STABILITA'

È una proprietà del sistema (del solo movimento libero) che studia la "memoria" che il sistema ha dello stato iniziale, sui tempi lunghi, ovvero studia il comportamento asintotico del movimento libero

$$\lim_{t\to+\infty} \phi(t)\,x(0) \qquad \left[\ \phi(t)\,x(0) \xrightarrow[t\to+\infty]{} \ ?\ \right]$$

Nota: la stabilità dipende solo dalla matrice A del sistema.

4 CLASSI DI STABILITA'

1) Sistemi asintoticamente stabili: dimenticano (asintoticamente) $x(0)$

$$\phi(t)\,x(0) \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0 \quad \forall x(0)$$

equivalentemente: $\phi_{ij}(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0 \quad \forall (i,j)$

2) Sistemi semplicemente stabili: mantengono la memoria di alcuni $x(0)$

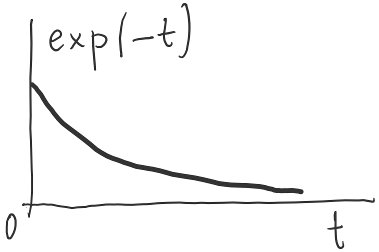
$\phi(t)\,x(0)$ è limitato $\forall x(0)$, ma $\exists\, x(0) : \phi(t)\,x(0) \underset{t\to+\infty}{\not\to} 0$

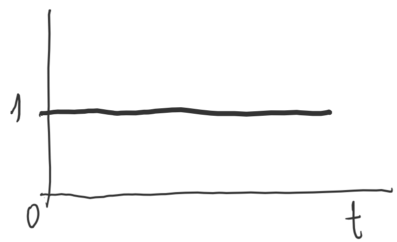
equivalentemente: $\phi_{ij}(t)$ limitato $\forall (i,j)$, ma $\exists\,(i,j) : \phi_{ij}(t) \underset{t\to+\infty}{\not\to} 0$

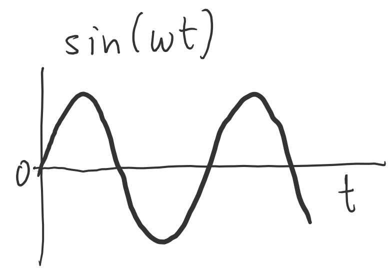
SEGNALI LIMITATI E ILLIMITATI

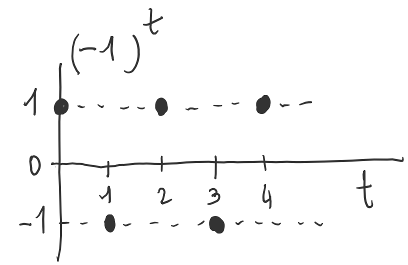
Un segnale $y(t)$ (definito per $t \geq 0$) è <u>limitato</u> se $\exists$ una costante Y:
$|y(t)| < Y \;\; \forall t \geq 0$ (è confinato nella fascia $\pm Y$).
È illimitato altrimenti

