

- Introduzione
- Formulazione del modello (dinamico, lineare, tempo-invariante)
- Movimento ed equilibrio
- Stabilità
- I sistemi non lineari (cenni)
- Raggiungibilità ed osservabilità
- Progetto di sistemi di controllo (nel dominio del tempo)
- Segnali e sistemi nel dominio della frequenza
- Progetto di sistemi di controllo (nel dominio della frequenza)

GEOMETRIA DEL MOVIMENTO LIBERO

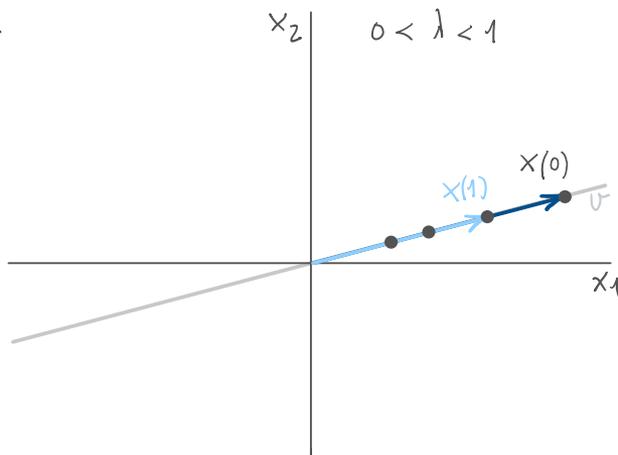
Studiamo, qualitativamente, le traiettorie (nello spazio di stato delle variabili x) del movimento libero.

Lo facciamo in casi semplici (sostanzialmente $n=2$, qualche cenno con $n=3$), ma ragionamenti analoghi permettono di generalizzare.

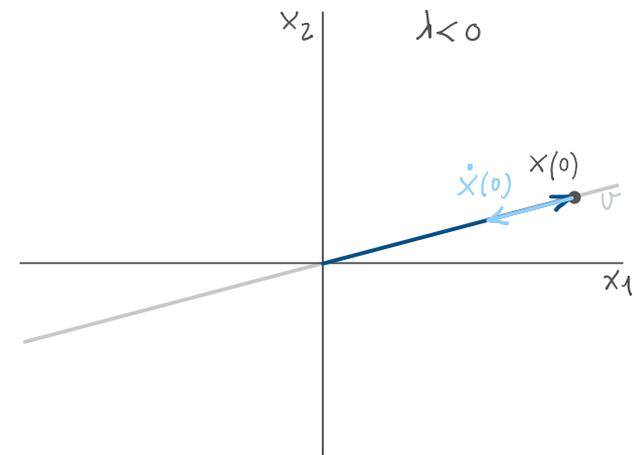
Sfruttiamo due proprietà che abbiamo già discusso dal punto di vista algebrico e che ora rivediamo dal punto di vista geometrico.

1) Lungo gli autovettori (reali) di A evolvono traiettorie rettilinee

t.d.



t.c.



$$x(0) = \alpha v \rightarrow x(1) = Ax(0) = \alpha \underbrace{Av}_{\lambda v} = \lambda \alpha v = \lambda x(0)$$

$$\rightarrow x(t+1) = \lambda x(t)$$

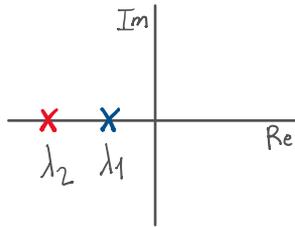
$$\dot{x}(0) = \left. \frac{d}{dt} x(t) \right|_{t=0} = Ax(0) = \lambda x(0)$$

→ Lungo v c'è una dinamica del I ordine con autovalore λ

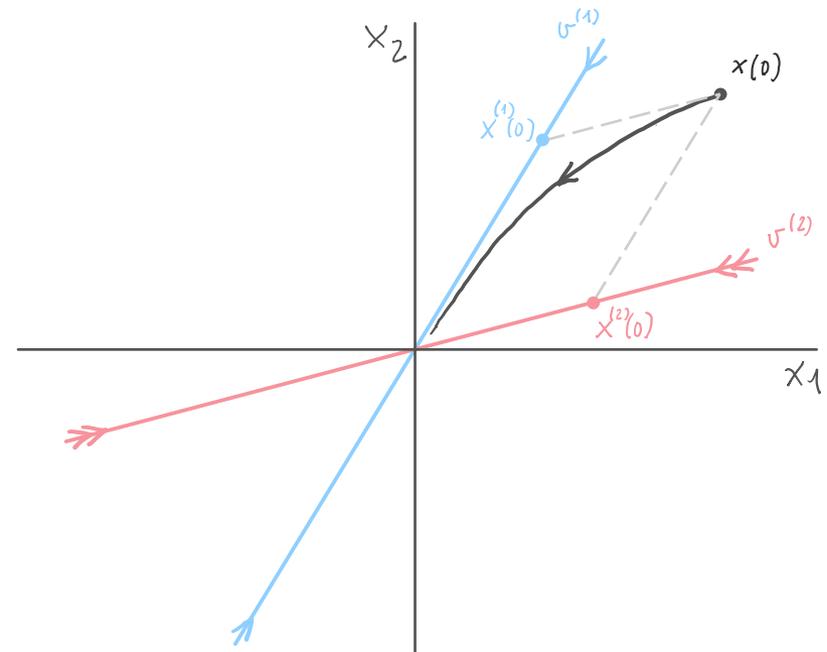
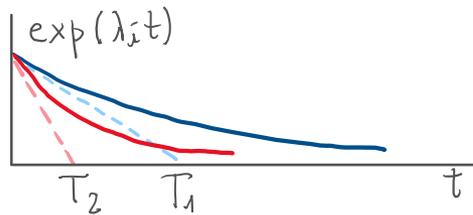
GEOMETRIA DEL MOVIMENTO LIBERO

2) Principio di sovrapposizione cause ($x(t)$) - effetti (traiettorie): ovvero scomponiamo $x(0)$ in componenti lungo gli autovettori, e ricomponiamo le corrispondenti traiettorie rettilinee, tenendo conto delle rispettive velocità di percorrenza.

Esempio a t.c.



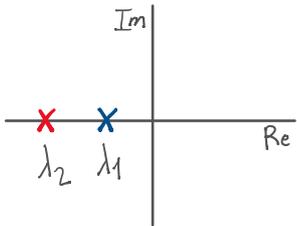
λ_1 lento (singola freccia sull'autovett $v^{(1)}$)
 λ_2 veloce (doppia freccia sull'autovett $v^{(2)}$)



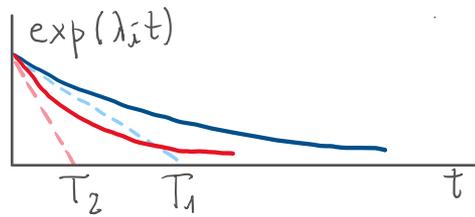
- La traiettoria converge a 0 in modo tangente all'autovettore "lento" (dominante)
- Indietro nel tempo la traiettoria tende ad allinearsi all'autovettore "veloce"

Procediamo "per esempi", prima $n=2$ t.c. e $n=2$ t.b., poi qualche cenno con $n=3$ e $n>3$

NODO STABILE

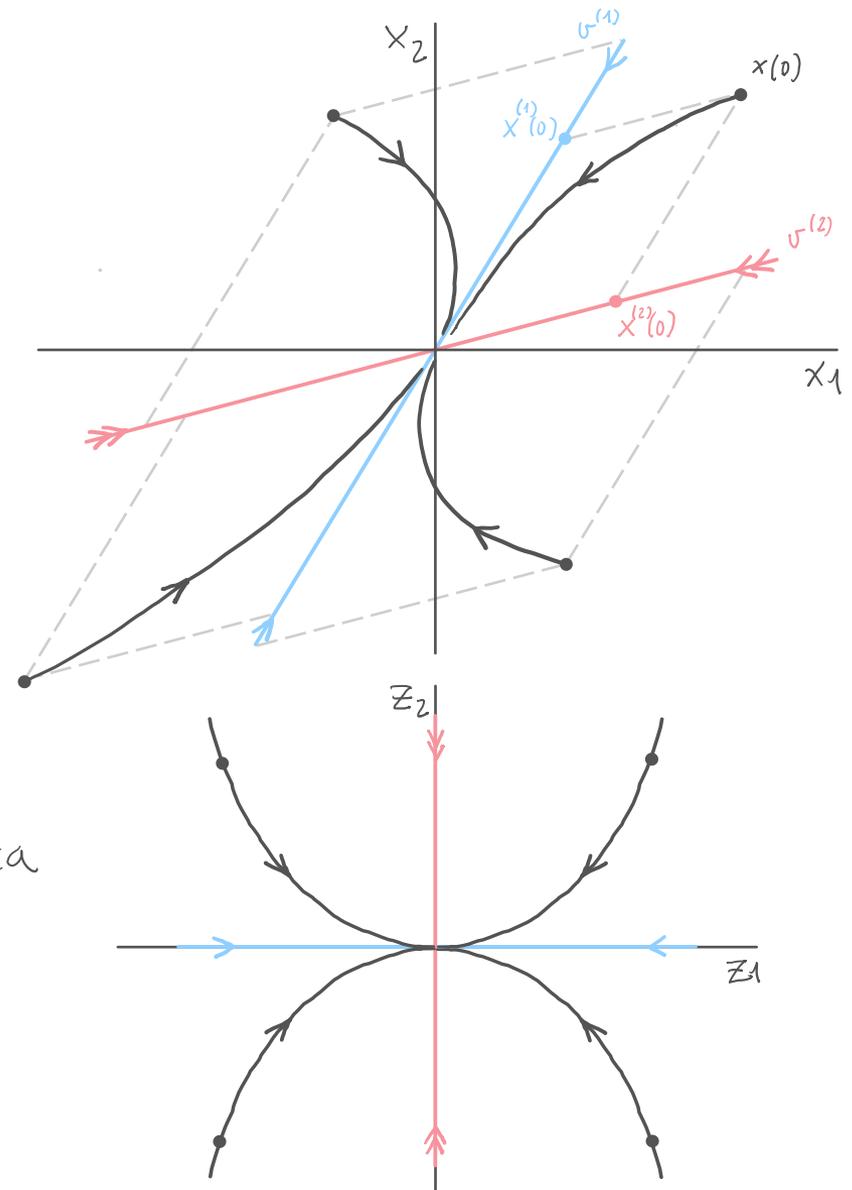


λ_1 dominante, lento (singola freccia)
 λ_2 veloce (doppia freccia)

