- Introduzione
- Formulazione del modello (dinamico, lineare, tempo-invariante)
- Movimento ed equilibrio
- Stabilità
- I sistemi non lineari (cenni)
- Raggiungibilità ed osservabilità
- Progetto di sistemi di controllo (nel dominio del tempo)
- Segnali e sistemi nel dominio della frequenza
- Progetto di sistemi di controllo (nel dominio della frequenza)

TEST DI STABILITA'

Obiettivo: ottenere delle condizioni di stabilità espresse sui coefficienti α_i di $\Delta_A(\lambda)$ (o su quantità facilmente ottenibili da A, come $tr(A)$ e $det(A)$), per evitare il calcolo dei λ_i.

Nota: è una motivazione oggi superata se A è assegnata (le radici di un polinomio assegnato si calcolano numericamente con algoritmi efficienti). Restano test interessanti per discutere la stabilità in funzione di parametri non assegnati.

Nota: i test discriminano solo l'asintotica stabilità e la forte instabilità.

RIPASSO: traccia $tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$ e determinante $det(A)$

Proprietà: $tr(A) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$, $det(A) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$

$$\Delta_A(\lambda) = \lambda^n + \alpha_1 \lambda^{n-1} + \dots + \alpha_n \qquad \text{(non fattorizzato)}$$

$$= (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \cdots (\lambda - \lambda_n) \qquad \text{(fattorizzato con } \lambda_i \text{ indistinti)}$$

$$= \lambda^n \underbrace{- \sum_{i} \lambda_i}_{\alpha_1 = -tr(A)} \lambda^{n-1} + \underbrace{\sum_{i \neq j} \lambda_i \lambda_j}_{\alpha_2} \lambda^{n-2} \underbrace{- \sum_{i \neq j \neq k} \lambda_i \lambda_j \lambda_k}_{\alpha_3} \lambda^{n-3} + \dots + \underbrace{(-1)^n \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n}_{\alpha_n = (-1)^n det(A)}$$

$n = 2$, regola pratica per scrivere $\Delta_A(\lambda) = det(\lambda I - A) = \lambda^2 - tr(A)\lambda + det(A)$

TEST RAPIDI DI INSTABILITA': Sono condizioni facili da verificare e sufficienti per la (f.) instabilità t. continuo

Test di instabilità della traccia

$tr(A) > 0 \rightarrow A$ (f.) instab

$tr(A) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = \sum_{i=1}^{n} Re(\lambda_i) > 0 \longrightarrow$ c'è qualche $Re(\lambda_i) > 0$

Se $tr(A) = 0$, possiamo solo concludere che A non è as. stab.
potrebbero esserci sia λ con $Re<0$ che λ con $Re>0$,
oppure di tutti con $Re(\lambda_i)=0$

Se $tr(A) < 0$, non possiamo concludere nulla

Test di instab. del determinante

$\underbrace{(-1)^n det(A)}_{\alpha_n} < 0 \rightarrow A$ (f.) instab

$det(A) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$ e $\lambda_i \cdot \bar{\lambda}_i = |\lambda_i|^2 > 0$

n pari: $det(A) < 0 \rightarrow$ numero dispari di λ_i reali < 0
$\rightarrow$ numero dispari (almeno uno) di λ_i reali > 0.

n dispari: $det(A) > 0 \rightarrow$ numero pari di λ_i reali < 0
$\rightarrow$ numero dispari (almeno uno) di λ_i reali > 0.

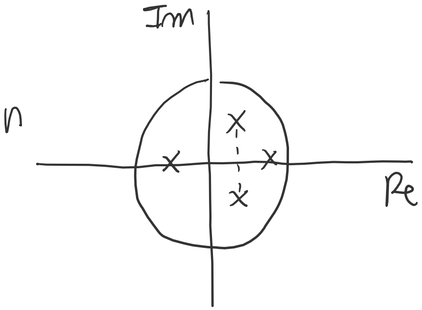
Se $det(A) = 0 \rightarrow A$ non è as. stab. $(\exists \lambda = 0)$

Se $(-1)^n det(A) > 0 \rightarrow$ non posso concludere nulla

Nota: $det(A)$ non è poi così "rapido" da calcolare se n è grande

TEST RAPIDI DI INSTABILITA'

t. discreto



Test di instabilità della traccia

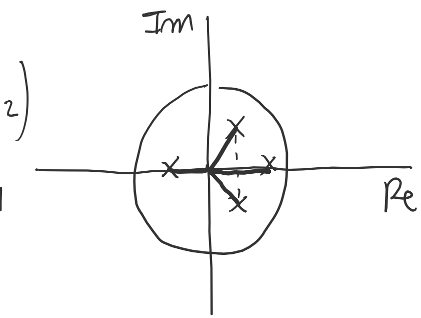
$|tr(A)| > n \longrightarrow A$ (f.) instab.