Esempi di segnali limitati tipici del movimento libero

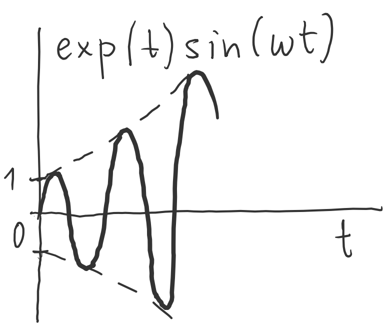


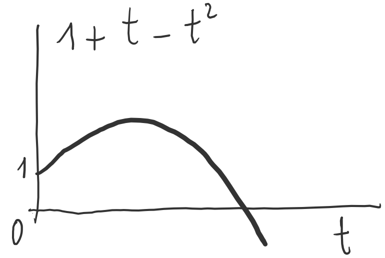


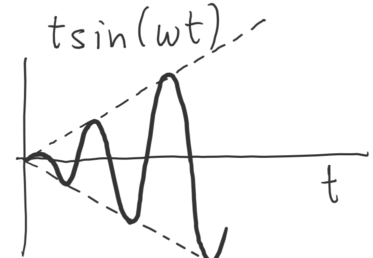


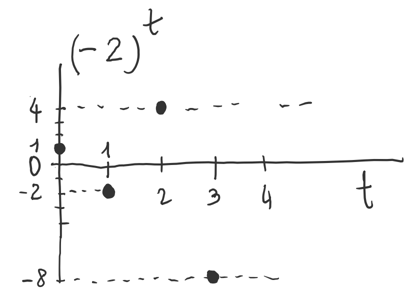


Esempi di segnali illimitati tipici del movimento libero









Nota: in entrambi i casi, il lim per $t \to +\infty$ può non essere definito.

4 CLASSI DI STABILITA'

1) Sistemi asintoticamente stabili : dimenticano (asintoticamente) $x(0)$

$\phi(t)x(0) \to 0 \quad \forall x(0)$

equivalentemente: $\phi_{ij}(t) \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0 \quad \forall (i,j)$

2) Sistemi semplicemente stabili : mantengono la memoria di alcuni $x(0)$

$\phi(t)x(0)$ è limitato $\forall x(0)$, ma $\exists x(0) : \phi(t)x(0) \underset{t \to +\infty}{\not\to} 0$

equivalentemente: $\phi_{ij}(t)$ limitato $\forall (i,j)$, ma $\exists (i,j) : \phi_{ij}(t) \underset{t \to +\infty}{\not\to} 0$

3, 4) Sistemi instabili : amplificano la memoria di alcuni $x(0)$

$\phi(t)x(0)$ è illimitato per qualche $x(0)$

equivalentemente: $\exists (i,j) : \phi_{ij}(t)$ è illimitato

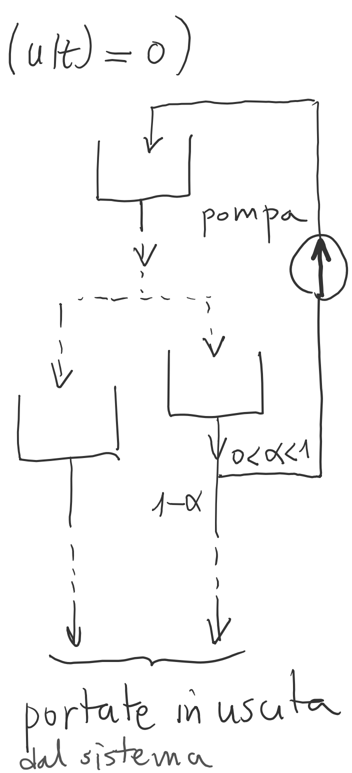
3) debolmente instabili

tutti i $\phi_{ij}(t)$ illimitati lo sono con legge polinomiale in t

4) (fortemente/esponenzialmente) instabili

$\exists (i,j) : \phi_{ij}(t)$ è illimitato con legge esponenziale a t.c. (geometrica a t.d.) in t

ESEMPIO: Rete di serbatoi



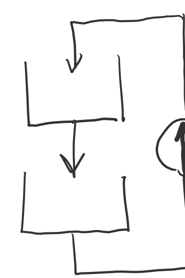
Se da ogni serbatoio c'è un percorso che porta almeno parte della portata scaricata fuori dal sistema idrico

$\longrightarrow$ sistema as. stab.