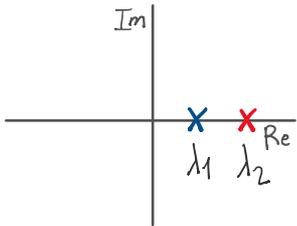


Nota: con il cambio di variabili $z = Tx$
 con $T^{-1} = [v^{(1)}, v^{(2)}]$, si ottiene la dinamica

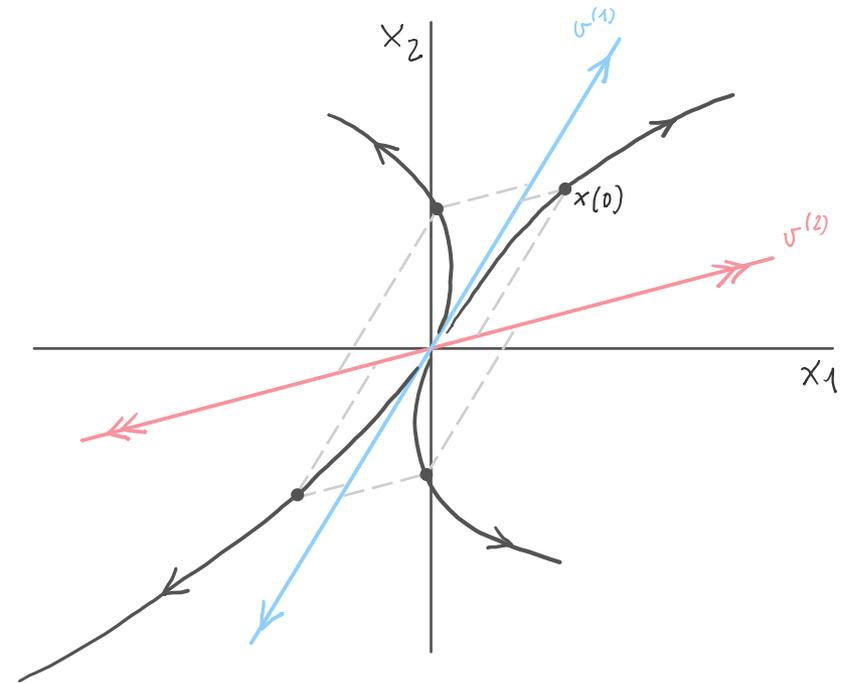
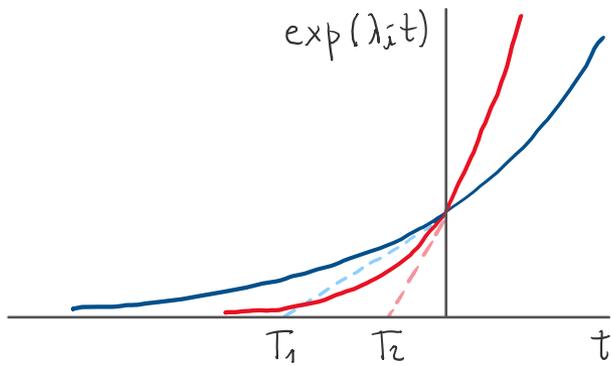
$$\dot{z} = TAT^{-1}z = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} z$$



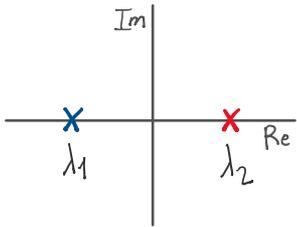
NODO INSTABILE



λ_1 dominante, lento (singola freccia)
 λ_2 veloce (doppia freccia)



SELLA

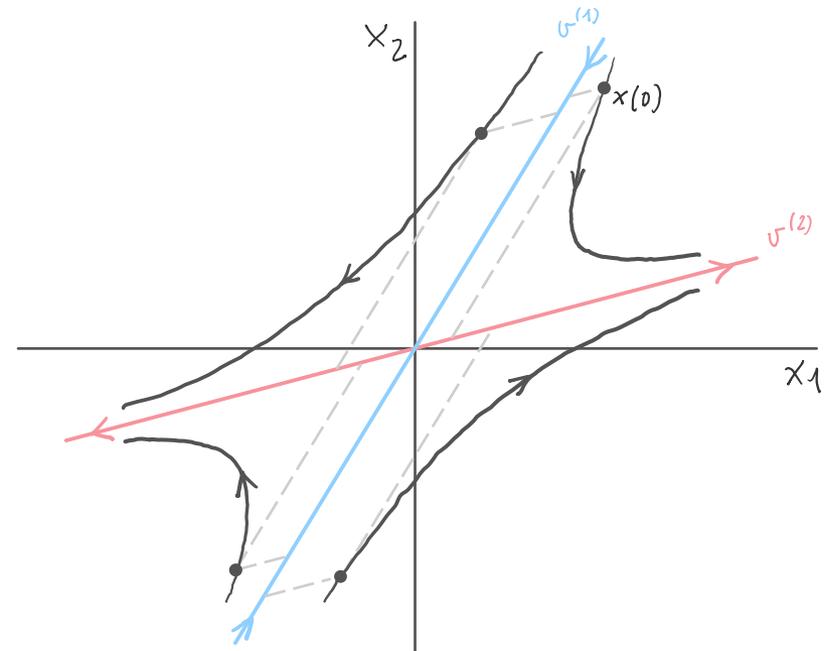


L'autovettore "stabile" $v^{(1)}$ viene detto
varietà stabile

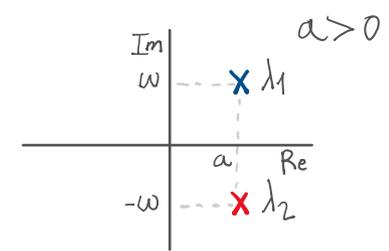
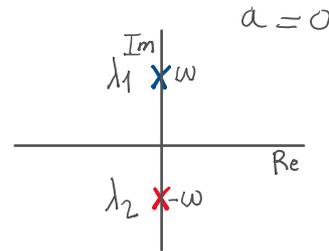
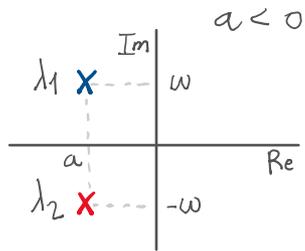
$$= \{ x(0) : \lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = 0 \}$$

L'autovettore "instabile" viene detto
varietà instabile

$$= \{ x(0) : \lim_{t \rightarrow -\infty} x(t) = 0 \}$$



FUOCO STABILE, CENTRO E FUOCO INSTABILE ($\lambda_{1,2} = a \pm i\omega$, $\omega > 0$)



NOTA sull'uso degli autovettori complessi come nuovi assi

Nell'analisi di stabilità abbiamo usato l'autovettore σ complesso in T^{-1} , ottenendo soluzioni $Z_i(t)$ e $Z_{i+1}(t)$ complesse coniugate. Per fare considerazioni geometriche dobbiamo mantenere le nuove variabili Z_1 e Z_2 reali. Per farlo si usano come nuovi assi $\text{Re}(\sigma)$ e $\text{Im}(\sigma)$.

$$A \sigma^{(1,2)} = \lambda_{1,2} \sigma^{(1,2)}$$

Calcolo $\sigma^{(1)} = \sigma_R + i\sigma_I$: $A(\sigma_R + i\sigma_I) = (a + i\omega)(\sigma_R + i\sigma_I)$ $\begin{cases} A\sigma_R = a\sigma_R - \omega\sigma_I \\ A\sigma_I = \omega\sigma_R + a\sigma_I \end{cases}$

Nota: $\sigma^{(2)} = \overline{\sigma^{(1)}} = \sigma_R - i\sigma_I$

2n eq. nelle 2n componenti di σ_R e σ_I con "inf" soluzioni (se $\sigma^{(1)}$ è sol. lo è anche $c\sigma^{(1)}$, $c \in \mathbb{C}$)

Usando $T^{-1} = [\sigma_R, -\sigma_I]$ come nuovi assi (quindi $\text{Re}(\sigma^{(2)})$ e $\text{Im}(\sigma^{(2)})$), si ottiene

$$TAT^{-1} = \begin{bmatrix} a & -\omega \\ \omega & a \end{bmatrix} \quad \left(\text{usando } T^{-1} = [\sigma_R, \sigma_I] \rightarrow TAT^{-1} = \begin{bmatrix} a & \omega \\ -\omega & a \end{bmatrix} \right)$$

CENTRO ($a = 0$, $\lambda_{1,2} = \pm i\omega$)

Se applichiamo il cambio di variabili con nuovi assi $T^{-1} = [\underline{v}_R, -\underline{v}_I]$ (Re e Im dell'autovett $\lambda_2 = -i\omega$), si ottiene

$$\dot{z} = TAT^{-1}z = \begin{bmatrix} 0 & -\omega \\ \omega & 0 \end{bmatrix} z = \omega \begin{bmatrix} -z_2 \\ z_1 \end{bmatrix}$$

→ \dot{z} è sempre $\perp z$ ($\dot{z}^T z = 0$) → traiettorie circolari
(con rotazione antioraria - risulta oraria se $T^{-1} = [\underline{v}_R, \underline{v}_I]$)

→ $\|\dot{z}\| = \sqrt{\dot{z}^T \dot{z}} = \omega \|z\|$ → vel. angolare costante = ω

