

- Introduzione
- Formulazione del modello (dinamico, lineare, tempo-invariante)
- Movimento ed equilibrio
- Stabilità
- I sistemi non lineari (cenni)
- Raggiungibilità ed osservabilità
- Progetto di sistemi di controllo (nel dominio del tempo)
- Segnali e sistemi nel dominio della frequenza
- Progetto di sistemi di controllo (nel dominio della frequenza)

IL SISTEMA DINAMICO NON LINEARE

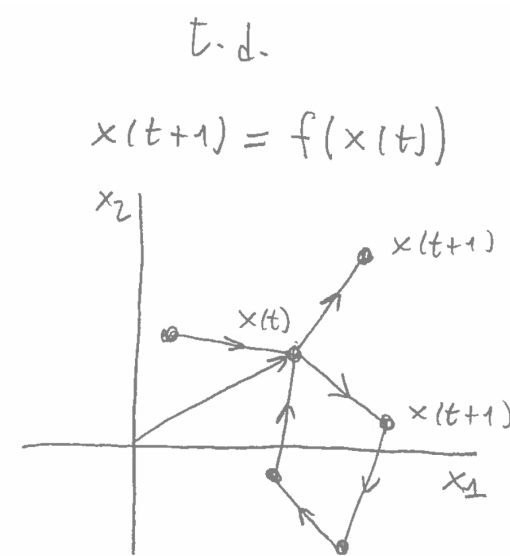
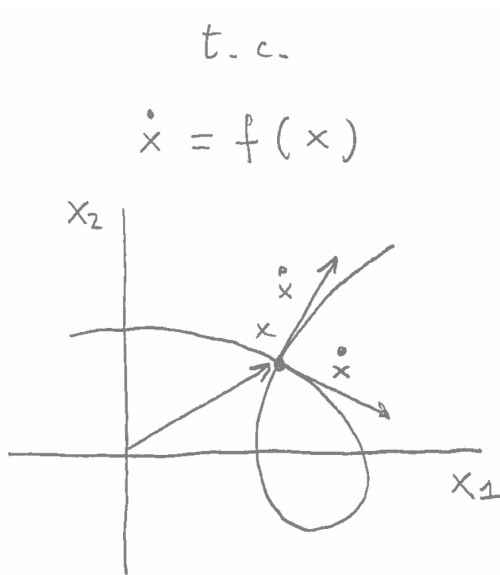
$$\left. \begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(x(t), u(t), t) && \text{t.c.} \\ x(t+1) &= f(x(t), u(t), t) && \text{t.d.} \end{aligned} \right\} \text{equazione di stato}$$

$$y(t) = g(x(t), u(t), t) \quad \text{trasformazione d'uscita}$$

Per semplicità, consideriamo sistemi

(tempo) invarianti [varianti]: f e g non dipendono dall'argomento t (istante iniziale $t=0$).

autonomi: senza ingressi, o con ingressi costanti (considerati come parametri), f e g non dipendono da u .



Nota 1: le traiettorie non si intersecano.

Nota 2: supponiamo le traiettorie unicamente definite in avanti nel tempo (anche all'indietro a t.c.).

ESEMPIO: La crescita "logistica" ($n=1$, t.c.)

$x(t)$: (densità di) biomassa di una risorsa rinnovabile

$\dot{x}(t)$ = tasso di crescita

= tasso di natalità - tasso di mortalità

$$= \underbrace{b(t)} \cdot x(t) - \underbrace{d(t)} \cdot x(t)$$

tassi di natalità e mortalità
pro-capite (σ per u.d. biomassa)

Ipotesi 1 (Malthus ~ 1800): b e d costanti

$b > d$: esplosione $b < d$: estinzione

Ipotesi 2 (Verhulst ~ 1850)

$$b(t) = b_0 - b_1 x(t), \quad d(t) = d_0 + d_1 x(t)$$

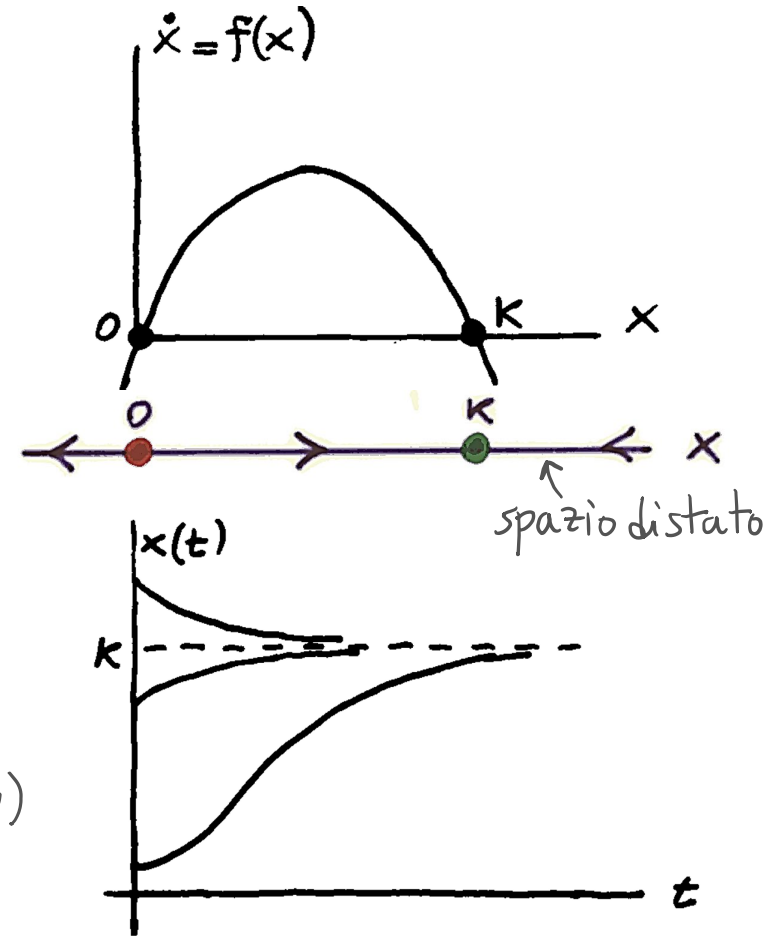
$$\dot{x} = (b_0 - d_0)x - (b_1 + d_1)x^2 = r x \left(1 - \frac{x}{K}\right)$$

$r = b_0 - d_0$: intrinsic growth rate (at low density)

$$K = \frac{b_0 - d_0}{b_1 + d_1}: \text{carrying capacity}$$

Conclusione: ci sono 2 equilibri ($\bar{x} = 0$ e $\bar{x} = K$) e $x(t) \rightarrow K$ per ogni $x(0) > 0$

Metodo grafico d'analisi ($n=1$, t.c.)



ESEMPIO: La crescita "logistica" ($n=1$, t.d.), detta anche mappa logistica o quadratica

$x(t)$: (densità di) biomassa di una risorsa rinnovabile
o capitale di un'impresa nel periodo t

Metodo grafico d'analisi ($n=1$, t.d.)

Per analogia col modello a t.c.