Se tutti i λ_i sono stabili o critici, $-1 \leq Re(\lambda_i) \leq 1$, risulta $-n \leq tr(A) \leq n$

$|tr(A)| > n \longrightarrow$ qualche $|\lambda_i| > 1$

Se $|tr(A)| = n$ possiamo solo concludere che A non è as. stab.

Se $|tr(A)| < n$ non possiamo concludere nulla



Test di instab. del determinante

$|det(A)| > 1 \longrightarrow A$ (f.) instab.

$|det(A)| = \prod_{i=1}^{n} |\lambda_i|$ (modulo nel caso di λ_i complesso, $\lambda \cdot \bar{\lambda} = |\lambda|^2$)

Se tutti i λ_i sono stabili o critici, $|\lambda_i| \leq 1$
$|\lambda_i| \leq 1$, risulta $|det(A)| \leq 1$

$|det(A)| > 1 \longrightarrow$ qualche $|\lambda_i| > 1$

Se $|det(A)| = 1$, possiamo solo concludere che A non è as. stab.

Se $|det(A)| < 1$, non possiamo concludere nulla

UNA CONDIZIONE NECESSARIA (RAPIDA) DI STABILITA' A T. CONTINUO

$\alpha_i > 0 \ \forall i$ e' cond. necessaria per l'as. stab.

Nota: non è sufficiente. Esempio: $\lambda^3+\lambda^2+\lambda+6 = (\lambda+2)(\lambda^2-\lambda+3)$, $\lambda_1=-2$, $\lambda_{2,3}=\frac{1\pm i\sqrt{11}}{2}$

Nota: se $\exists\, \alpha_i<0 \longrightarrow A$ (f.) instab. (lo abbiamo già visto per $i=n$)
se $\alpha_i \geq 0 \ \forall i$, con qualche $\alpha_i=0$, concludiamo solo che A non è as. stab.
p.e. λ^2+1, $\lambda_{1,2}=\pm i$; $\lambda^3+5\lambda+6=(\lambda+1)(\lambda^2-\lambda+6)$, $\lambda_1=-1$, $\lambda_{2,3}=\frac{1\pm i\sqrt{23}}{2}$

La dimostrazione si basa sul legame tra i coeff. α_i e gli autoval. λ_i (banale nel caso λ_i tutti reali)

$$\Delta_A(\lambda) = (\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)\cdots(\lambda-\lambda_n)$$

$$= \lambda^n \underbrace{-\sum_i \lambda_i}_{\alpha_1>0}\lambda^{n-1} + \underbrace{\sum_{i\neq j}\lambda_i\lambda_j}_{\alpha_2>0}\lambda^{n-2} \underbrace{-\sum_{i\neq j\neq k}\lambda_i\lambda_j\lambda_k}_{\alpha_3>0}\lambda^{n-3} + \cdots + \underbrace{(-1)^n\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n}_{\alpha_n>0}$$

Nota: non è poi così rapido, perchè richiede il calcolo di tutti gli α_i

Nota: se ne può ricavare una versione a t.d. (ancora meno rapida, vedi dopo)

TEST DI ASINTOTICA STABILITA'

Ci sono due criteri necessari e sufficienti a t.c. per l'as. stab., dovuti a Edward Routh (inglese) e Adolf Hurwitz (tedesco). Sono equivalenti, noi vediamo il primo.

Nota: i criteri di Routh-Hurwitz generalizzano quello di Cartesio, che considera solo radici reali.
Si applicano al polinomio $P(\lambda) = \alpha_0 \lambda^n + \alpha_1 \lambda^{n-1} + \dots + \alpha_{n-1} \lambda + \alpha_n$ non necessariamente monico ($\alpha_0 \neq 0$)

Cartesio: il numero di radici reali > 0 di $P(\lambda)$ è al più pari al numero di cambi di segno nella sequenza dei coefficienti $\alpha_i \neq 0$, $i = 0, 1, \dots, n$.