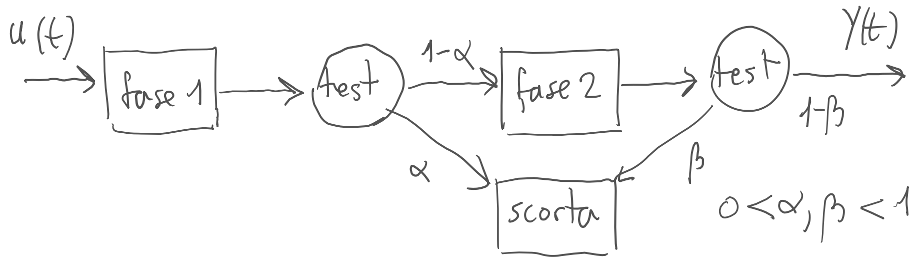
Fintanto che c'è acqua in qualche serbatoio, una portata proporzionale lascia il sistema, quindi tutti i serbatoi, asintoticamente si svuotano.

Se tale percorso manca per qualche serbatoio

$\longrightarrow$ sistema s. stab.

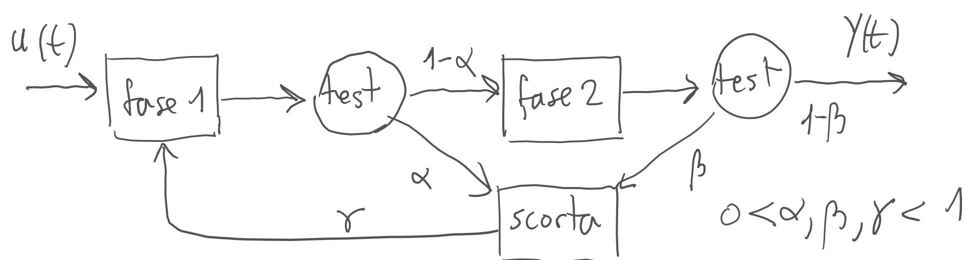


ESEMPIO: PROCESSO DI PRODUZIONE

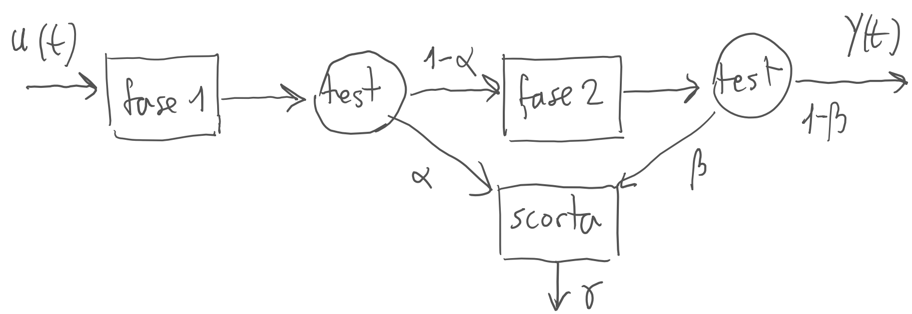


$\longrightarrow$ semp. stab.

Se da ogni parte del processo (fase di lavorazione, scorta, etc) c'è un percorso che porta del materiale fuori dall'impianto, allora il processo è as. stab.
Altrimenti è semp. stab.