$$x(t+1) = r x(t) \left(1 - \frac{x(t)}{K}\right)$$

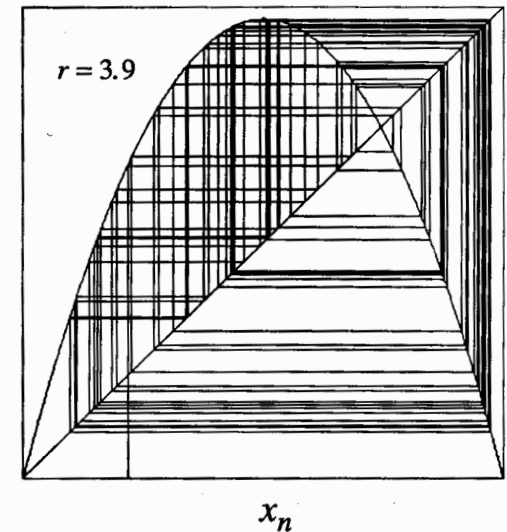
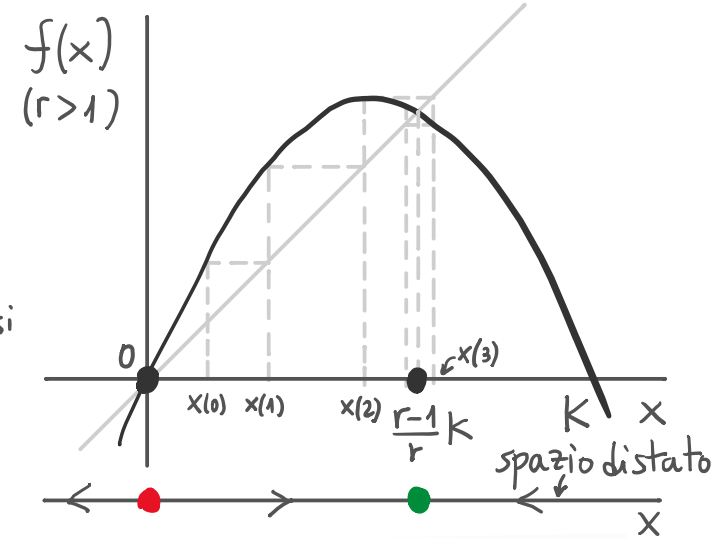
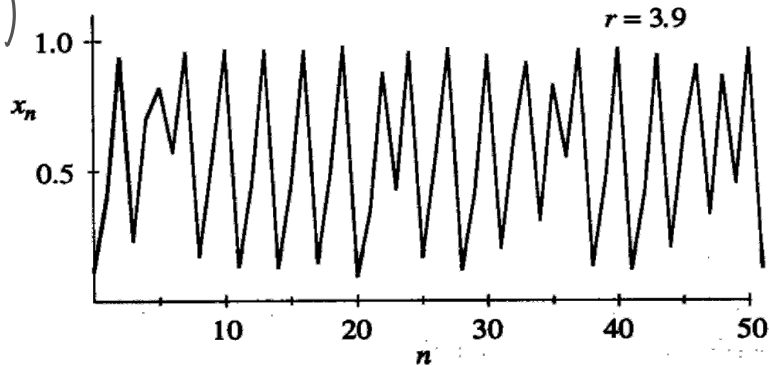
ma $x(t) = K$ non è un equilibrio! ($x(t+1) = 0$ e $x(t+\tau) = 0, \tau > 1$)

Nota: una formulazione con senso fisico dei parametri r e K si ottiene discretizzando la ODE (1 passo in avanti $\dot{x} \rightarrow \frac{x(t+1) - x(t)}{-1}$)

$$x(t+1) = x(t) + r x(t) \left(1 - \frac{x(t)}{K}\right) \quad (\text{equilibri } \bar{x} = 0 \text{ e } \bar{x} = K)$$

ma non viene usata

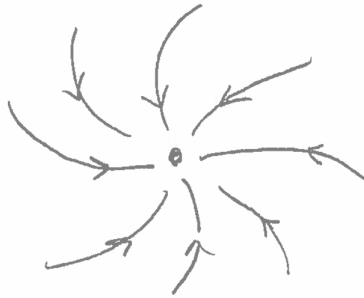
La mappa logistica è nota per generare dinamica caotica (caos deterministico)



REGIMI ASINTOTICI

Supponendo che il movimento $x(t)$ resti limitato, $x(t)$ converge per $t \rightarrow +\infty$ ad un attrattore. Ci sono 4 tipologie di attrattore:

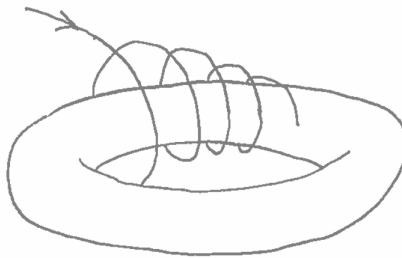
equilibrio (regime stazionario)



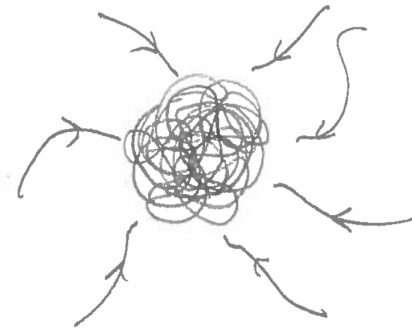
ciclo limite (regime periodico)
(sistemi non lineari e $n \geq 2$ a.t.c.)



toro (regime quasi-periodico)
(sistemi non lineari e $n \geq 3$ a.t.c.)
 $n \geq 2$ a.t.d.)



strano attrattore (regime caotico)
(sistemi non lineari e $n \geq 3$ a.t.c.)



L'ATTRATTORE DI LORENTZ

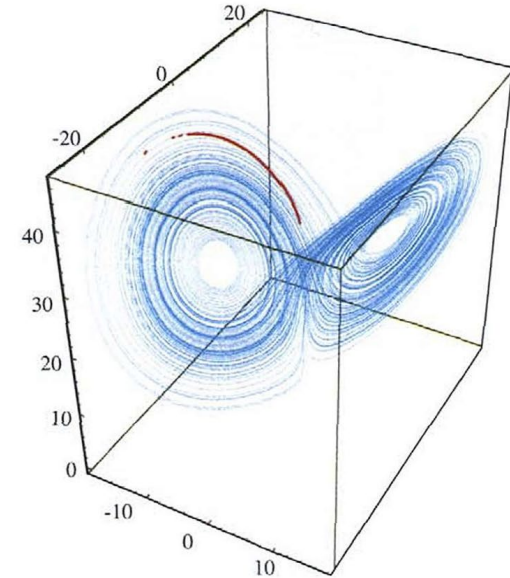
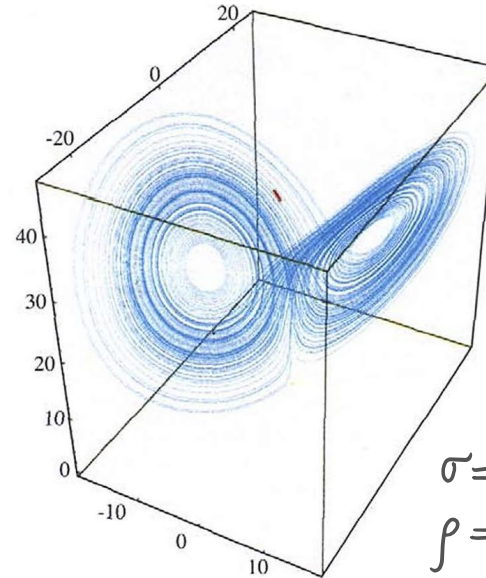
È il primo attrattore caotico,
scoperto da Edward Lorenz nel 1963
in un modello semplificato ($n=3$)
di convezione nel piano

$$\dot{x}_1 = \sigma(x_2 - x_1)$$

$$\dot{x}_2 = \rho x_1 - x_1 x_3 - x_2$$

$$\dot{x}_3 = x_1 x_2 - \beta x_3$$

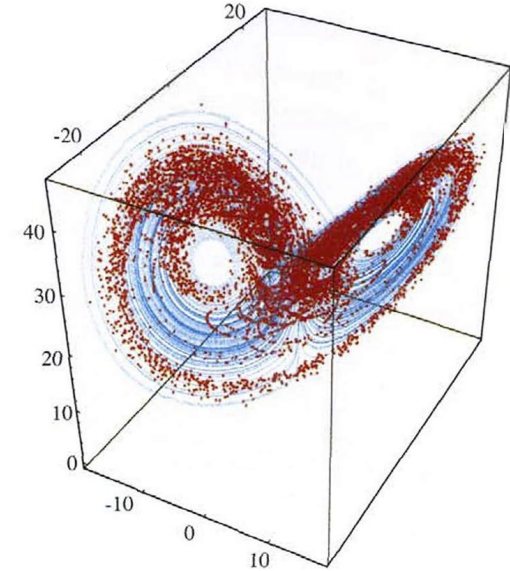
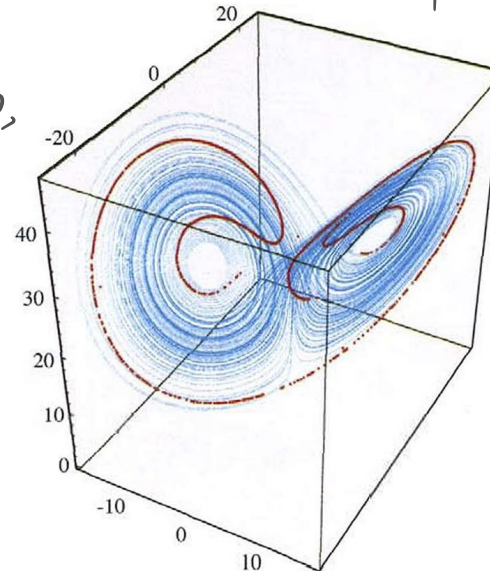
"Caotico" non significa solo
complesso (non equilibrio, non ciclo,
non toro) e apparentemente irregolare,
ma che presenta
sensibilità alle condizioni iniziali



