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

completam. non $\perp$; base X_{no}

Scelgo T^{-1} e ricavo T

$$T^{-1} = [\,\text{complet.} \mid \text{base } X_{no}\,] = \left[\begin{array}{c|c} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{array}\right] \longrightarrow T = \frac{1}{-2}\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{bmatrix} \begin{matrix} \} \perp X_{no} \\ \} \text{ base } X_{no} \end{matrix}$$

complet. $\perp$
(è una scelta tipica)

$$z_1 = z_o = \frac{1}{2}(x_1 + x_2)$$

$$z_2 = z_{no} = \frac{1}{2}(x_1 - x_2)$$

SCOMPOSIZIONE IN 4 PARTI (DI KALMAN)

Considerando in modo congiunto le proprietà di raggiungibilità e osservabilità, si riesce a definire 4 gruppi di variabili z (non necessariamente tutti presenti) usando le quali il sistema risulta scomposto nell'interconnessione di 4 sotto-sistemi con proprietà di completa/assente ragg. e oss.

$$z = \begin{bmatrix} z_{r,no} \\ \hline z_{r,o} \\ \hline z_{nr,no} \\ \hline z_{nr,o} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_a \\ \hline z_b \\ \hline z_c \\ \hline z_d \end{bmatrix} = Tx, \quad T^{-1} = \left[\begin{array}{c|c|c|c} \text{base di} & \text{base di} & \text{base di} & \text{base di} \\ X_{r,no} & X_{r,o} & X_{nr,no} & X_{nr,o} \end{array} \right]$$

$X_{r,no} = X_r \cap X_{no}$ assi in comune tra quelli delle var. ragg. e non oss.

$X_{r,o}$ = assi che mancano a $X_{r,no}$ per completare X_r

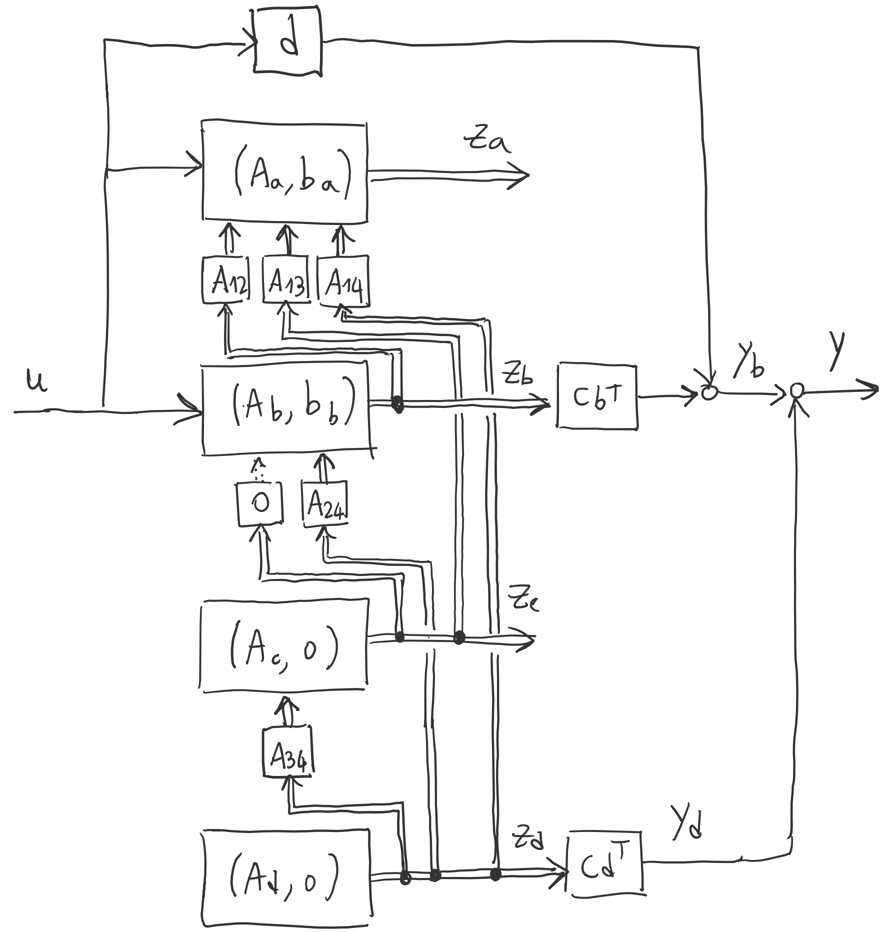
$X_{nr,no}$ = assi che mancano a $X_{r,no}$ per completare X_{no}

$X_{nr,o}$ = assi che mancano per completare $X = \mathbb{R}^n$

$$TAT^{-1} = \left[\begin{array}{c|c|c|c} A_a & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ \hline 0 & A_b & 0 & A_{24} \\ \hline 0 & 0 & A_c & A_{34} \\ \hline 0 & 0 & 0 & A_d \end{array}\right] \qquad Tb = \left[\begin{array}{c} b_a \\ \hline b_b \\ \hline 0 \\ \hline 0 \end{array}\right]$$

$$cT^{-1} = \left[\begin{array}{c|c|c|c} 0 & c_b^T & 0 & c_d^T \end{array}\right]$$

$$\left(\begin{bmatrix} A_a & A_{12} \\ 0 & A_b \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b_a \\ b_b \end{bmatrix}\right) \text{ è c.r.} \qquad \left(\left[\begin{array}{c|c} A_b & A_{24} \\ \hline 0 & A_d \end{array}\right], \begin{bmatrix} c_b \\ c_d \end{bmatrix}\right) \text{ è c.o.}$$



Nota:

$$\Delta_A(p) = \Delta_a(p)\,\Delta_b(p)\,\Delta_c(p)\,\Delta_d(p)$$

MODELLO INGRESSO-USCITA (ARMA)

Abbiamo visto, per esempi, che il modello ARMA descrive le parti osservabili del sistema. La scomposizione in 4 parti lo mette bene in evidenza

La parte b è c.r. e c.o. → il suo modello ARMA è quello di trasferimento

$$\Delta_b y_b = N_b u \quad , \quad \Delta_b(p) = d(p) \, , \quad N_b(p) = n(p) \quad , \quad G(p) = \frac{n(p)}{d(p)} \quad \text{f.d.t.}$$

La parte d è autonoma (solo AR): $\Delta_d y_d = 0$

Le parti a e c non hanno modello esterno perchè non hanno definita una var. d'uscita

$y = y_b + y_d$, per "eliminare" y_b e y_d moltiplichiamo per $\Delta_b \Delta_d$

Nota: Δ_b e Δ_d non hanno radici in comune, altrimenti il sistema $(b+d)$ non sarebbe c.o.

$$\Delta_b \Delta_d y = \Delta_d(\Delta_b y_b) + \Delta_b \overbrace{(\Delta_d y_d)}^{0} = \Delta_d N_b u \longrightarrow \quad d(p)\Delta_d(p) y = n(p)\Delta_d(p) u$$

Nota: $n(p)$ e $d(p)$ si ottengono calcolando la f.d.t.; Δ_d richiede l'analisi di ragg. e oss.

DIMENSIONE DELLE 4 PARTI

$n_b = \#$ poli $\left(\Delta_b(p) = d(p)\right)$

$n_a = n_r - n_b$ ($a+b$ è la parte c.r.)

$n_d = n_o - n_b$ ($b+d$ è la parte c.o.)

$n_c = n - n_a - n_b - n_d$ (la parte c, nr. n.o, è quello che resta)