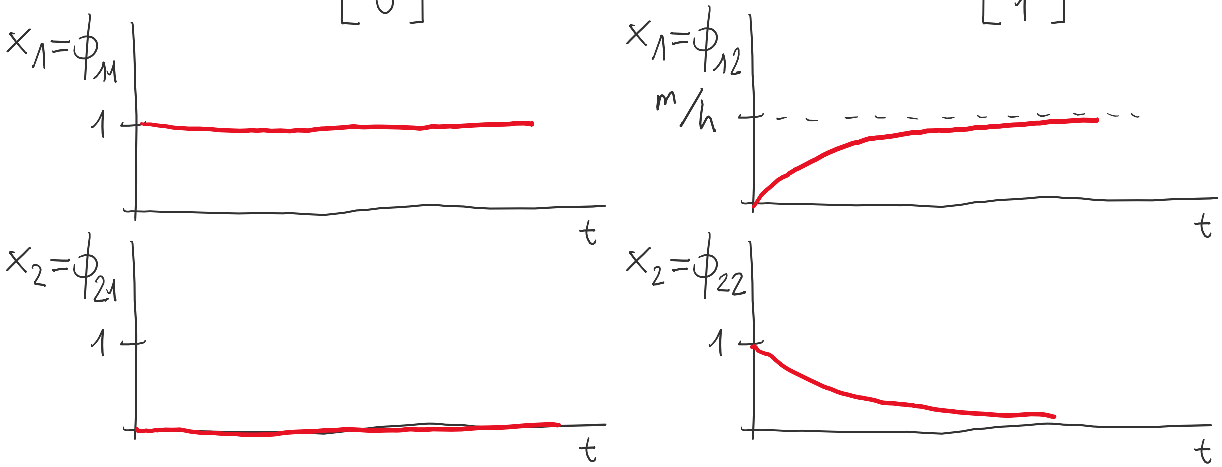
$\longrightarrow$ as. stab.



ESEMPIO: Newton

Con attrito, $h > 0$

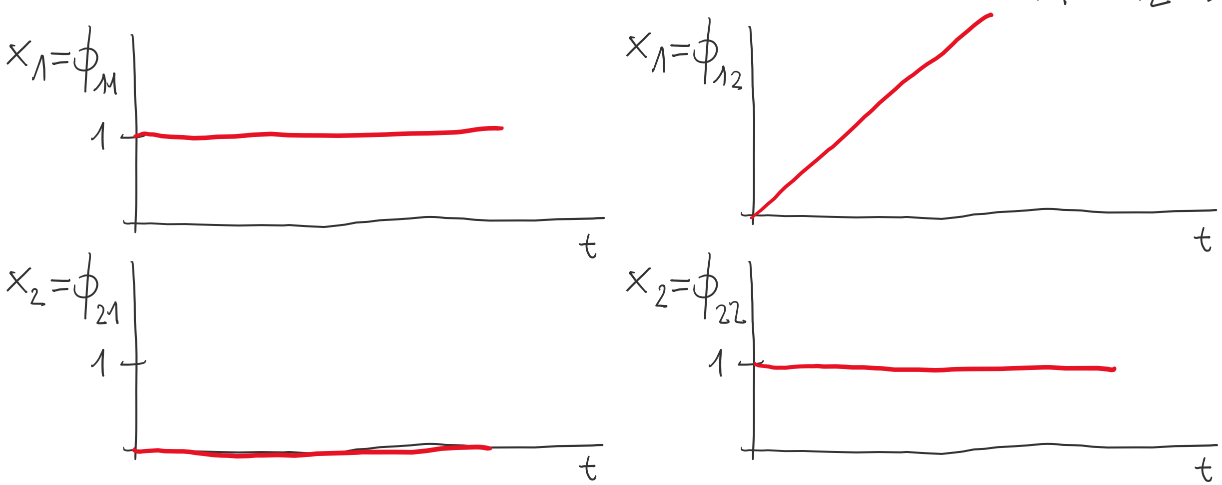
$x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ $x(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$



→ s. stab.

Senza attrito, $h = 0$

$\dot{x}_1 = x_2 \rightarrow x_1(t) = \underbrace{x_1(0)}_{0} + \int_0^t \underbrace{x_2(0)}_{1} \, d\tau = t$



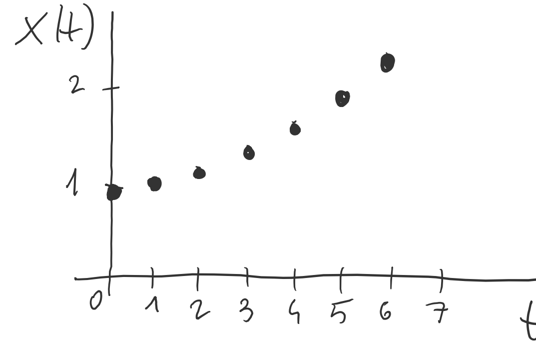
→ d. instab.