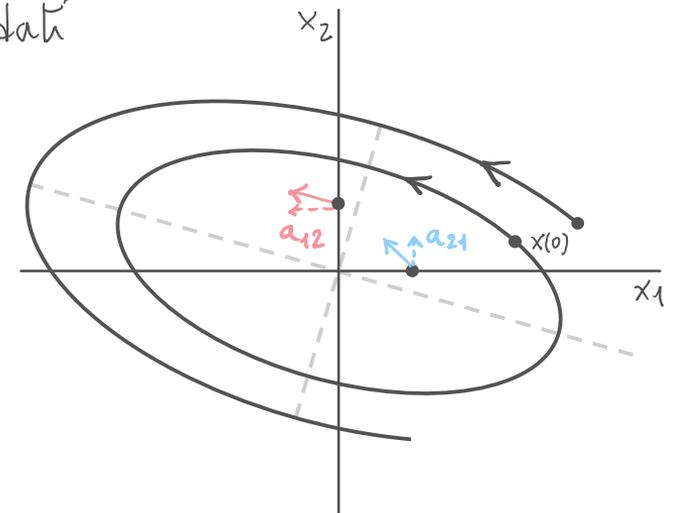
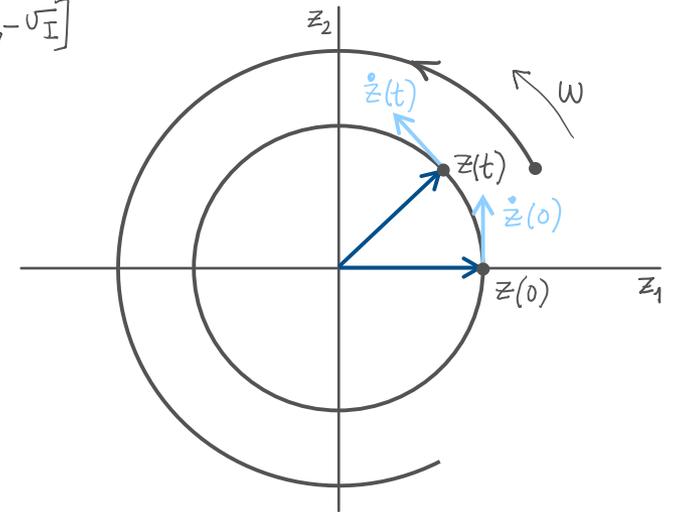
Nelle variabili originali x le traiettorie percorrono ellissi (di eq. $x^T T^T T x = x(0)^T T^T T x(0)$ con assi di simmetria dati dagli autovettori di $T^T T$) e vel. angolare non costante.

Il verso di rotazione si capisce da un semplice calcolo di \dot{x}

$$x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \dot{x} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} a_{21} > 0 : \text{antiorario} \\ a_{21} < 0 : \text{orario} \end{array}$$

$$x = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \rightarrow \dot{x} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} a_{12} < 0 : \text{antiorario} \\ a_{12} > 0 : \text{orario} \end{array}$$

Nota: per avere λ complessi, a_{12} e a_{21} hanno necessariamente segno opposto



FUOCO STABILE

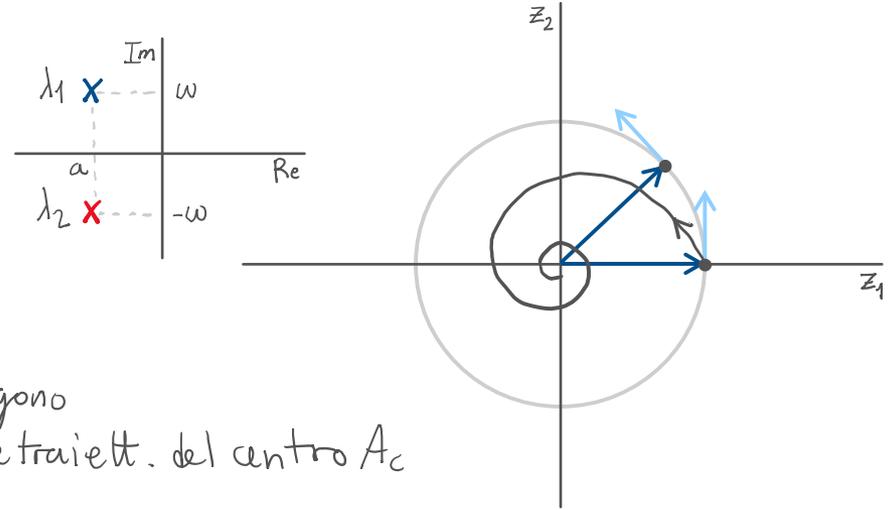
Oss: il sistema $\dot{x}^{(c)} = \overbrace{(A - aI)}^{A_c} x^{(c)}$ è un centro e A_c ha gli stessi autovettori di A .

Se $x^{(c)}(t)$ è sol. del sistema A_c , $\dot{x}^{(c)} = A_c x^{(c)}$, allora

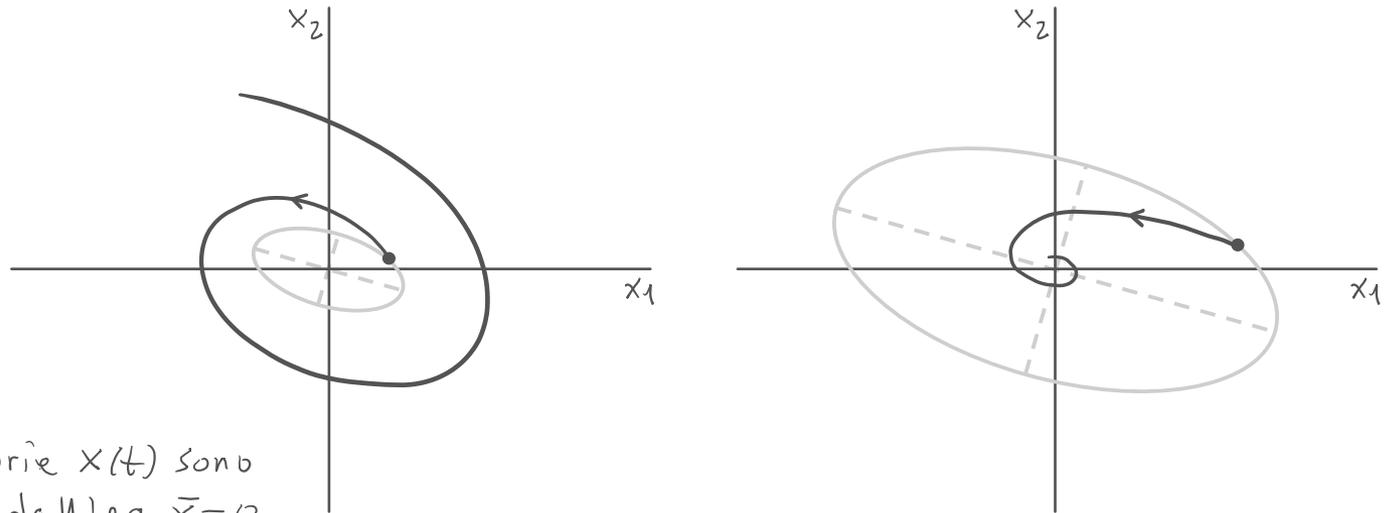
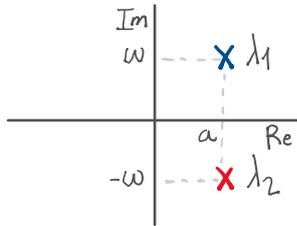
$x(t) = e^{at} x^{(c)}(t)$ è soluzione del sistema A

(verifica: $\dot{x} = a e^{at} x^{(c)} + e^{at} A_c x^{(c)} = (aI + A_c)x = Ax$)

Conclusione: le traiettorie $x(t)$ sono spirali che convergono all'equilibrio $\bar{x} = 0$. Ruotano con forma che segue le traiett. del centro A_c con raggio che tende a zero come e^{at} .



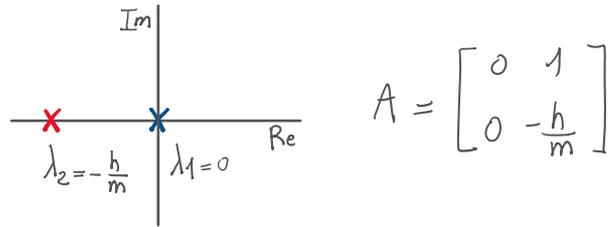
FUOCO INSTABILE



Conclusione: le traiettorie $x(t)$ sono spirali che divergono dall'eq. $\bar{x} = 0$ (vi convergono per $t \rightarrow -\infty$). Ruotano con forma che segue le traiett. del centro A_c con raggio che diverge come e^{at} .

NODO "critico": un autovalore nullo

Esempio: Newton con attrito



$$v^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ (infiniti equilibri)}$$

$$A v^{(2)} = -\frac{h}{m} v^{(2)}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{h}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1^{(2)} \\ v_2^{(2)} \end{bmatrix} = -\frac{h}{m} \begin{bmatrix} v_1^{(2)} \\ v_2^{(2)} \end{bmatrix}$$

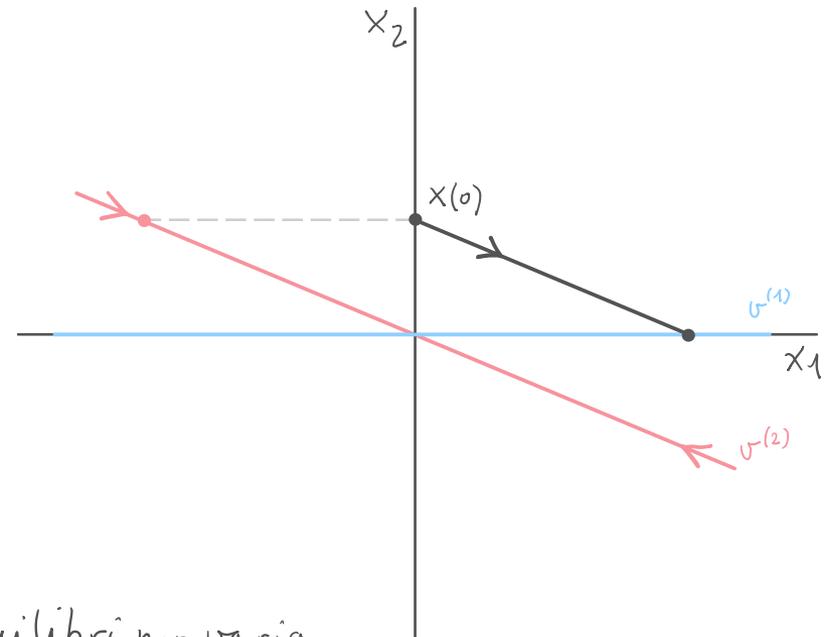
$$\begin{cases} v_2^{(2)} = -\frac{h}{m} v_1^{(2)} \\ -\frac{h}{m} v_1^{(2)} = -\frac{h}{m} v_2^{(2)} \end{cases} \rightarrow v^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{h}{m} \end{bmatrix}$$