$$\sigma = 10$$

$$\rho = 28$$

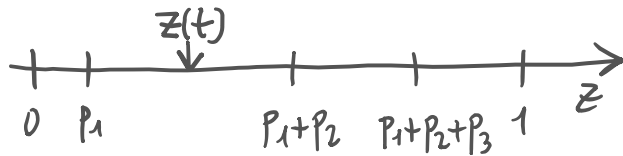
$$\beta = 8/3$$



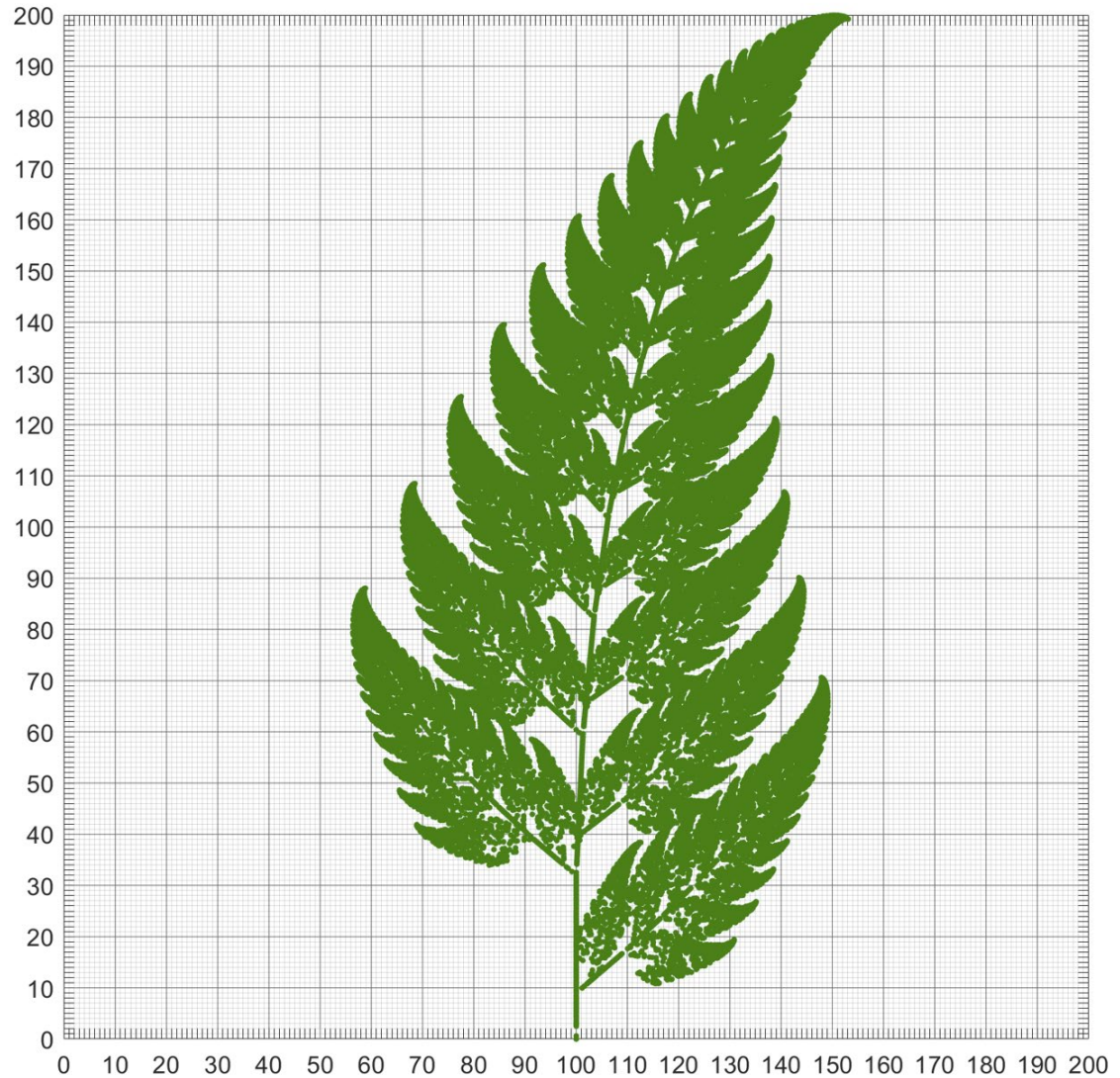
L'ATTRATTORE "FRACTAL FERN"

Il modello originale (t.d., $n=2$) è costituito da 4 sistemi lineari as. stab con ingresso costante ($x(t+1) = A_i x(t) + b_i$, $i=1,2,3,4$) usati stocasticamente con prob. p_i

Può essere reso deterministico con l'aggiunta di una mappa caotica $z(k+1) = f(z(k))$ con $z(k) \in (0,1)$ dove $z(t)$ indica quale sistema usare



L'importanza concettuale del caos deterministico è proprio quella di avere traiettorie che si comportano, al variare di $x(0)$, come processi stocastici.

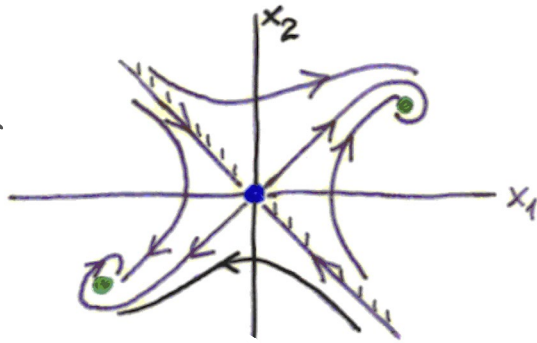


ATTRATTORI MULTIPLI

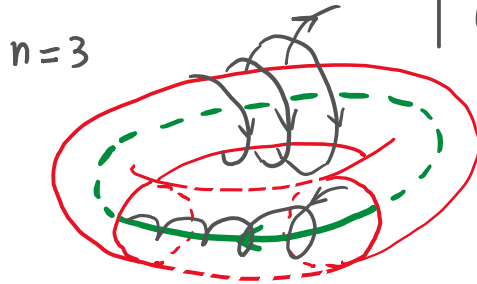
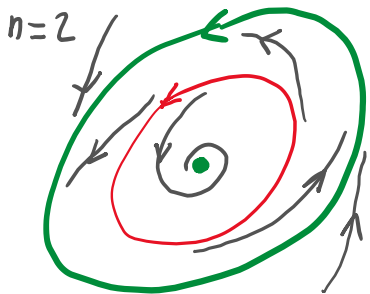
Un sistema dinamico non lineare può avere più attrattori e quello raggiunto da $x(t)$ dipende dalla condizione iniziale $x(0)$.

L'insieme di $x(0)$ che portano ad un attrattore costituiscono il suo bacino di attrazione

Le frontiere dei bacini di attrazione sono varietà stabili di oggetti sella



oppure cicli o tori di dimensione $n-1$



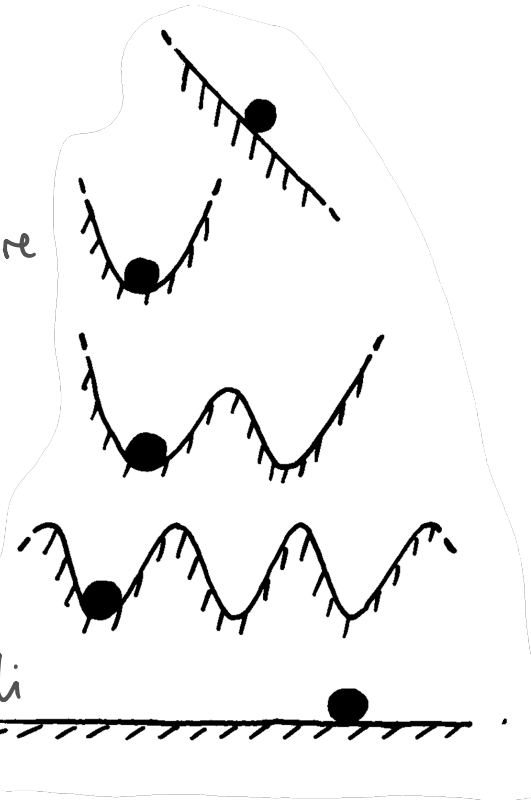
Esempio meccanico
nessun equilibrio
nessun attrattore
 $x(t)$ illimitato