Esempio: i polinomi che rispettano la cond. necessaria per l'as. stab. (α_i stesso segno, $i = 0, 1, \dots, n$) non hanno (per Cartesio) radici reali > 0, ma ne possono avere di complesse con. con $\mathrm{Re}(\lambda_i) > 0$.

$$\lambda^3 + \lambda^2 + \lambda + 6 = (\lambda + 2)(\lambda^2 - \lambda + 3), \; \lambda_1 = -2, \; \lambda_{2,3} = \frac{1 \pm i\sqrt{11}}{2}$$

CRITERIO DI ROUTH

Tabella di Routh: $n+1$ righe, $n+1$ colonne, numerate da 0 a n

	c. 0	c. 1	c. 2	...	c. j	c. j+1	...
r. 0	$\alpha_0 = 1$	α_2	α_4	...			α "pari"
r. 1	α_1	α_3	α_5	...			α "dispari"
⋮							
r. i−2							
r. i−1							
r. i	$r_{i,0}$	$r_{i,1}$	$r_{i,2}$	---	$\boxed{r_{i,j}}$		
⋮							

(oppure 0 se l'indice $> n$
p.e. $\alpha_4 = 0$ se $n = 2$)

$$r_{ij} = -\frac{1}{r_{i-1,0}} \det \begin{bmatrix} r_{i-2,0} & r_{i-2,j+1} \\ r_{i-1,0} & r_{i-1,j+1} \end{bmatrix}$$

Nota: vanno calcolati solo gli elementi che servono per calcolare la prima colonna. Se $r_{i,0} = 0$, ci si ferma, $r_{i+1,0}$ non è definito.

$\mathrm{Re}(\lambda_i) < 0 \ \forall i \iff r_{i,0} \neq 0 \ \forall i$ e tutti dello stesso segno

Inoltre, se $r_{i,0} \neq 0 \ \forall i$, il numero di radici con $\mathrm{Re} > 0$ coincide col numero di cambi di segno nella prima colonna e le restanti radici hanno $\mathrm{Re} < 0$.

Nota: se c'è una radice con $\mathrm{Re} = 0$, allora risulta un elemento $r_{i,0} = 0$ (ma non viceversa)

ROUTH n = 2 : $\Delta_A(\lambda) = \lambda^2 + \alpha_1 \lambda + \alpha_2$

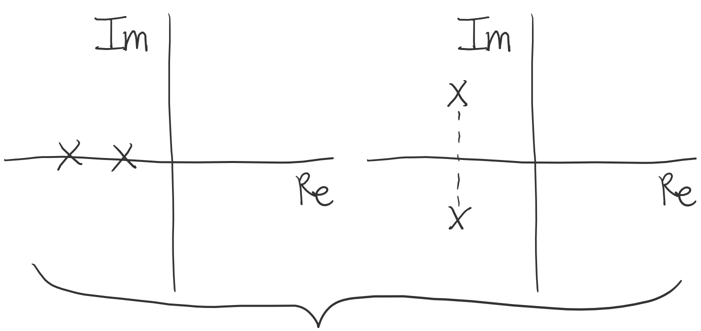
	c.0	c.1	c.2
r.0	1	α_2	0
r.1	α_1	0	
r.2	$r_{2,0}$		

$$r_{2,0} = -\frac{1}{r_{1,0}} \det \begin{bmatrix} r_{00} & r_{01} \\ r_{10} & r_{11} \end{bmatrix} = -\frac{1}{\alpha_1} \det \begin{bmatrix} 1 & \alpha_2 \\ \alpha_1 & 0 \end{bmatrix} = -\frac{1}{\cancel{\alpha_1}} (-\cancel{\alpha_1}\alpha_2) = \alpha_2$$

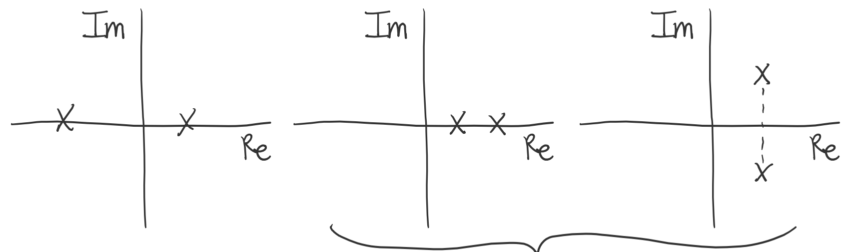
$$A \text{ as.stab} \longleftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 > 0 \\ \alpha_2 > 0 \end{cases} \longleftrightarrow \begin{cases} tr(A) < 0 \\ det(A) > 0 \end{cases}$$

criterio tr-det $n=2$, t.c.