Conclusione:

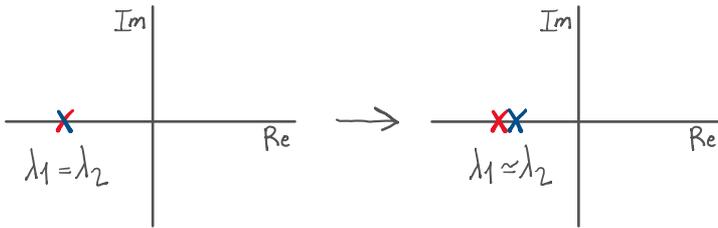
La componente di $x(0)$ lungo l'autovettore di equilibri non varia

le traiettorie sono rettilinee e // all'autovettore stabile

L'equilibrio raggiunto dipende dalla condizione iniziale

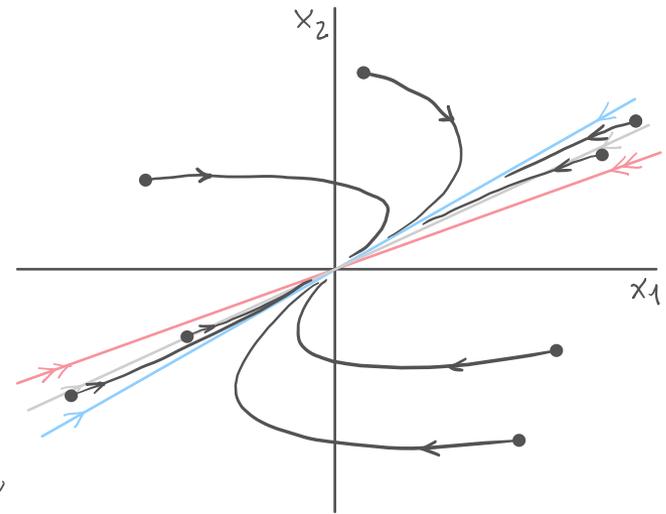


NODO STABILE "degenere": autovalori coincidenti con un solo autovettore ($m_\alpha = 2, m_\beta = 1$)



Consideriamo un caso "perturbato"

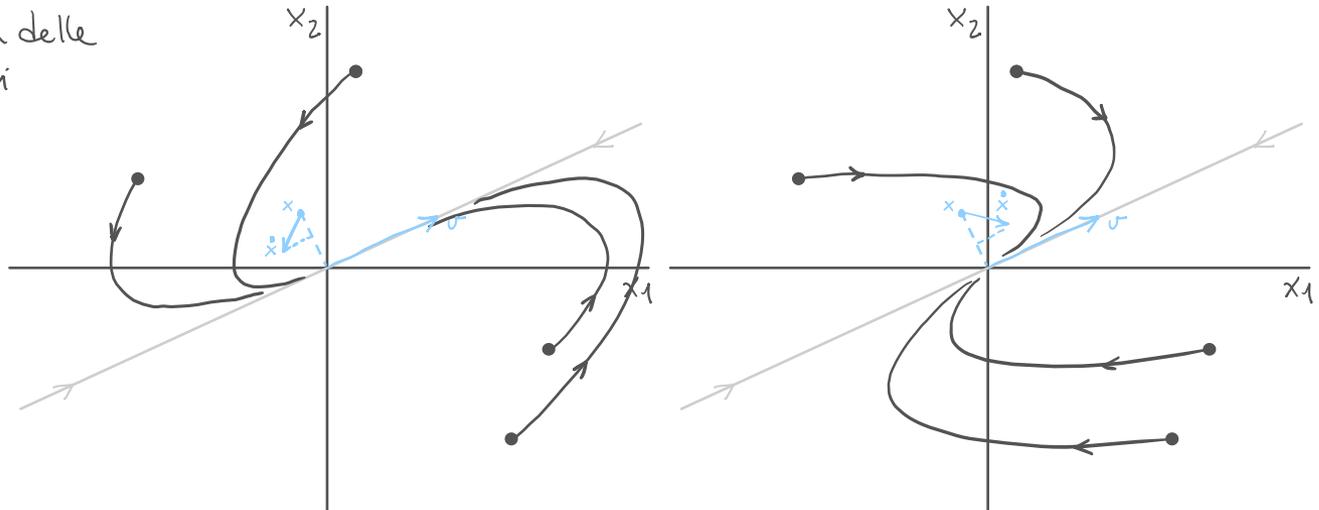
Conclusione: lontano dall'autovettore v , le traiettorie sono allineate a v , con cordi in direzione da un lato di v e discordi dall'altro lato. Avvicinandosi all'eq. $\bar{x}=0$, le traiettorie cambiano direzione rispetto a v e convergono a $\bar{x}=0$ tangenti a v .



Nota: la legge di percorrenza delle traiettorie contiene i modi e^{lt} e te^{lt}

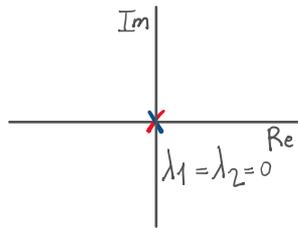
Per capire quale sia il caso dei due possibili si calcola la componente di \dot{x} lungo v in un punto in direzione $\perp v$.

$\dot{x}^T v > 0 \rightarrow \dot{x}$ in direz. di v
 $\dot{x}^T v < 0 \rightarrow \dot{x}$ in direz. di $-v$



NODO DEBOLMENTE INSTABILE: due autovalori nulli con un solo autovettore

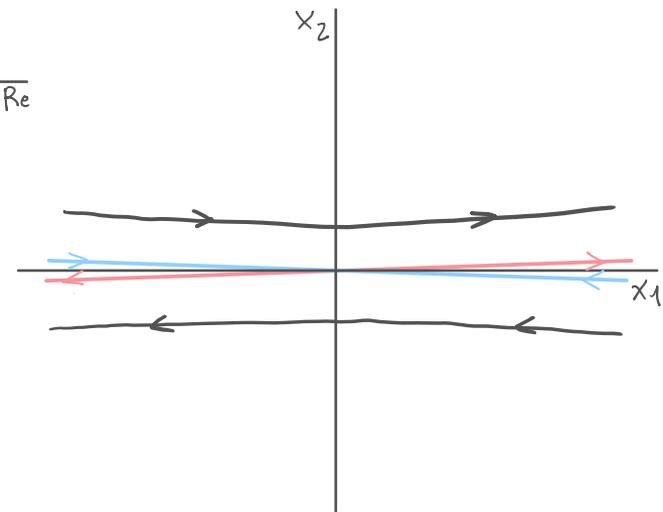
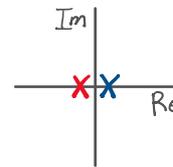
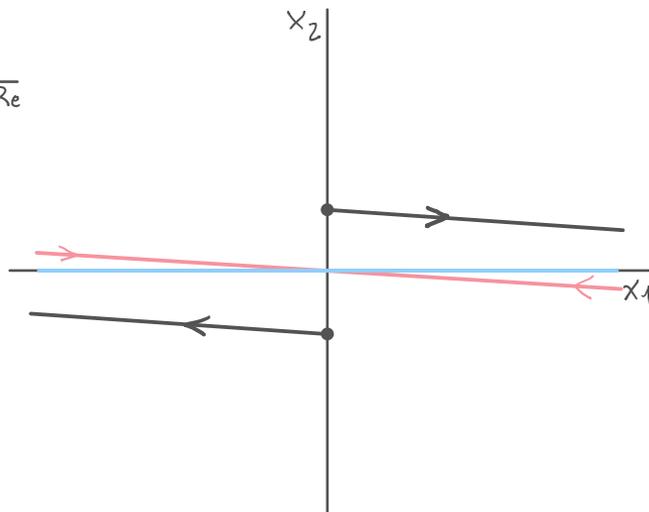
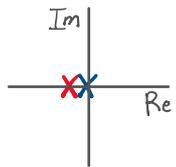
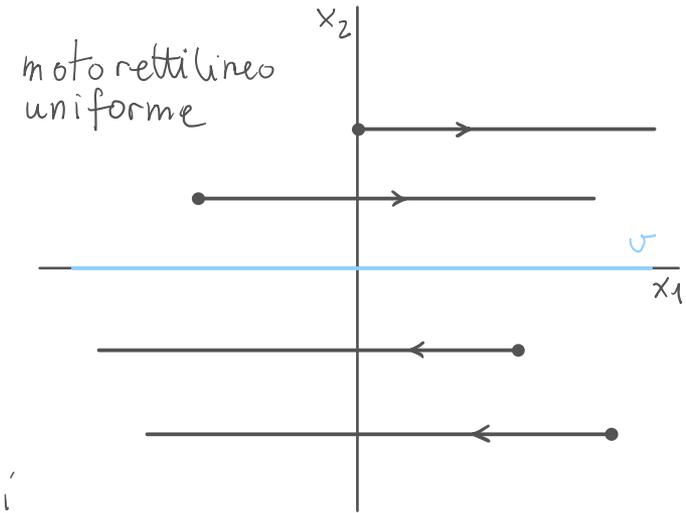
Esempio: Newton senza attrito ($h=0$)



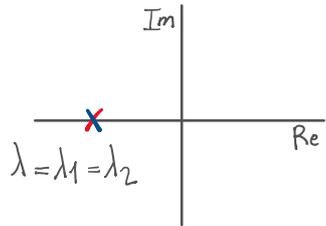
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{h}{m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Un solo autovettore $v = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ (infiniti equilibri)

conclusione: le traiettorie sono // a v in direzioni opposte da lati opposti rispetto a v . Per capire quale caso si calcola \dot{x} in un punto comodo, si può capirlo intuitivamente da casi perturbati