1 equilibrio attrattore

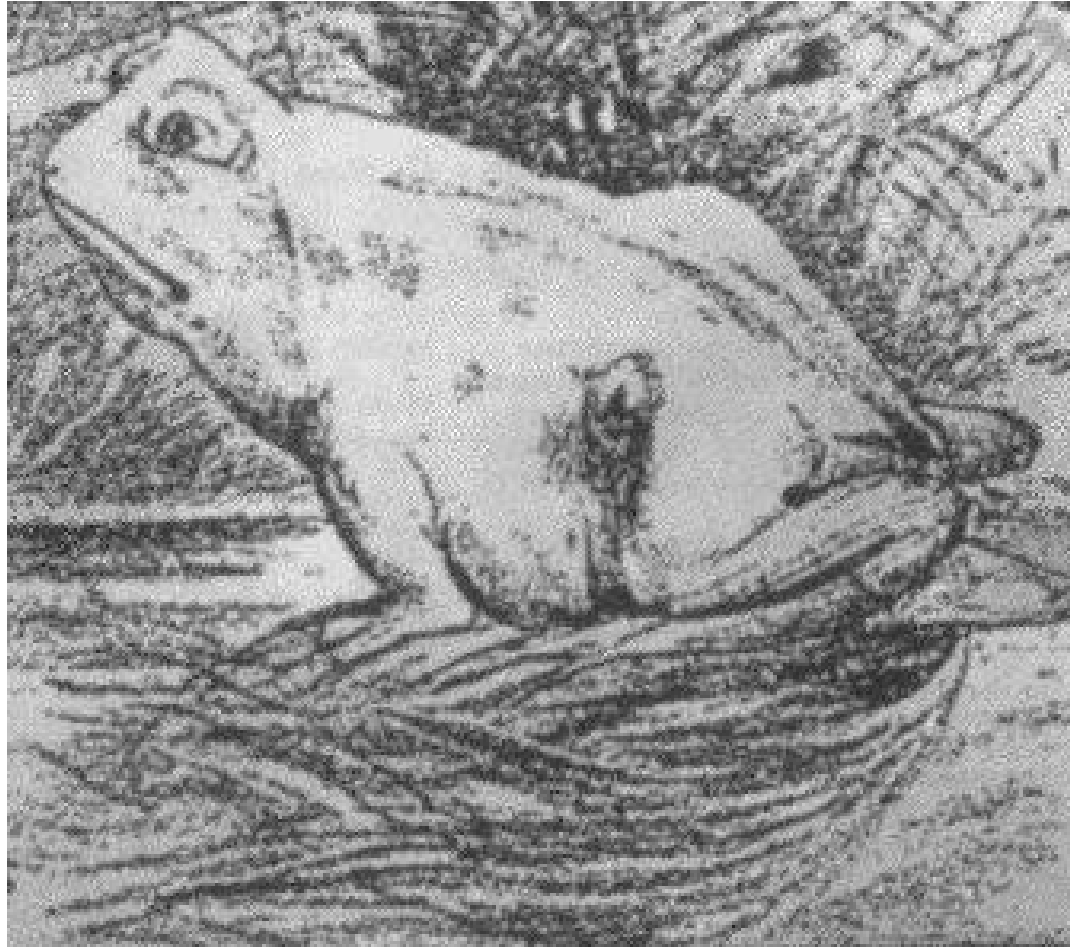
3 equilibri
di cui 2 attrattori

∞ eq. numerabili

∞ eq. non numerabili
(nessuno attrattore)



ATTRATTORI MULTIPLI



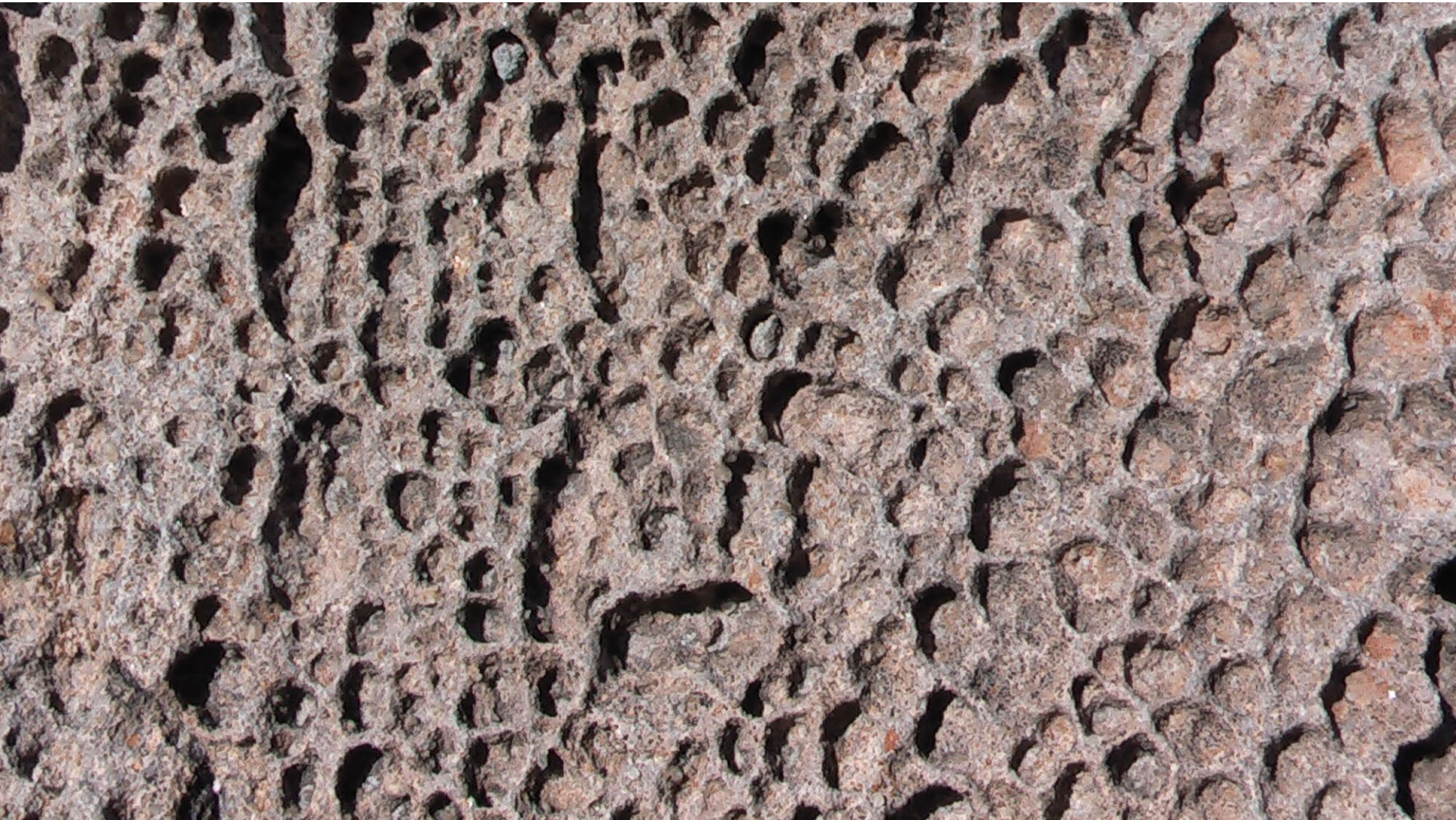
ATTRATTORI MULTIPLI



ATTRATTORI MULTIPLI



ATTRATTORI MULTIPLI





ATTRATTORI MULTIPLI

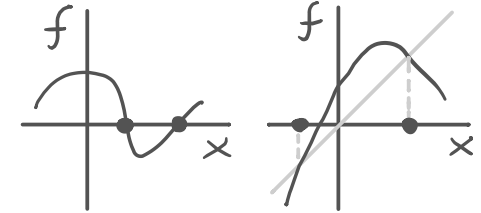


ATTRATTORI MULTIPLI



EQUILIBRI

\bar{x} : $\begin{cases} f(\bar{x}) = 0 & \text{t.c.} \\ f(\bar{x}) = \bar{x} & \text{t.d.} \end{cases}$ | Sono n equazioni (non lineari) in n incognite \bar{x}_i | Metodo grafico per n=1