ESEMPIO: il conto corrente è (f.) instab.

$u(t) = 0$: nessun prelievo o deposito

$0 < \rho < 1$: tasso d'interesse giornaliero

$$x(t+1) = \underbrace{(1+\rho)}_{>1} x(t) \longrightarrow x(t) = (1+\rho)^t x(0)$$



ESEMPIO: anche Fibonacci è (f.) instab. $\left(\lambda = \frac{1+\sqrt{5}}{2} > 1 \right)$

ESEMPIO: crescita di una popolazione (o biomassa)

$x(t)$: densità di popolazione (biomassa)

b : tasso di natalità (produzione) pro-capite (per-unità)

d : tasso di mortalità (degradazione) pro-capite (per-unità)

$$\dot{x} = bx - dx = \underbrace{(b-d)}_{r} x \longrightarrow x(t) = x(0)\exp(rt) \quad r > 0 \longrightarrow \text{sist. (f.) instab.}$$

r : tasso di crescita pro-capite (per unità)

Nota: x non può crescere illimitata. Effetti di competizione sono descritti da un termine non lineare $-cx^2$ che limita la crescita (vedi modello logistico)

LEGAME TRA STABILITA' E MATRICE A

Il caso semplicissimo dei sistemi del I ordine

t.c. $\dot{x} = ax \longrightarrow x(t) = e^{at} x(0)$

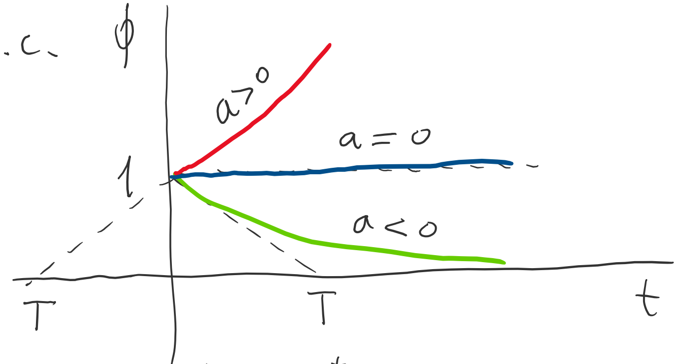
t.d. $x(t+1) = ax(t) \longrightarrow x(t) = a^{t} x(0)$

$\phi(t)$ < e^{at} esponenziale / a^{t} geometrica

$A = a$, matrice 1×1 = suo autovalore

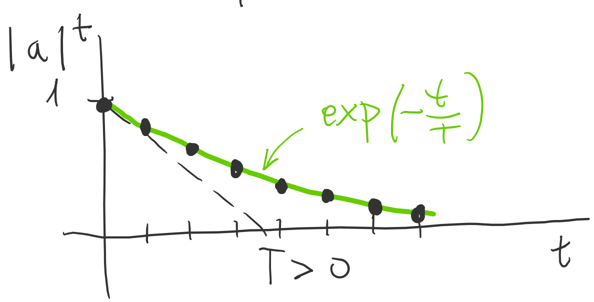
LEGAME TRA STABILITA' E MATRICE A

t.c.