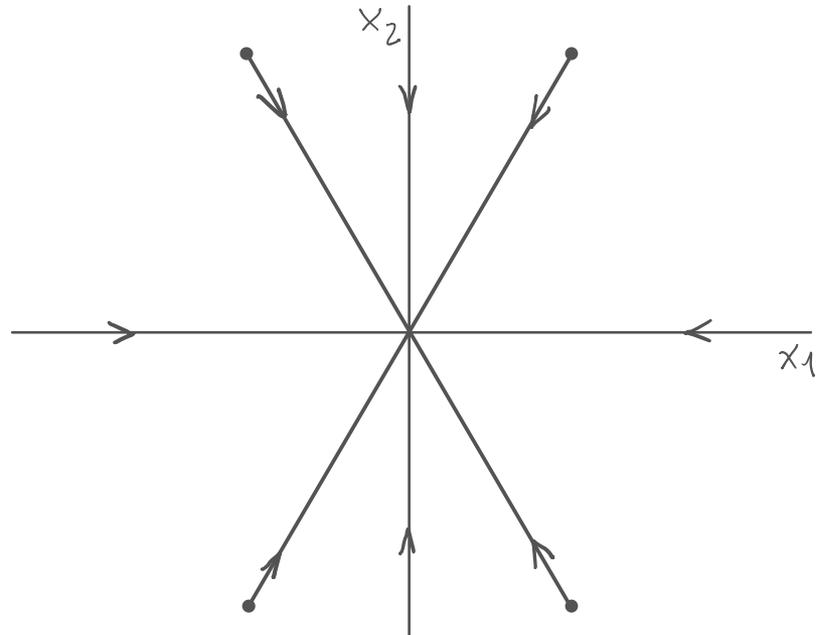


NODO STELLA STABILE: autovalori coincidenti con due autovettori ($m_a = 2, m_g = 2$)

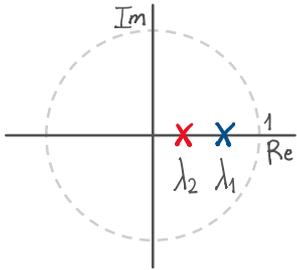


2 autovettori $v^{(1)}$ e $v^{(2)}$ significa che qualsiasi vettore $v = \alpha_1 v^{(1)} + \alpha_2 v^{(2)}$ è autovettore

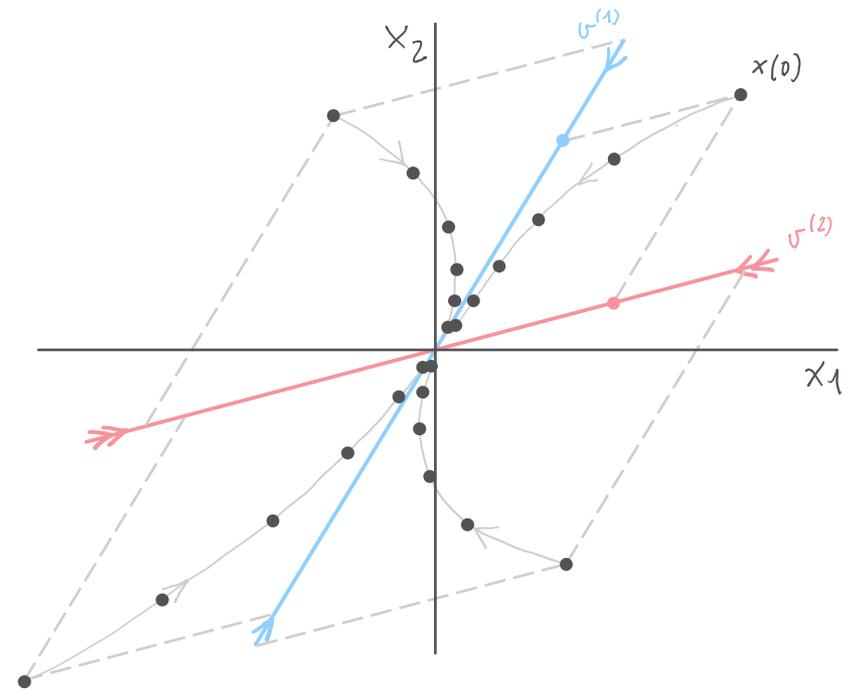
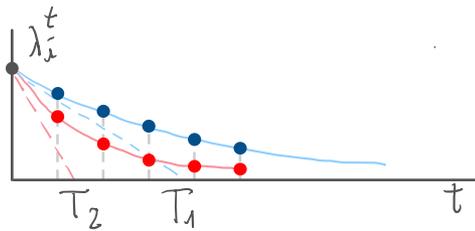
Conclusione: tutte le traiettorie sono rettilinee e percorse verso $\bar{x} = 0$ con legge esponenziale $e^{\lambda t}$



CASI a t.d.: NODO STABILE con autovalori positivi

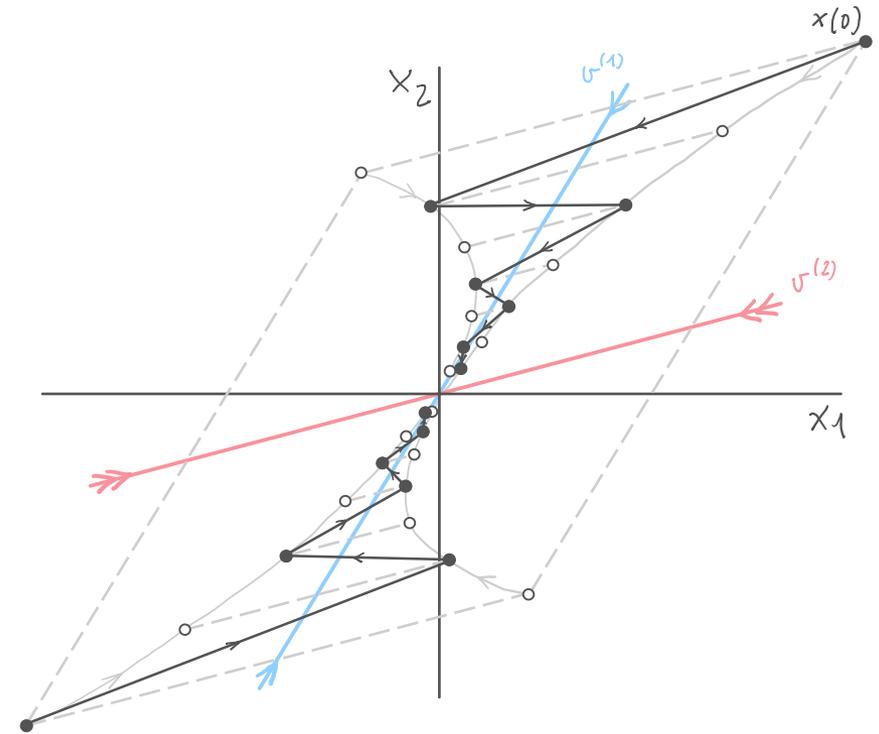
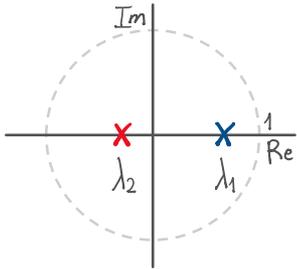


λ_1 dominante, lento (singola freccia), $T_i = -\frac{1}{\log|\lambda_i|}$
 λ_2 veloce (doppia freccia)



Con autovalori positivi, la geometria delle traiettorie è analoga al caso del nodo stabile a t.c.
 Suggestivo: tracciare le traiettorie del caso a t.c. da utilizzare come "guida" per quelle a t.d.

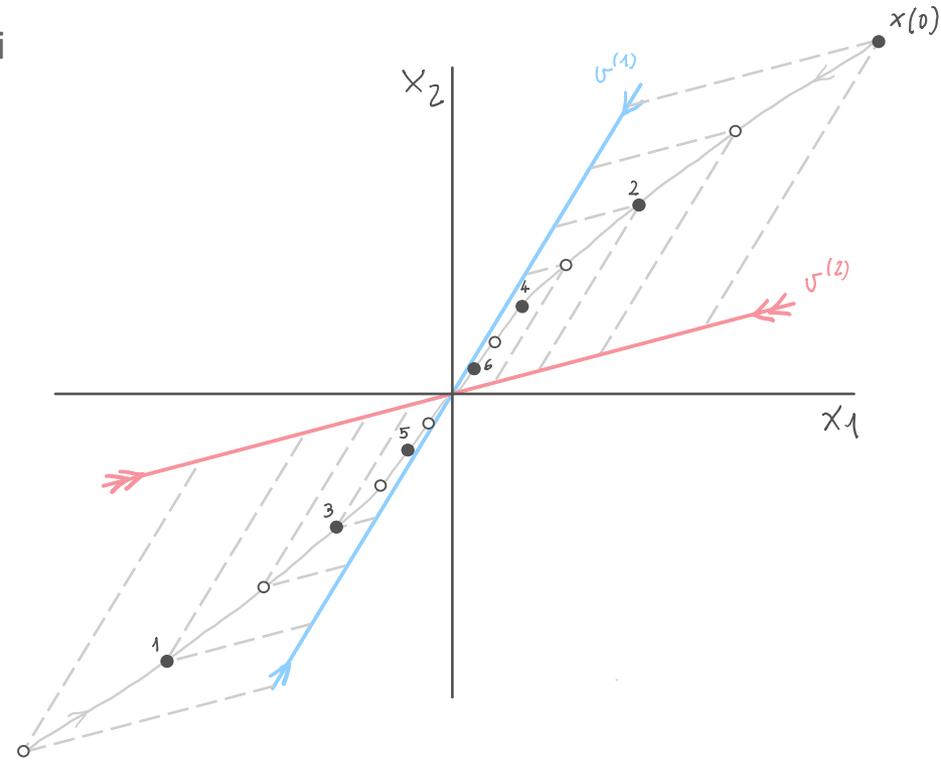
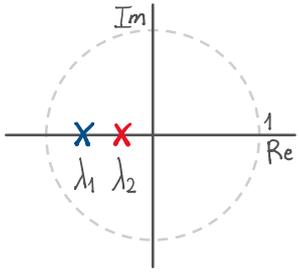
CASI a t.d.: NODO STABILE con un autovalore negativo