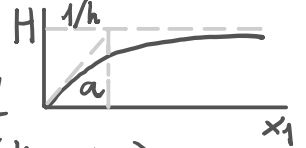


Metodo grafico per n=2 (t.c.): le isocline (null-clines)

Il modello preda-predatore (Rosenzweig-MacArthur, 1963, da quello di Lotka-Volterra ~1900)

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = r x_1 \left(1 - \frac{x_1}{K}\right) - H(x_1) x_2 \\ \dot{x}_2 = e H(x_1) x_2 - d x_2 \end{cases}$$

$H(x_1) = \frac{a x_1}{1 + a h x_1}$ per-capita (per unit) harvest rate $H\left(\frac{1}{a x_1} + h\right) = 1$
 $\frac{1}{a x_1}$: tempo per catturare una unità di preda h: tempo per gestire (digerire) una unità di preda

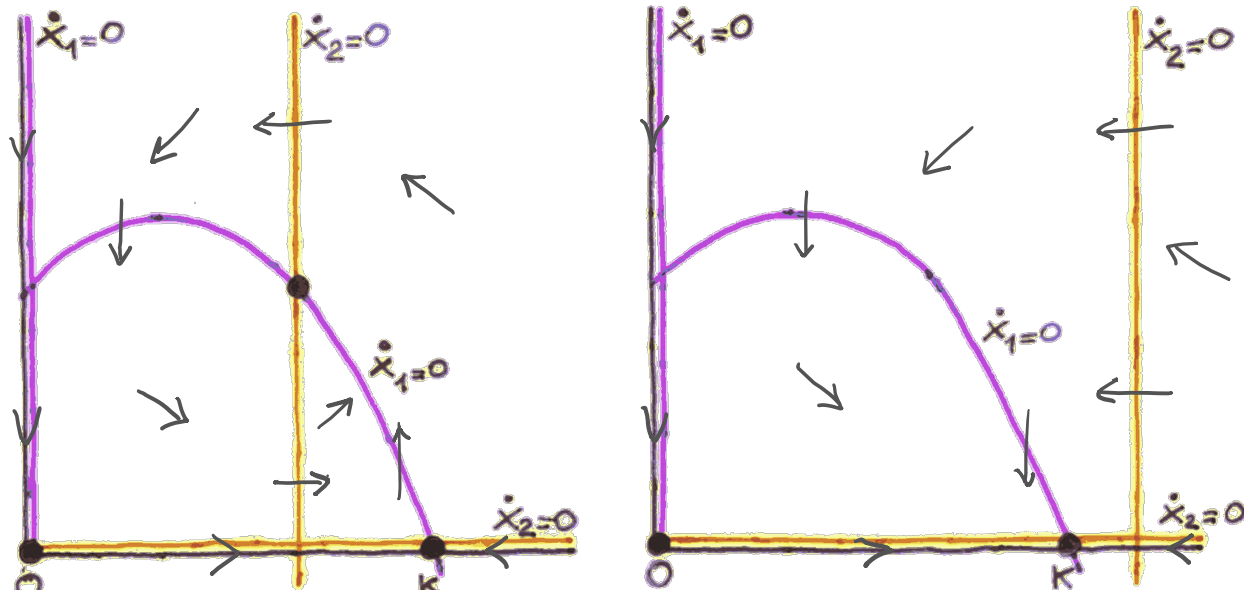


$\dot{x}_1 = 0$

$x_1 = 0$
 $r \left(1 - \frac{x_1}{K}\right) - \frac{a}{1 + a h x_1} x_2 = 0$
 $\rightarrow x_2 = \frac{r}{a} \left(1 - \frac{x_1}{K}\right) (1 + a h x_1)$

$\dot{x}_2 = 0$

$x_2 = 0$
 $e \frac{a x_1}{1 + a h x_1} - d = 0$
 $\rightarrow x_1 = \frac{d}{a(e - d h)}$



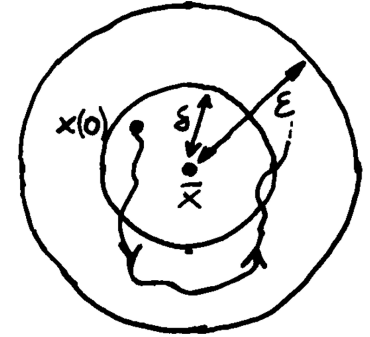
STABILITA' DELL'EQUILIBRIO

Idea: un equilibrio \bar{x} è stabile se le traiettorie che partono vicine restano vicine
 È asintoticamente stabile se, inoltre, vi convergono.

Definizioni:

Un equilibrio \bar{x} è stabile se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ ($\delta \leq \varepsilon$) tale che

$$\|x(0) - \bar{x}\| < \delta \Rightarrow \|x(t) - \bar{x}\| < \varepsilon, t > 0$$



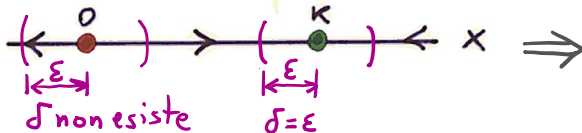
Un equilibrio \bar{x} è asintoticamente stabile se è stabile e se $\|x(t) - \bar{x}\| \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0$

Un equilibrio \bar{x} è instabile se non è stabile

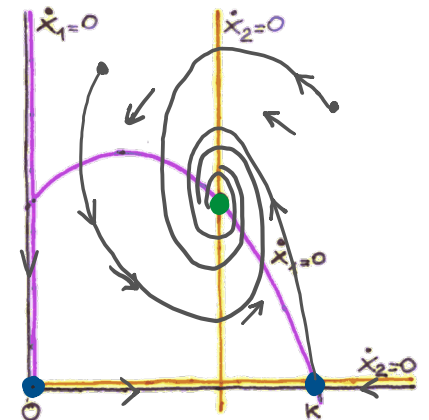
Il bacino di attrazione di un eq. \bar{x} asintoticamente stabile è l'insieme $B(\bar{x}) = \{x(0) : x(t) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} \bar{x}\}$

Un eq. \bar{x} asintoticamente stabile è globalmente stabile se $B(\bar{x}) = \mathbb{R}^n$,
 tranne, eventualmente, un sottoinsieme di misura nulla in \mathbb{R}^n .

Esempio: logistica a t.c.

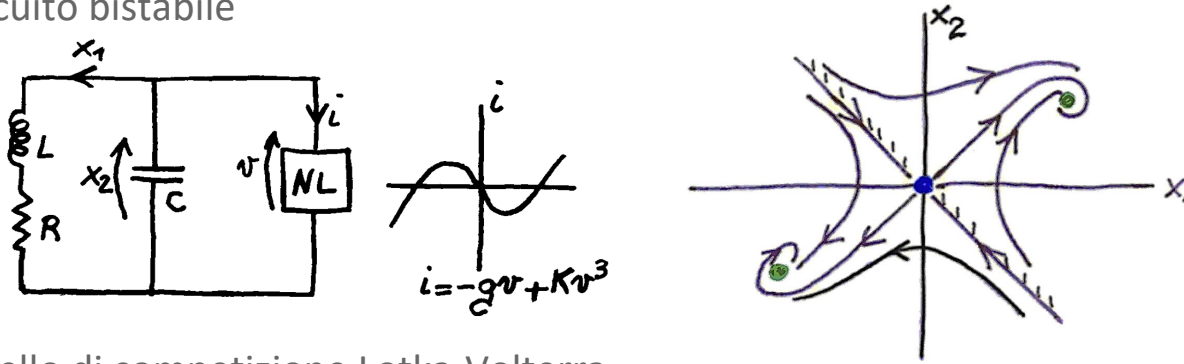


$\bar{x} = 0$ è instabile
 $\bar{x} = K$ è as. stab.