$$\phi(t) = e^{at} = e^{-\frac{t}{T}}, \quad T = -\frac{1}{a}$$

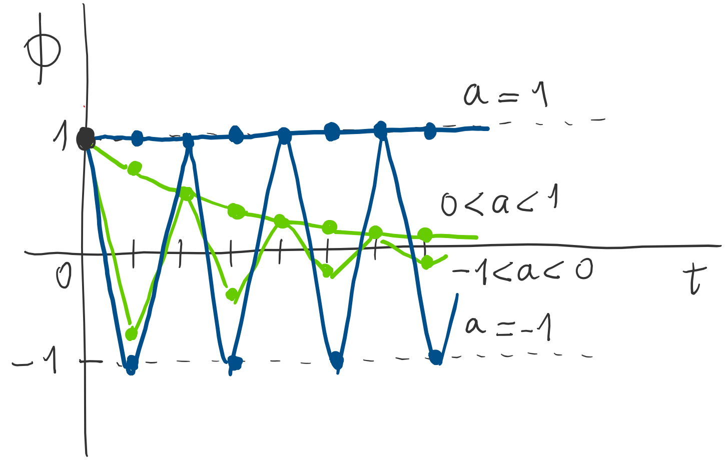
Costante di tempo a t.d.
è quella dell'esponenziale che interpola a^t

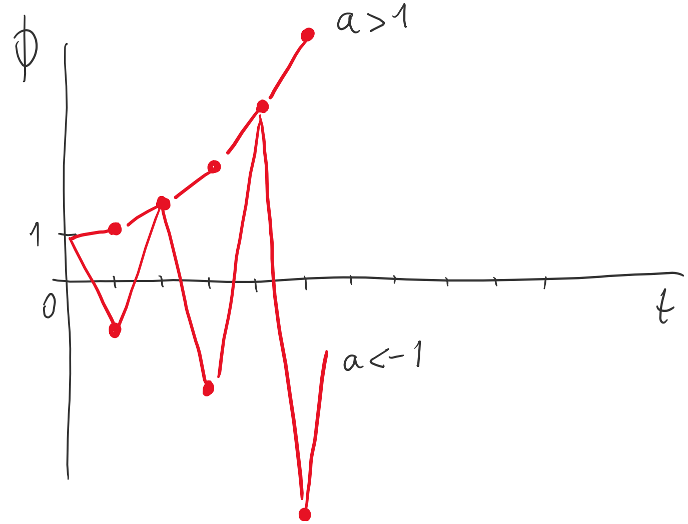


$$|a|^t = \exp\left(-\frac{t}{T}\right)$$

$$\log|a|^t = -\frac{t}{T} \rightarrow T = -\frac{1}{\log|a|}$$

t.d.





$$\phi(t) = a^t$$

LEGAME TRA STABILITA' E MATRICE A

Il caso semplicissimo dei sistemi del I ordine

t.c. $\dot{x} = ax \longrightarrow x(t) = e^{at} x(0)$

t.d. $x(t+1) = ax(t) \longrightarrow x(t) = a^{t} x(0)$

$\phi(t) \begin{cases} e^{at} & \text{esponenziale} \\ a^{t} & \text{geometrica} \end{cases}$

$A = a$, matrice 1×1 = suo autovalore

t.c.

$a \begin{cases} < 0 & \text{as. stab} \\ = 0 & \text{s. stab} \\ > 0 & \text{(f.) instab.} \end{cases}$

t.d.

$|a| \begin{cases} < 1 & \text{as. stab.} \\ = 1 & \text{s. stab.} \\ > 1 & \text{(f.) instab.} \end{cases}$

Nota: i sistemi del I ordine non possono essere d. instabili

LEGAME TRA STABILITA' E MATRICE A : sistemi di ordine $n>1$

Oss: la stabilità non dipende dalla scelta delle variabili di stato.
Quali sono le variabili di stato $z = Tx$ più comode per studiare la stabilità?