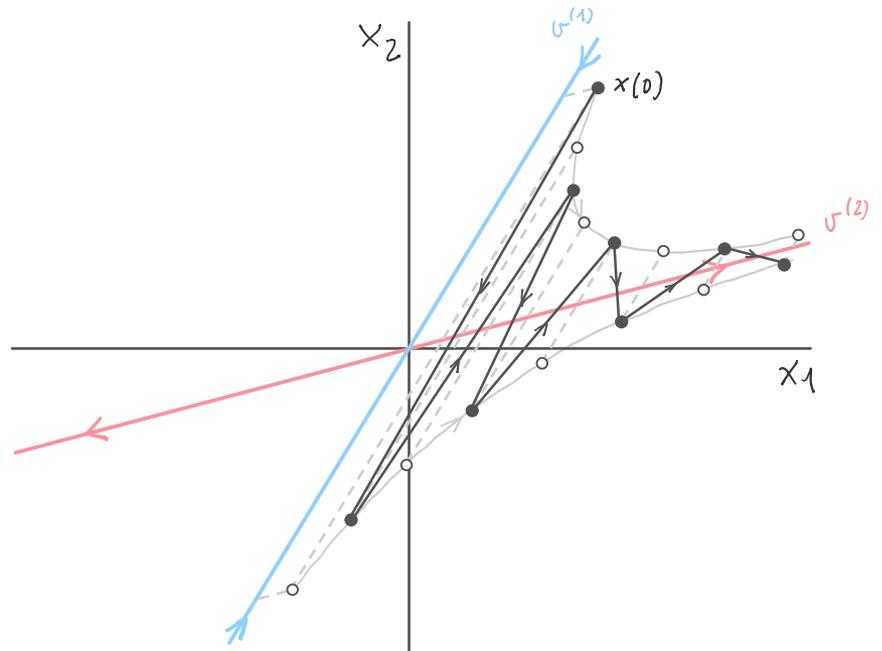
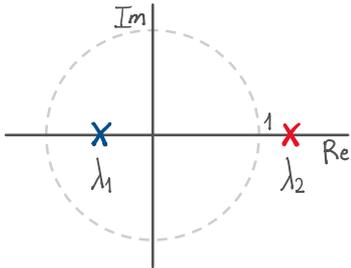
Suggerimento:

- considerare anche lo stato iniziale "virtuale" con componenti opposte lungo gli autovettori associati a autovalori < 0 .
- tracciare le "guide" a t.c. a partire dai due stati iniziali, vero e virtuale
- tracciare le traiettorie a t.d. lungo le due guide come se gli autovalori fossero > 0 .
- la traiettoria che parte da $x(0)$ alterna punti lungo le due traiettorie tracciate.

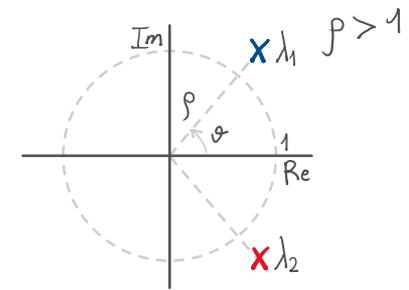
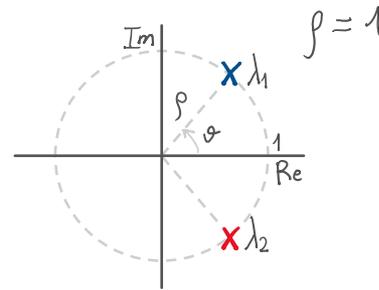
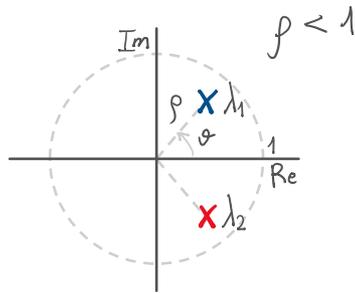
CASI a t.d.: NODO STABILE con due autovalori negativi



CASI a t.d.: SELLA con un autovalore negativo



CASI a t.d.: FUOCO STABILE, CENTRO E FUOCO INSTABILE ($\lambda_{1,2} = \rho e^{\pm i\varphi}$, $\rho > 0$, $0 < \varphi < \pi$)



NOTA sull'uso degli autovettori complessi come nuovi assi

Come visto per il caso a t.c., col cambio di variabili con nuovi assi $T^{-1} = [\sqrt{R} \quad -\sqrt{I}]$, dove

$$A v^{(1)} = \lambda_1 v^{(1)}, \quad v^{(1)} = \sqrt{R} + i\sqrt{I}, \quad v^{(2)} = \bar{v}^{(1)} = \sqrt{R} - i\sqrt{I},$$

si ottiene

$$T A T^{-1} = \begin{bmatrix} \operatorname{Re}(\lambda_1) & -\operatorname{Im}(\lambda_1) \\ \operatorname{Im}(\lambda_1) & \operatorname{Re}(\lambda_1) \end{bmatrix} = \rho \begin{bmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{bmatrix}$$

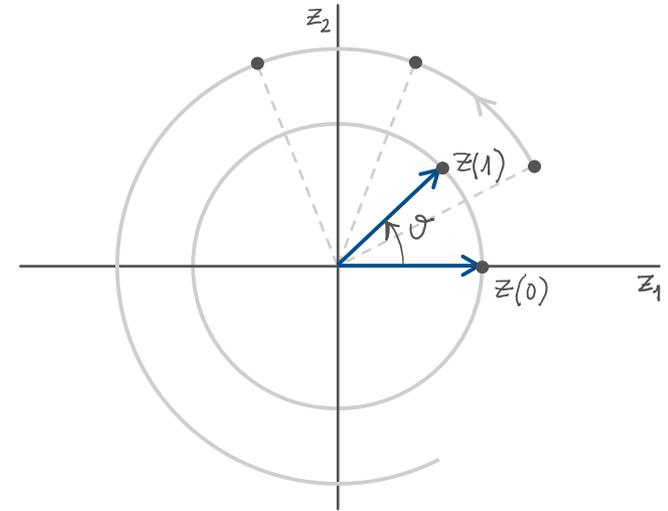
CENTRO ($p = 1, \lambda_{1,2} = e^{\pm i\theta}$)

Nelle nuove variabili z otteniamo

$$z(t+1) = TAT^{-1}z(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}}_{\text{matrice di rotazione e antioraria di angolo } \theta} z(t)$$

matrice di rotazione e antioraria di angolo θ

→ La traiettoria percorre la circonferenza di raggio $z(0)$ con rotazione antioraria di angolo θ ad ogni passo



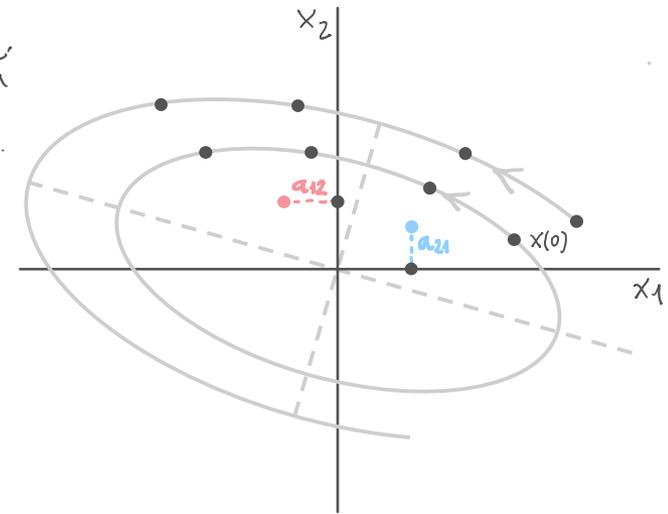
Nelle variabili originali x le traiettorie percorrono ellissi (di eq. $x^T T^T T x = x(0)^T T^T T x(0)$ con assi di simmetria dati dagli autovettori di $T^T T$) e angolo di rotazione non costante.

Il verso di rotazione si capisce con lo stesso test visto a t.c.

$$x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow x(1) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} a_{21} > 0 : \text{antiorario} \\ a_{21} < 0 : \text{orario} \end{array}$$

$$x = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \rightarrow x(1) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} a_{12} < 0 : \text{antiorario} \\ a_{12} > 0 : \text{orario} \end{array}$$

Nota: per avere λ complessi, a_{12} e a_{21} hanno necessariamente segno opposto



NOTA su segnali periodici e quasi-periodici

Nota: la traiettoria è periodica solo se $\frac{\vartheta}{2\pi} = \text{razionale} = \frac{p}{q}$
 $q\vartheta = 2\pi p$, q è il periodo e p il numero di rotazioni compiute da $z(t)$ in un periodo

Se $\frac{\vartheta}{2\pi}$ è irrazionale la traiettoria si dice quasi-periodica

La stessa cosa vale per i modi $\cos(\vartheta t)$ e $\sin(\vartheta t)$ presenti nella soluzione

Segnale quasi-periodico a t.d.: spettro (trasf. Fourier) discreto (composto da impulsi isolati ad angoli $\vartheta_1, \vartheta_2, \dots$ di cui almeno uno a rapporto irrazionale con π).

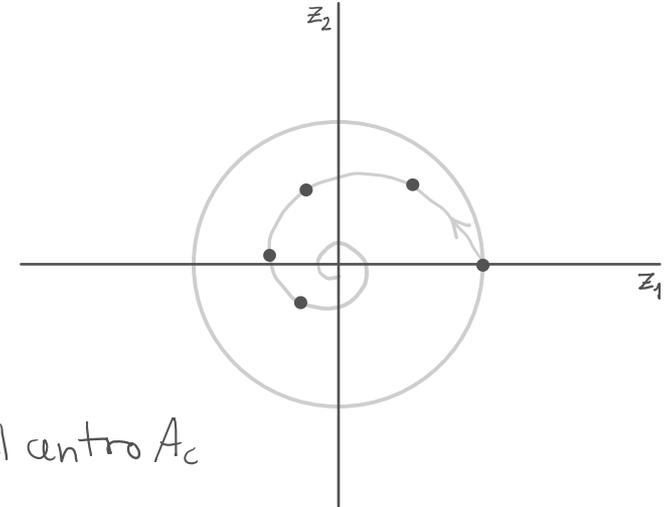
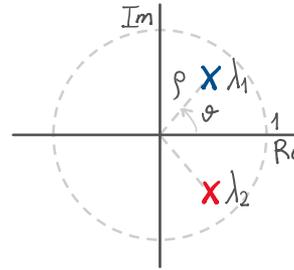
Nota: anche a t.c. il movimento libero può avere traiettorie (modi) quasi-periodiche. Ciò richiede due coppie di autovalori immaginari $\lambda_{1,2} = \pm i\omega_1$ e $\lambda_{3,4} = \pm i\omega_2$. Combinando i modi si ottengono segnali del tipo $\cos(\omega_1 t) + \cos(\omega_2 t)$ che sono periodici solo se $\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{p}{q}$, con periodo $T = p \frac{2\pi}{\omega_1} = q \frac{2\pi}{\omega_2}$.
 Se $\frac{\omega_1}{\omega_2}$ è irrazionale, il segnale è quasi-periodico.