STABILITA' DELL'EQUILIBRIO: ESEMPI

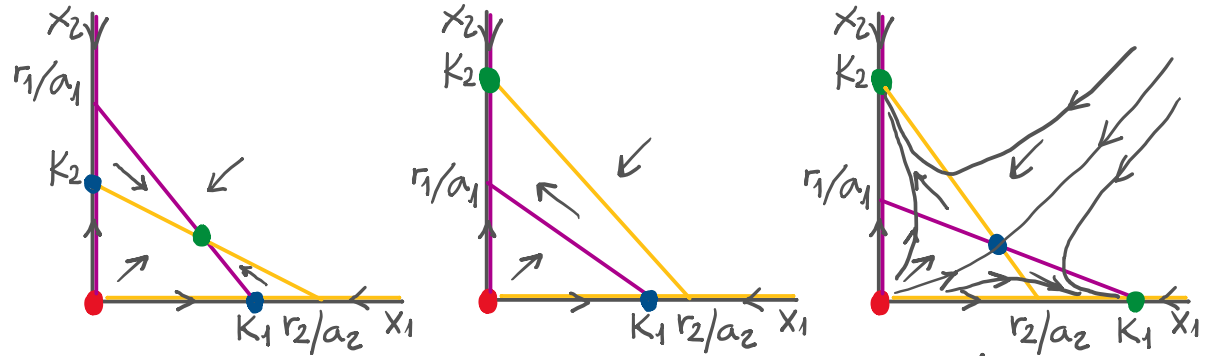
Un circuito bistabile



Il modello di competizione Lotka-Volterra

$$\dot{x}_1 = r_1 x_1 \left(1 - \frac{x_1}{k_1} \right) - a_1 x_1 x_2$$

$$\dot{x}_2 = r_2 x_2 \left(1 - \frac{x_2}{k_2} \right) - a_2 x_1 x_2$$



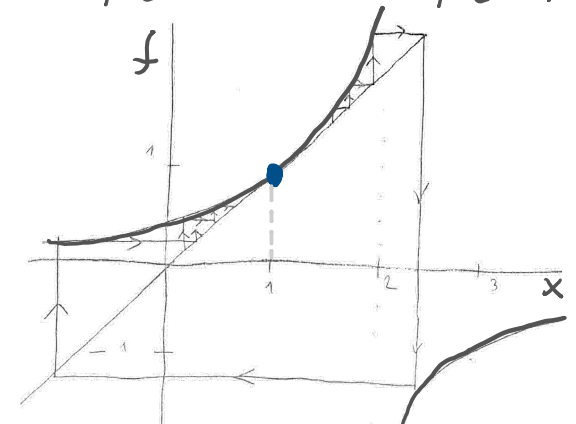
Una malattia genetica: la beta-talassemia (o anemia mediterranea)

1 gene con 2 possibili alleli A (normale), a (mutato)

3 genotipi: AA (sano), Aa (portatore sano), aa (malato)

$x(t)$: prob. un allele A nel "genepool" nella generazione t

$$x(t+1) = \frac{1}{2-x(t)} \quad (\text{Hardy-Weinberg } \sim 1900)$$



Il modello di una malattia genetica: derivazione

$N_1(t), N_2(t), N_3(t)$: numero (densità) genotipi 1, 2, 3 nella generazione t , $N(t) = N_1(t) + N_2(t) + N_3(t)$

Ipotesi 1: $N(t)$ grande $\rightarrow N_i(t) = N(t)$ (prob. estrarre i due geni dell'individuo i dal gene pool)

(Hardy-Weinberg ~ 1900) $N_1(t) = N(t) x(t)^2$, $N_2(t) = N(t) 2x(t)(1-x(t))$, $N_3(t) = N(t)(1-x(t))^2$

Ipotesi 2: popolazione "ben mescolata" \rightarrow frequenza incontri = $N(t)$ (prob. di estrarre la coppia)

$$I_{11}(t) = N_1(t)^2, I_{12}(t) = 2N_1(t)N_2(t), I_{13}(t) = 2N_1(t)N_3(t), \dots$$

Ipotesi 3: ogni incontro tra genotipi (i, j) produce w_{ij} (fertilità) individui nella generazione $t+1$

Ipotesi 4: regole di ereditarietà di Mendel, p.e. i figli di una coppia (1-AA, 2-Aa) sono 50% 1 e 50% 2

$$N_1(t+1) = w_{11} N_1(t)^2 + \frac{1}{2} w_{12} 2N_1(t)N_2(t) + \frac{1}{4} w_{22} N_2(t)^2$$

$$N_2(t+1) = \frac{1}{2} w_{12} 2N_1(t)N_2(t) + w_{13} 2N_1(t)N_3(t) + \frac{1}{2} w_{22} N_2(t)^2 + \frac{1}{2} w_{23} 2N_2(t)N_3(t)$$

$$N_3(t+1) = \frac{1}{4} w_{22} N_2(t)^2 + \frac{1}{2} w_{23} 2N_2(t)N_3(t) + w_{33} N_3(t)^2$$

$$x(t+1) = \frac{\text{numero alleli A nella generazione } t+1}{\text{num. tot. di alleli nella generazione } t+1} = \frac{2N_1(t+1) + N_2(t+1)}{2N(t+1)}$$

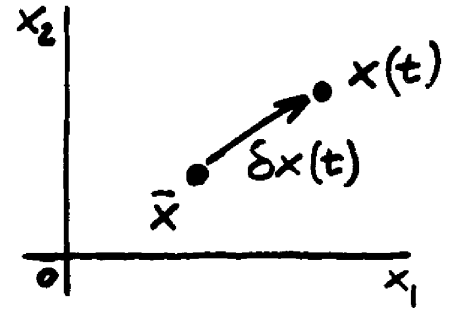
Beta talassemia : $w_{11} = w_{12} = w_{22} = w$
 $w_{13} = w_{23} = w_{33} = 0$

$$x(t+1) = \frac{x(t)^2(2-x(t))}{x(t)^2(2-x(t))^2} = \frac{1}{2-x(t)}, x(t) \in (0, 1]$$

LINEARIZZAZIONE NELL'INTORNO DI UN EQUILIBRIO \bar{x}

$$\delta x(t) = x(t) - \bar{x}$$

$$f(x(t)) = f(\bar{x} + \delta x(t)) = f(\bar{x}) + \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x=\bar{x}} \delta x(t) + \text{t.o.s.}$$



$$J(x) = \left[\frac{\partial f}{\partial x} \right] = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

, matrice Jacobiana
valutandola nell'equilibrio \bar{x}
si ottiene una matrice nota

$$J(\bar{x}) = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x=\bar{x}}$$

SISTEMA LINEARIZZATO

$$\text{t.c.: } \dot{\delta x} = \dot{x} = f(x) = \underbrace{f(\bar{x})}_0 + J(\bar{x}) \delta x + \cancel{\text{t.o.s.}} \rightarrow \dot{\delta x} = J(\bar{x}) \delta x$$

$$\text{t.d.: } \delta x(t+1) = x(t+1) - \bar{x} = f(x(t)) - \bar{x} = \underbrace{f(\bar{x})}_{\bar{x}} + J(\bar{x}) \delta x(t) + \cancel{\text{t.o.s.}} - \bar{x} \rightarrow \delta x(t+1) = J(\bar{x}) \delta x(t)$$

LINEARIZZAZIONE PER SISTEMI NON AUTONOMI NELL'INTORNO DI UN EQUILIBRIO (\bar{u}, \bar{x})

Perturbazione dall'equilibrio: $\delta x(t) = x(t) - \bar{x}$, $\delta u(t) = u(t) - \bar{u}$

$$f(x, u) = f(\bar{x}, \bar{u}) + \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{(x, u) = (\bar{x}, \bar{u})}}_{A (n \times n)} \cdot \delta x(t) + \underbrace{\frac{\partial f}{\partial u} \Big|_{(x, u) = (\bar{x}, \bar{u})}}_{B (n \times m)} \cdot \delta u(t) + \text{t.o.s.}$$

$$g(x, u) = g(\bar{x}, \bar{u}) + \underbrace{\frac{\partial g}{\partial x} \Big|_{(x, u) = (\bar{x}, \bar{u})}}_{C (p \times n)} \cdot \delta x(t) + \underbrace{\frac{\partial g}{\partial u} \Big|_{(x, u) = (\bar{x}, \bar{u})}}_{D (p \times m)} \cdot \delta u(t) + \text{t.o.s.}$$

SISTEMA LINEARIZZATO

$$\text{t.c.: } \dot{\delta x} = \dot{x} = f(x, u) = \underbrace{f(\bar{x}, \bar{u})}_0 + A \delta x + B \delta u + \text{t.o.s.}$$

$$\text{t.d.: } \delta x(t+1) = x(t+1) - \bar{x} = f(x(t), u(t)) - \bar{x} = \underbrace{f(\bar{x}, \bar{u})}_{\bar{x}} + A \delta x(t) + B \delta u(t) + \text{t.o.s.} - \bar{x}$$

$$y(t) = g(x(t), u(t)) = g(\bar{x}, \bar{u}) + C \delta x(t) + D \delta u(t) + \text{t.o.s.}$$