$$tr(A) = \lambda_1 + \lambda_2 \,, \quad \det A = \lambda_1 \lambda_2$$

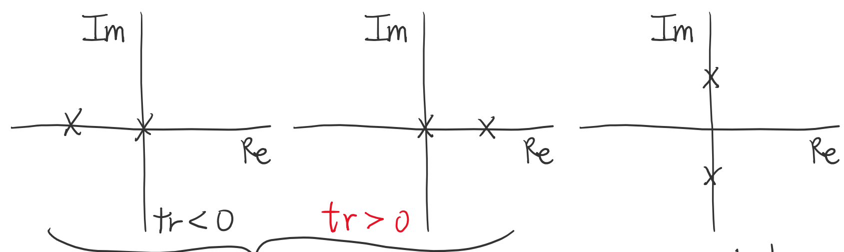


$tr<0$
$det>0$



$tr=?$, $det<0$

$tr>0$, $det>0$



$det=0$

$tr=0$, $det>0$

Nota: la condizione necessaria per l'as.stab. ($\alpha_i > 0 \ \forall i$) è anche sufficiente per $n=2$.

ROUTH n = 3 : $\Delta_A(\lambda) = \lambda^3 + \alpha_1 \lambda^2 + \alpha_2 \lambda + \alpha_3$

	c.0	c.1	c.2	c.3
r.0	1	α_2	0	
r.1	α_1	α_3	0	
r.2	$r_{2,0}$	$r_{2,1}$		
r.3	$r_{3,0}$			

$$r_{2,0} = -\frac{1}{\alpha_1} \det \begin{bmatrix} 1 & \alpha_2 \\ \alpha_1 & \alpha_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{\alpha_1}(\alpha_1\alpha_2 - \alpha_3)$$

$$r_{2,1} = -\frac{1}{\alpha_1} \det \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \alpha_1 & 0 \end{bmatrix} = 0$$

$$r_{3,0} = -\frac{1}{r_{2,0}} \det \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_3 \\ r_{2,0} & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{\cancel{r_{2,0}}} \cancel{r_{2,0}} \alpha_3 = \alpha_3$$

$$A \text{ as. stab} \iff \begin{cases} \alpha_1 > 0 \\ \alpha_2 > \dfrac{\alpha_3}{\alpha_1} \\ \alpha_3 > 0 \end{cases}$$

Nota: la cond. necessaria ($\alpha_i > 0 \ \forall i$) non è sufficiente per $n \geq 3$.

ESEMPIO:

$$\lambda^3 + \lambda^2 + \lambda + 6 = (\lambda + 2)(\lambda^2 - \lambda + 3) \qquad \lambda_1 = -2, \ \lambda_{2,3} = \frac{1 \pm i\sqrt{11}}{2}$$

$$\begin{cases} \alpha_1 = 1 \\ \alpha_3 = 6 \\ \alpha_2 = 1 < \dfrac{\alpha_3}{\alpha_1} = 6 \end{cases} \qquad \begin{cases} \alpha_1 < 0 \\ \alpha_2 > 0 \end{cases}$$

CRITERIO "DI ROUTH" A T. DISCRETO

Ci interessa un test che sia soddisfatto se e solo se il polinomio

$\Delta_A(z) = z^n + \alpha_1 z^{n-1} + \dots + \alpha_{n-1} z + \alpha_n$ ha radici z_i tutte con $|z_i|<1$

Idea: applicare una trasformazione $z = f(s)$ invertibile, che metta in corrispondenza le radici z_i con $|z_i| \lesseqgtr 1$ di $\Delta_A(z)$ con le radici s_i con $Re(s_i) \lesseqgtr 0$ di un polinomio $P(s)$, a cui applicare il criterio a t.c.