Segnale quasi-periodico a t.c.: spettro (trasf. Fourier) discreto (composto da impulsi isolati a pulsazioni $\omega_1, \omega_2, \dots$ di cui almeno due a rapporto irrazionale).

FUOCO STABILE

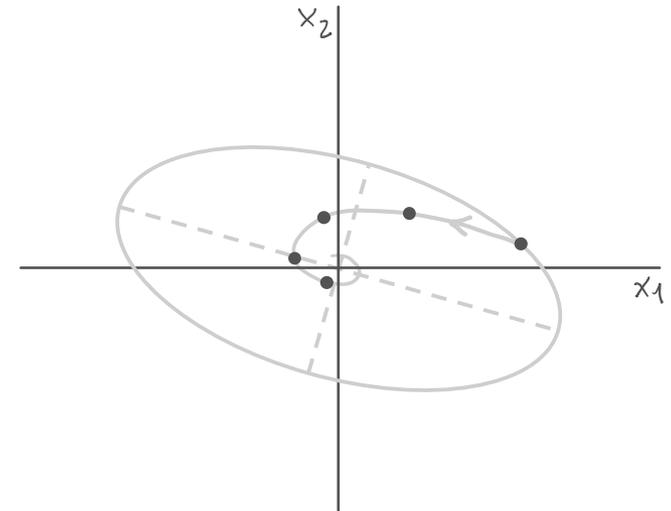
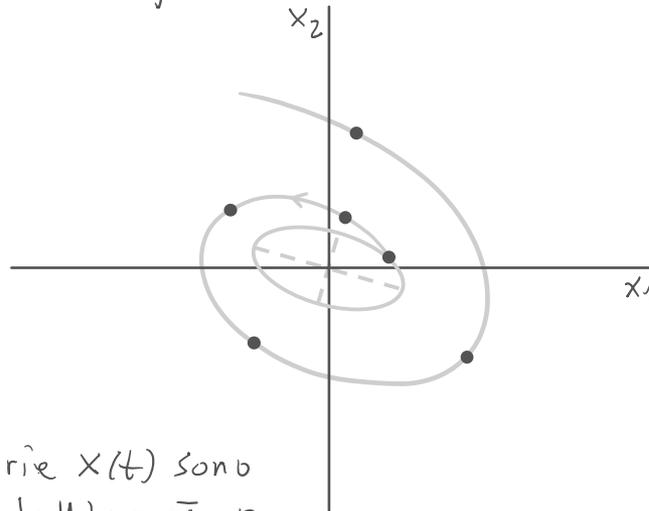
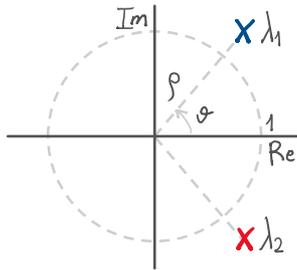
Oss: il sistema $x^{(c)}(t+1) = \overbrace{p^{-1}A}^{A_c} x^{(c)}(t)$ è un centro e A_c ha gli stessi autovettori di A .

Se $x^{(c)}(t)$ è sol. del sistema A_c , $x^{(c)}(t+1) = A_c x^{(c)}(t)$, allora $x(t) = p^t x^{(c)}(t)$ è sol. del sistema A (verifica: $x(t+1) = p^{t+1} x^{(c)}(t+1) = p^{t+1} A_c x^{(c)}(t) = A p^t x^{(c)}(t) = A x(t)$)



Conclusione: le traiettorie $x(t)$ sono spirali che convergono all'equilibrio $\bar{x} = 0$. Ruotano con forma che segue le traiett. del centro A_c con raggio che tende a zero come p^t .

FUOCO INSTABILE



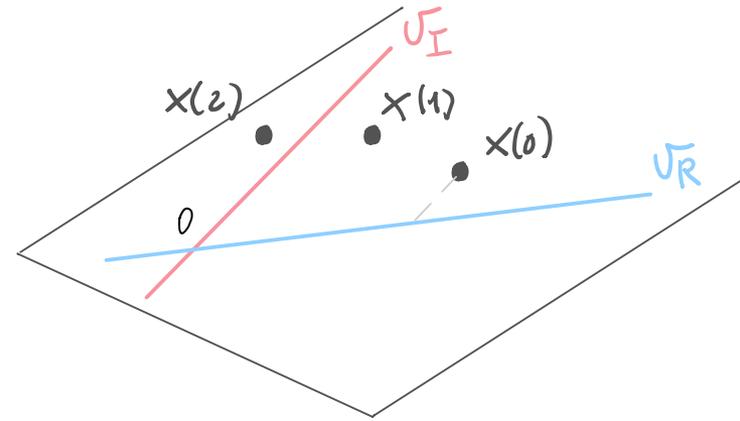
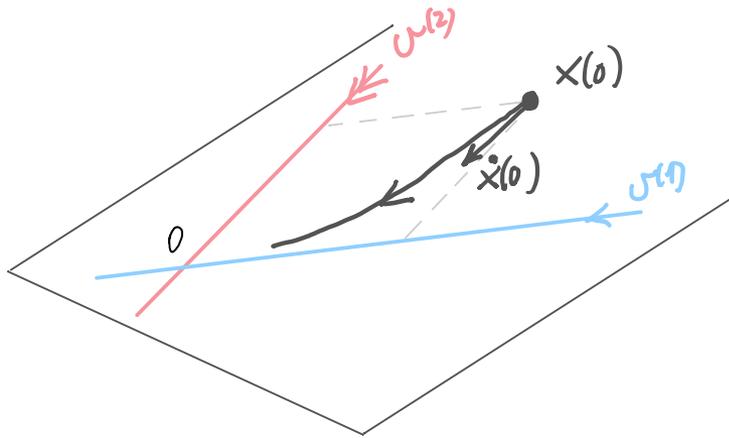
Conclusione: le traiettorie $x(t)$ sono spirali che divergono dall'eq. $\bar{x} = 0$ (vi convergono per $t \rightarrow -\infty$). Ruotano con forma che segue le traiett. del centro A_c con raggio che diverge come p^t .

CASI a dimensione $n > 2$

Osservazione: i piani (sottospazi) generati da 2 (o più) autovettori sono invarianti per il movimento libero.

$$x(0) = \alpha_1 v^{(1)} + \alpha_2 v^{(2)}, \text{ con } Av^{(1)} = \lambda_1 v^{(1)} \text{ e } Av^{(2)} = \lambda_2 v^{(2)}, \lambda_1, \lambda_2 \text{ reali}$$

$$\rightarrow \begin{cases} \text{t.c. } \dot{x}(0) \\ \text{t.d. } x(1) \end{cases} = Ax(0) = \alpha_1 Av^{(1)} + \alpha_2 Av^{(2)} = \alpha_1 \lambda_1 v^{(1)} + \alpha_2 \lambda_2 v^{(2)}$$



Se $\lambda_{1,2}$ sono comp. coniugati ($a \pm iw$, t.c.; $pe^{\pm i\theta}$, t.d.) il piano generato da $v_R = \text{Re}(v^{(1)})$ e $v_I = \text{Im}(v^{(1)})$ è invariante

$$x(0) = \alpha_1 v_R + \alpha_2 v_I \rightarrow \text{(t.c.) } \dot{x}(0) = \alpha_1 Av_R + \alpha_2 Av_I = \dots$$