LINEARIZZAZIONE NELL'INTORNO DI UN EQUILIBRIO \bar{x}

VARIETA' STABILE, INSTABILE E CENTRO

Se $J(\bar{x})$ possiede

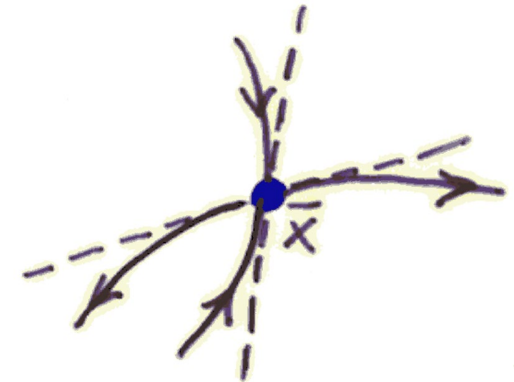
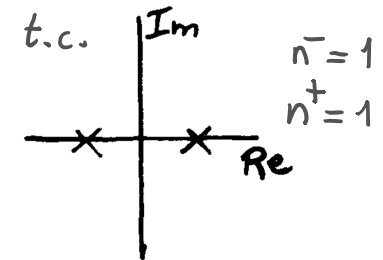
$$\begin{cases} n^- \text{ autovalori con } \operatorname{Re}(\lambda) < 0 \text{ t.c., } |\lambda| < 1 \text{ t.d.} \\ n^+ \text{ autovalori con } \operatorname{Re}(\lambda) > 0 \text{ t.c., } |\lambda| > 1 \text{ t.d.} \\ n^0 \text{ autovalori con } \operatorname{Re}(\lambda) = 0 \text{ t.c., } |\lambda| = 1 \text{ t.d.} \end{cases}$$

allora nell'intorno di \bar{x} esistono

$$\begin{cases} W^s = \text{varietà stabile (dim } W^s = n^-) \\ W^u = \text{varietà instabile (dim } W^u = n^+) \\ W^0 = \text{varietà centro (dim } W^0 = n^0) \end{cases}$$

tali che

- sono **invarianti** ($x(0) \in W^{s,u,0}$ implica $x(t) \in W^{s,u,0} \quad \forall t \geq 0$)
- sono **tangenti** in \bar{x} alle corrispondenti varietà del **sistema linearizzato**
- la dinamica su W^s e su W^u è **equivalente** a quella del **sistema linearizzato**



LINEARIZZAZIONE NELL'INTORNO DI UN EQUILIBRIO \bar{x}

VARIETA' STABILE, INSTABILE E CENTRO

Se $J(\bar{x})$ possiede

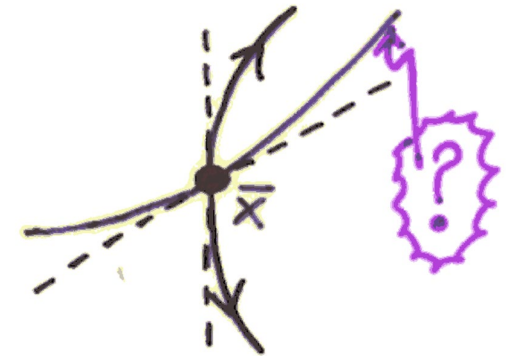
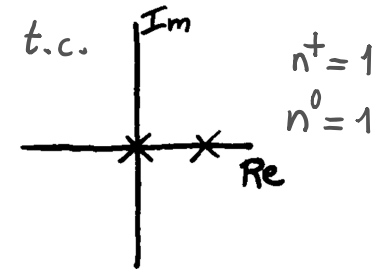
$$\begin{cases} n^- \text{ autovalori con } \operatorname{Re}(\lambda) < 0 \text{ t.c., } |\lambda| < 1 \text{ t.d.} \\ n^+ \text{ autovalori con } \operatorname{Re}(\lambda) > 0 \text{ t.c., } |\lambda| > 1 \text{ t.d.} \\ n^0 \text{ autovalori con } \operatorname{Re}(\lambda) = 0 \text{ t.c., } |\lambda| = 1 \text{ t.d.} \end{cases}$$

allora nell'intorno di \bar{x} esistono

$$\begin{cases} W^s = \text{varietà stabile (dim } W^s = n^-) \\ W^u = \text{varietà instabile (dim } W^u = n^+) \\ W^0 = \text{varietà centro (dim } W^0 = n^0) \end{cases}$$

tali che

- sono **invarianti** ($x(0) \in W^{s,u,0}$ implica $x(t) \in W^{s,u,0} \quad \forall t \geq 0$)
- sono **tangenti** in \bar{x} alle corrispondenti varietà del **sistema linearizzato**
- la dinamica su W^s e su W^u è **equivalente** a quella del **sistema linearizzato**
- la dinamica su W^0 dipende invece dai **termini di ordine superiore** al primo dello sviluppo di Taylor ($O(\partial x(t)^2)$) \Rightarrow **non** può essere studiata per mezzo del **sistema linearizzato**



LINEARIZZAZIONE NELL'INTORNO DI UN EQUILIBRIO \bar{x}

VARIETA' STABILE, INSTABILE E CENTRO

Se $J(\bar{x})$ possiede

$$\begin{cases} n^- \text{ autovalori con } \operatorname{Re}(\lambda) < 0 \text{ t.c., } |\lambda| < 1 \text{ t.d.} \\ n^+ \text{ autovalori con } \operatorname{Re}(\lambda) > 0 \text{ t.c., } |\lambda| > 1 \text{ t.d.} \\ n^0 \text{ autovalori con } \operatorname{Re}(\lambda) = 0 \text{ t.c., } |\lambda| = 1 \text{ t.d.} \end{cases}$$

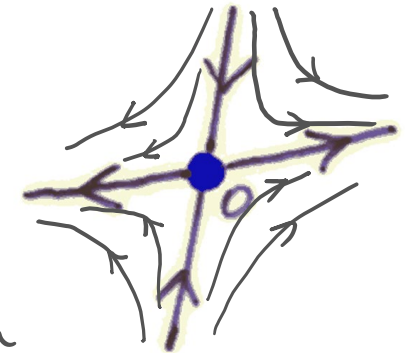
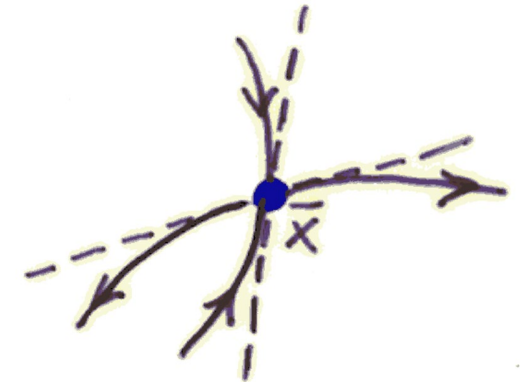
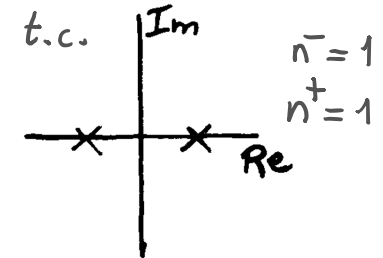
allora nell'intorno di \bar{x} esistono

$$\begin{cases} W^s = \text{varietà stabile (dim } W^s = n^-) \\ W^u = \text{varietà instabile (dim } W^u = n^+) \\ W^0 = \text{varietà centro (dim } W^0 = n^0) \end{cases}$$

tali che

- sono **invarianti** ($x(0) \in W^{s,u,0}$ implica $x(t) \in W^{s,u,0} \quad \forall t \geq 0$)
- sono **tangenti** in \bar{x} alle corrispondenti varietà del **sistema linearizzato**
- la dinamica su W^s e su W^u è **equivalente** a quella del **sistema linearizzato**
- la dinamica su W^0 dipende invece dai **termini di ordine superiore** al primo dello sviluppo di Taylor ($O(\partial x(t)^2)$) \Rightarrow **non** può essere studiata per mezzo del **sistema linearizzato**

Conclusione: se $n^0 = 0$ (\bar{x} si dice iperbolico), la geometria delle traiettorie vicino a \bar{x} è ben approssimata da quella del sistema linearizzato