La trasformazione: $z = \dfrac{s+1}{s-1}$, con inversa $s = \dfrac{z+1}{z-1}$

Applicandola, si ottiene

$$\Delta_A\left(\frac{s+1}{s-1}\right) = \left(\frac{s+1}{s-1}\right)^n + \alpha_1\left(\frac{s+1}{s-1}\right)^{n-1} + \dots + \alpha_n = \frac{1}{(s-1)^n}\left[(s+1)^n + \alpha_1 (s+1)^{n-1}(s-1) + \dots + \alpha_n (s-1)^n\right]$$

$$\hookrightarrow = \frac{P(s)}{(s-1)^n}, \text{ con } P(s) = \underbrace{(1+\alpha_1+\dots+\alpha_n)}_{\alpha_0^P} s^n + \underbrace{(\dots)}_{\alpha_1^P} s^{n-1} + \dots + \underbrace{(\dots)}_{\alpha_{n-1}^P} s + \underbrace{(1-\alpha_1+\alpha_2+\dots)}_{\alpha_n^P}$$

Se s_i radice di $P(s)$ (nota: $s=1$ non è radice), allora $z_i = \dfrac{s_i+1}{s_i-1}$ è radice di $\Delta_A(z)$.

Se $z_i \neq 1$ è radice di $\Delta_A(z)$, allora $s_i = \dfrac{z_i+1}{z_i-1}$ è radice di $P(s)$. Nota: se $z=1$ è radice di $\Delta_A(z)$, $P(s)$ risulta di grado $<n$

Inoltre $|z_i| \lesseqgtr 1 \longleftrightarrow Re(s_i) \lesseqgtr 0$

$$|z_i|^2 = \frac{|s_i+1|^2}{|s_i-1|^2} = \frac{|Re(s_i)+1+i\,Im(s_i)|^2}{|Re(s_i)-1+i\,Im(s_i)|^2} = \frac{(Re(s_i)+1)^2 + Im(s_i)^2}{(Re(s_i)-1)^2 + Im(s_i)^2}$$

LA CONDIZIONE NECESSARIA (RAPIDA) DI STABILITA' A T. DISCRETO

Si ottiene applicando la versione a t.c. al polinomio $P(s)$ (attenzione: non è monico)

α_i^{P} tutti dello stesso segno, $i=0,1,\dots,n$ è cond. necessaria per l'as. stab.

(equivalentemente: $\dfrac{\alpha_i^{P}}{\alpha_0^{P}} > 0$, $i=1,\dots,n$)

Nota: per $n=2$ è anche sufficiente, vediamola in dettaglio...

CRITERIO "DI ROUTH" A T. DISCRETO: studiamo il caso $n=2$ per ottenere un criterio tr-det.

$$\Delta_A(z) = z^2 + \alpha_1 z + \alpha_2 \quad , \quad \alpha_1 = -\mathrm{tr}(A) \ , \ \alpha_2 = \det(A) \qquad \left(z = \frac{s+1}{s-1} \right)$$

$$P(s) = (s+1)^2 + \alpha_1 (s+1)(s-1) + \alpha_2 (s-1)^2 = \underbrace{(1+\alpha_1+\alpha_2)}_{\alpha_0^P = 1-\mathrm{tr}+\det} s^2 + \underbrace{2(1-\alpha_2)}_{\alpha_1^P = 2(1-\det)} s + \underbrace{1-\alpha_1+\alpha_2}_{\alpha_2^P = 1+\mathrm{tr}+\det}$$

$$A \text{ as. stab.} \longleftrightarrow \begin{cases} \alpha_1^P / \alpha_0^P > 0 \\ \alpha_2^P / \alpha_0^P > 0 \end{cases} \longleftrightarrow \alpha_0^P, \alpha_1^P, \alpha_2^P \text{ con stesso segno}$$

$$\alpha_0^P = 1-\mathrm{tr}+\det > 0 \quad \begin{cases} \alpha_1^P = 2(1-\det) > 0 \\ \alpha_2^P = 1+\mathrm{tr}+\det > 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \det < 1 \\ 1+\det > -\mathrm{tr} \end{cases} \longrightarrow \boxed{\begin{cases} \det < 1 \\ 1+\det > |\mathrm{tr}| \end{cases}}$$
$$(1+\det > \mathrm{tr})$$

$$\alpha_0^P = 1-\mathrm{tr}+\det < 0 \quad \begin{cases} \alpha_1^P = 2(1-\det) < 0 \\ \alpha_2^P = 1+\mathrm{tr}+\det < 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \det > 1 \\ 1+\det < -\mathrm{tr} \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \det > 1 \\ 1+\det < -|\mathrm{tr}| \end{cases}$$
$$(1+\det < \mathrm{tr})$$

impossibile