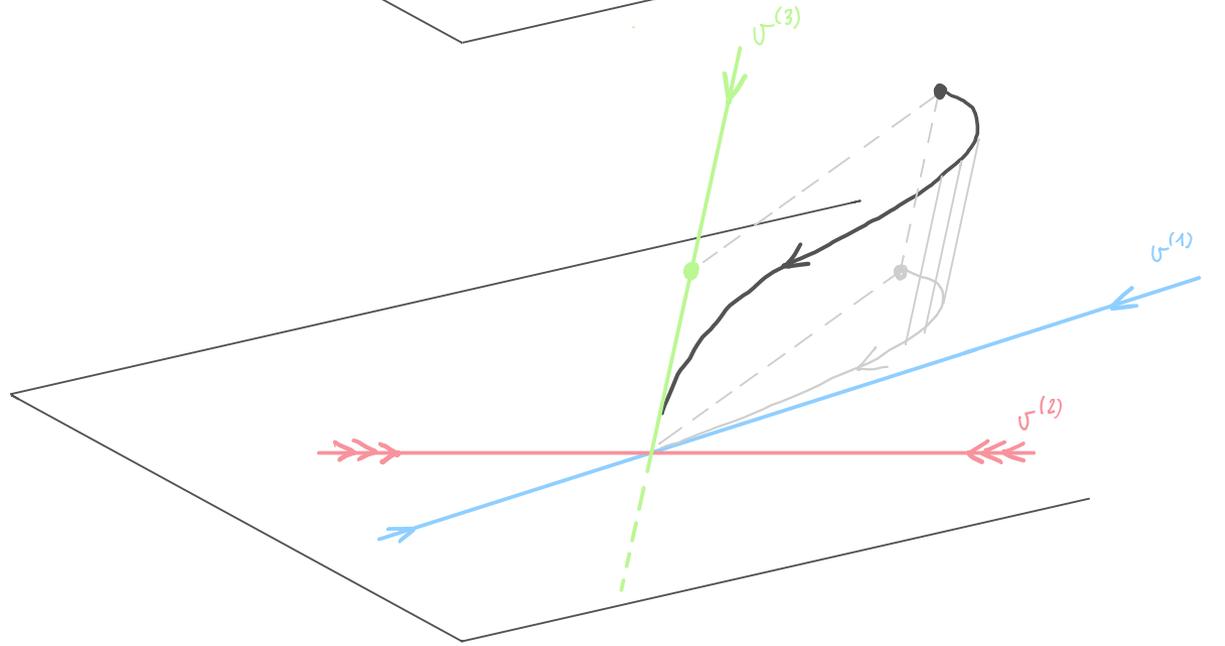
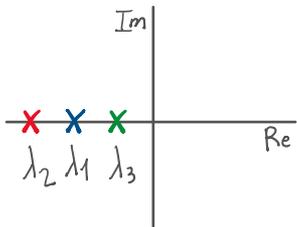
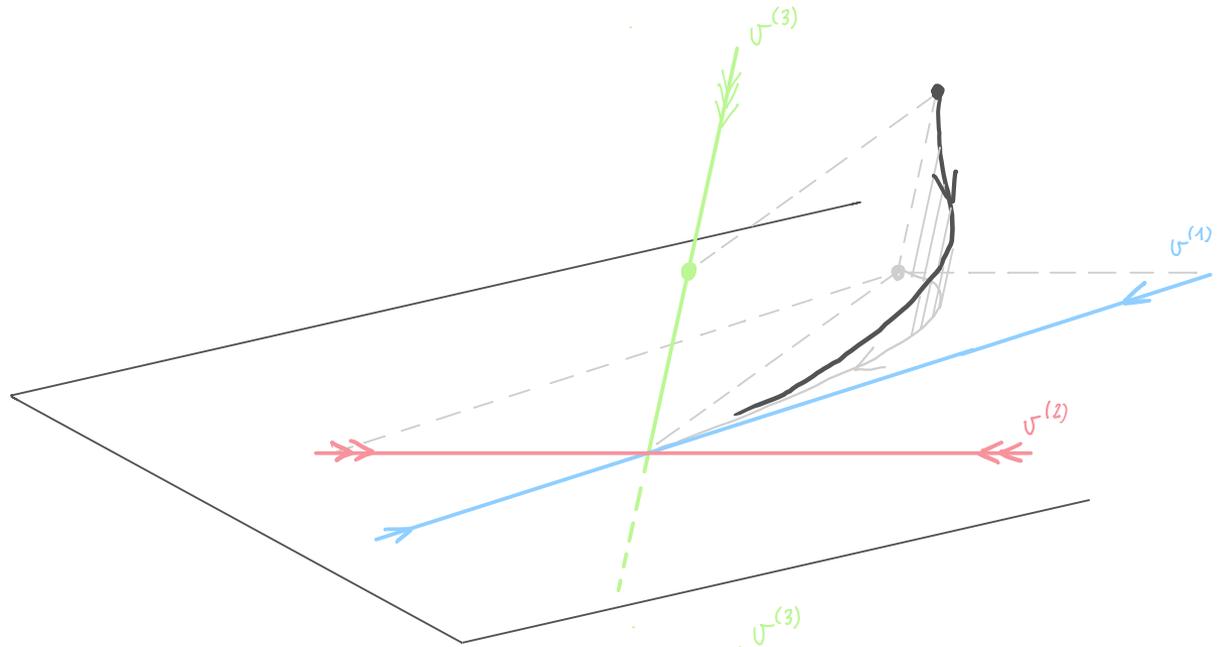
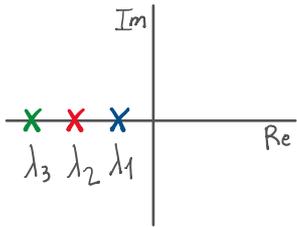
$$\begin{cases} Av_R = av_R - wv_I \\ Av_I = wv_R + av_I \end{cases}$$

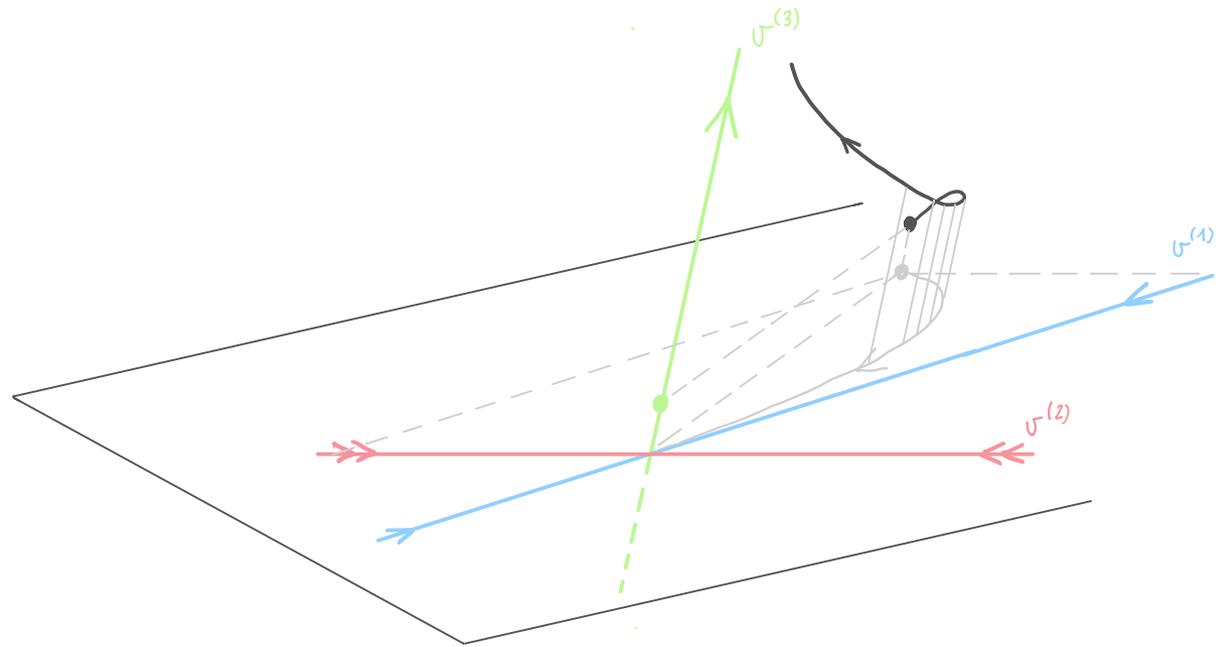
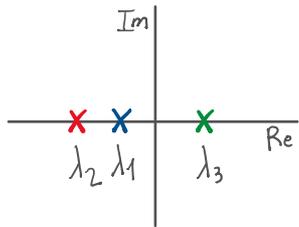
CASI a dimensione $n > 2$

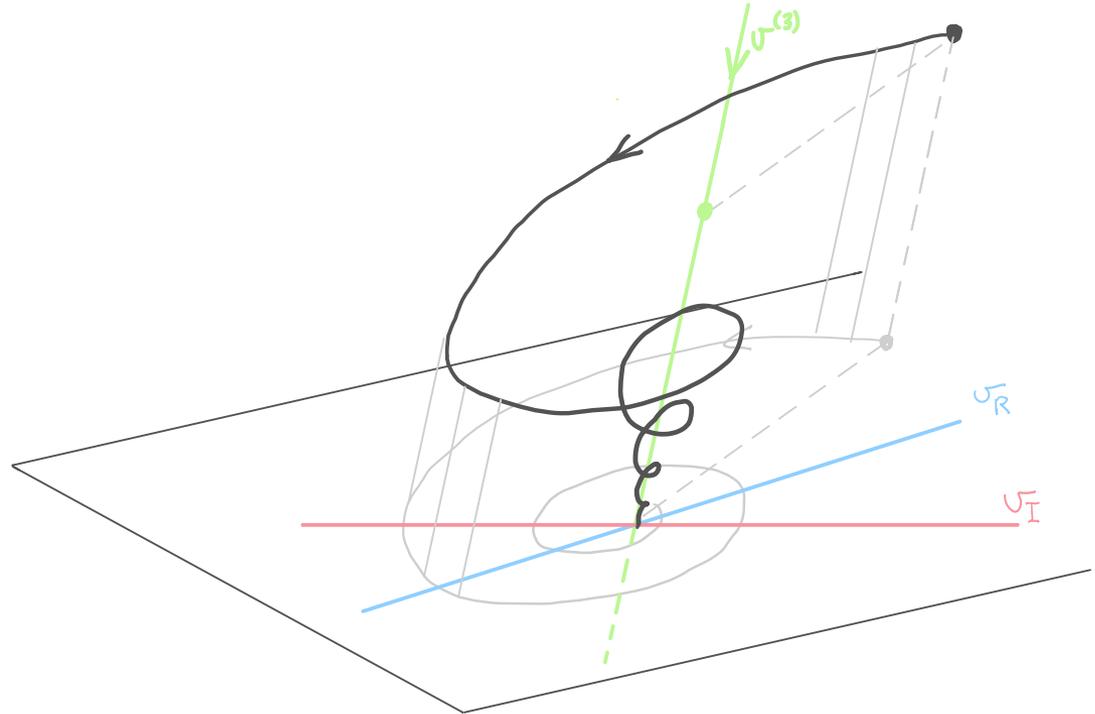
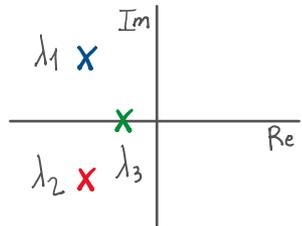
Suggerimento: è ancora quello di scomporre lo stato iniziale $X(0)$ in componenti lungo gli autovettori. Considerandoli singoli o a coppie (per forza a coppie se Re e Im di autovettori complessi), nei sottospazi a dimensione 1 o 2 si vedono geometrie note, da ricomporre tenendo conto delle velocità relative.

Nota: gli unici casi che richiedono un'analisi con $n \geq 3$ (che non vediamo) sono quelli di autovalori non regolari. In questi casi, il sotto-spazio invariante è generato dall'autovettore e da tutti gli autovettori generalizzati ad esso associati, che possono essere più di 2 (se $m_a \geq 3$)

CASI a dimensione $n > 2$



CASI a dimensione $n > 2$ 

CASI a dimensione $n > 2$ 

CASI a dimensione $n > 2$ 