LINEARIZZAZIONE NELL'INTORNO DI UN EQUILIBRIO \bar{x}

VARIETA' STABILE, INSTABILE E CENTRO

Se $J(\bar{x})$ possiede

$$\begin{cases} n^- \text{ autovalori con } \operatorname{Re}(\lambda) < 0 \text{ t.c., } |\lambda| < 1 \text{ t.d.} \\ n^+ \text{ autovalori con } \operatorname{Re}(\lambda) > 0 \text{ t.c., } |\lambda| > 1 \text{ t.d.} \\ n^0 \text{ autovalori con } \operatorname{Re}(\lambda) = 0 \text{ t.c., } |\lambda| = 1 \text{ t.d.} \end{cases}$$

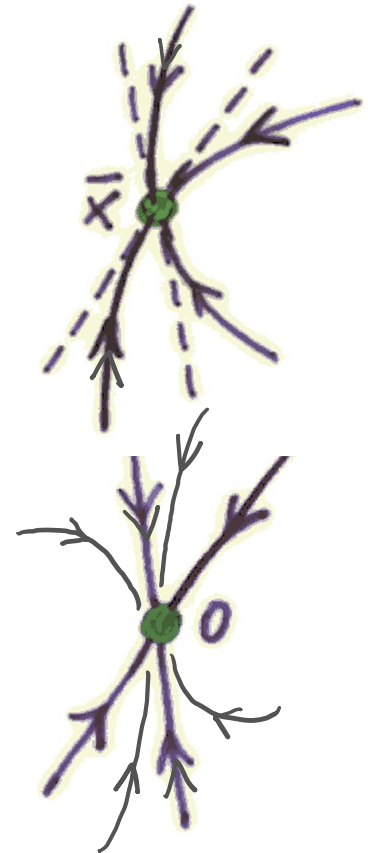
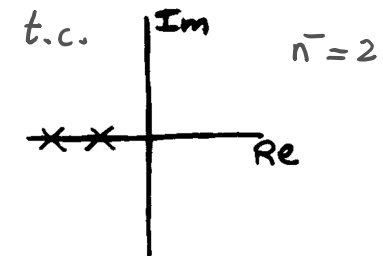
allora nell'intorno di \bar{x} esistono

$$\begin{cases} W^s = \text{varietà stabile (dim } W^s = n^-) \\ W^u = \text{varietà instabile (dim } W^u = n^+) \\ W^0 = \text{varietà centro (dim } W^0 = n^0) \end{cases}$$

tali che

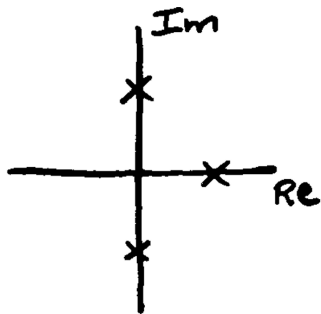
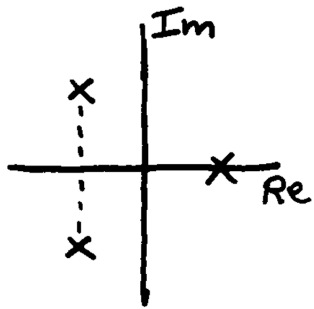
- sono **invarianti** ($x(0) \in W^{s,u,0}$ implica $x(t) \in W^{s,u,0} \quad \forall t \geq 0$)
- sono **tangenti** in \bar{x} alle corrispondenti varietà del **sistema linearizzato**
- la dinamica su W^s e su W^u è **equivalente** a quella del **sistema linearizzato**
- la dinamica su W^0 dipende invece dai **termini di ordine superiore** al primo dello sviluppo di Taylor ($O(\partial x(t)^2)$) \Rightarrow **non** può essere studiata per mezzo del **sistema linearizzato**

Conclusione: se $n^0 = 0$ (\bar{x} si dice iperbolico), la geometria delle traiettorie vicino a \bar{x} è ben approssimata da quella del sistema linearizzato



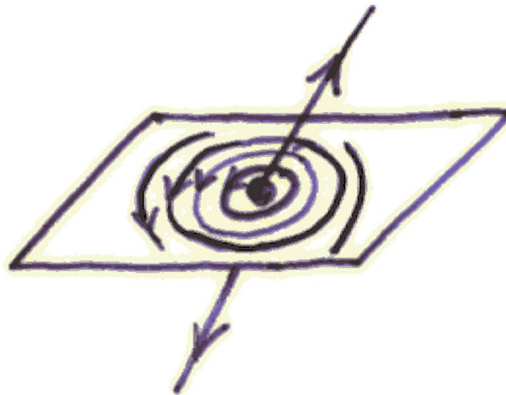
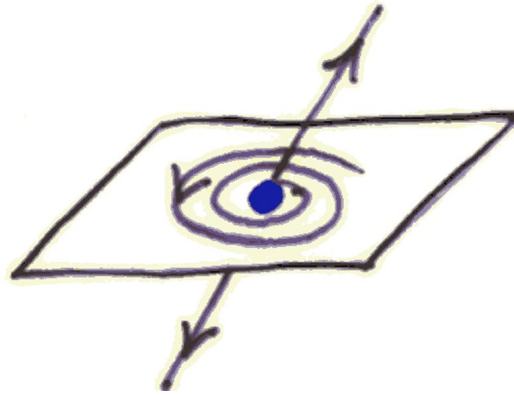
LINEARIZZAZIONE NELL'INTORNO DI UN EQUILIBRIO \bar{x} VARIETA' STABILE, INSTABILE E CENTRO ($n=3$)

$$J(\bar{x})$$



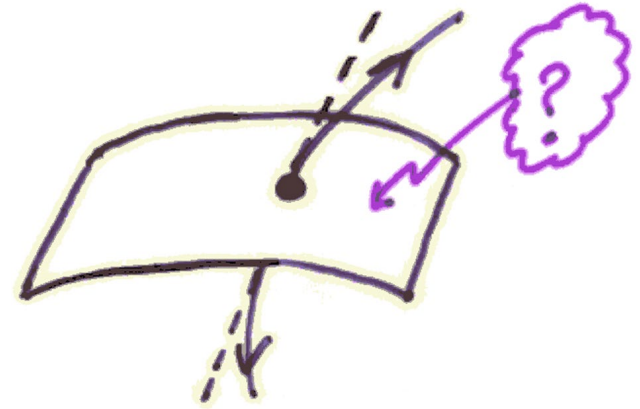
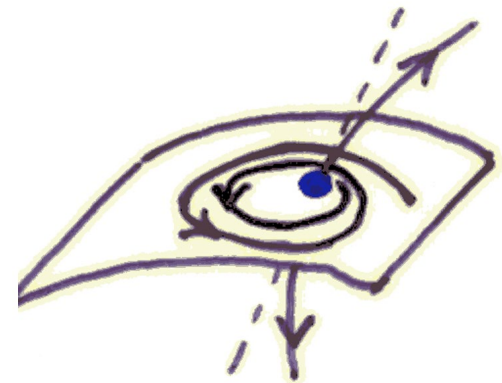
sistema linearizzato

$$\dot{\delta x} = J(\bar{x}) \delta x$$



sistema non lineare

$$\dot{x} = f(x)$$



LINEARIZZAZIONE E STABILITA'

Le proprietà relative a W^s , W^u , W^0 implicano i risultati seguenti

$J(\bar{x})$ asintoticamente stabile $\Rightarrow \bar{x}$ asintoticamente stabile

$J(\bar{x})$ esponenzialmente instabile $\Rightarrow \bar{x}$ instabile

Nota Bene: se $J(\bar{x})$ è semplicemente stabile o debolmente instabile non si può dedurre nulla a proposito della stabilità di \bar{x} .

Esempio: crescita logistica: $\dot{x} = rx\left(1 - \frac{x}{k}\right) \Rightarrow J(x) = r\left(1 - 2\frac{x}{k}\right)$

2 equilibri: $\begin{cases} \bar{x} = 0, & J(0) = r, & \text{instabile} \\ \bar{x} = k, & J(k) = -r, & \text{asintoticamente stabile} \end{cases}$

Esempio: sistemi quadratici e cubici:

$$\dot{x} = x^2, \quad \bar{x} = 0, \quad J(x) = 2x, \quad J(\bar{x}) = 0 \Rightarrow ???$$

$$\dot{x} = -x^2, \quad \bar{x} = 0, \quad J(x) = -2x, \quad J(\bar{x}) = 0 \Rightarrow ???$$

$$\dot{x} = x^3, \quad \bar{x} = 0, \quad J(x) = 3x^2, \quad J(\bar{x}) = 0 \Rightarrow ???$$

$$\dot{x} = -x^3, \quad \bar{x} = 0, \quad J(x) = -3x^2, \quad J(\bar{x}) = 0 \Rightarrow ???$$