Cambio di variabili: $pz = TAT^{-1}z$ (mov. libero)

Idea (caso semplice): se TAT^{-1} risulta diagonale, il sistema "visto" dalle variabili z è scomposto in n sistemi del I ordine!

$$pz = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix} \rightarrow pz_i = \lambda_i z_i \quad \begin{cases} z_i(t) = e^{\lambda_i t} z_i(0) & \text{t.c.} \\ z_i(t) = \lambda_i^t z_i(0) & \text{t.d.} \end{cases}$$

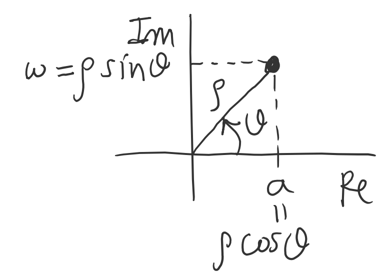
(λ_i autoval. di A)

Attenzione: $(\lambda_i, \lambda_{i+1})$ possono essere complessi coniugati $\lambda_i, \lambda_{i+1} = \begin{cases} a \pm i\omega \\ \rho e^{\pm i\vartheta} = \rho(\cos\vartheta \pm i \sin\vartheta) \end{cases}$

Le soluzioni $z_i(t)$ e $z_{i+1}(t)$ sono anch'esse comp. con.

$e^{(a\pm i\omega)t} = e^{at} \cdot e^{\pm i\omega t} = e^{at}\left(\cos(\omega t) \pm i \sin(\omega t)\right)$, $\quad \omega = \mathrm{Im}(\lambda_i)$: pulsazione $= 2\pi \cdot$ freq. sinusoidi

$(\rho e^{\pm i\vartheta})^t = \rho^t \cdot e^{\pm i\vartheta t} = \rho^t\left(\cos(\vartheta t) \pm i \sin(\vartheta t)\right)$, $\quad \vartheta = \arg(\lambda_i)$: angolo di rotazione sinusoidi



$\rightarrow$ per la stabilità conta $\mathrm{Re}(\lambda_i)$ a t.c. e $|\lambda_i|$ a t.d.

LEGAME TRA STABILITA' E MATRICE A

Criterio di stabilità nel caso semplice $\left(A \text{ diagonalizzabile}, \; z_i(t) = \begin{cases} e^{\lambda_i t} z_i(0) \\ \lambda_i^t \, z_i(0) \end{cases} \right)$

Il sistema (la matrice A) è

$$\text{as. stab.} \longleftrightarrow \begin{cases} \mathrm{Re}(\lambda_i) < 0, & \text{t.c.} \\ |\lambda_i| < 1, & \text{t.d.} \end{cases} \quad \forall i = 1, \dots, n$$

$$\text{s. stab.} \longleftrightarrow \begin{cases} \mathrm{Re}(\lambda_i) \leq 0 \\ |\lambda_i| \leq 1 \end{cases} \forall i, \; \exists i^* : \begin{cases} \mathrm{Re}(\lambda_{i^*}) = 0 \\ |\lambda_{i^*}| = 1 \end{cases}$$

$$\text{(f.) instab.} \longleftrightarrow \exists i^* : \begin{cases} \mathrm{Re}(\lambda_{i^*}) > 0 \\ |\lambda_{i^*}| > 1 \end{cases}$$

Nota: tornando alle var. originali $x = T^{-1} z$ si ottengono soluzioni reali (le eventuali parti immaginarie si semplificano o si moltiplicano per le "i" in T^{-1})

Nota: anche in questo caso il sistema non può essere d. instab.

Notazione: diciamo che λ_i è "stabile"/"instabile" se $\begin{cases} \mathrm{Re}(\lambda_i) \lessgtr 0 & \text{t.c.} \\ |\lambda_i| \lessgtr 1 & \text{t.d.} \end{cases}$, "critico" se "="

RIPASSO: QUANDO A E' DIAGONALIZZABILE? COME SI FA?

Si usano gli autovettori di A come nuovi assi: $T^{-1} = [\underbrace{|\,|\,|\cdots|}_{\text{autovettori di } A}]$

$\rightarrow$ A diagonalizzabile $\longleftrightarrow$ ce ne sono n (indipendenti)

Calcolo degli autovettori associati a λ_i: ci sono $m_{g,i}$ soluzioni indipendenti

$A v^{(i)} = \lambda_i v^{(i)}$, $(\lambda_i I - A) v^{(i)} = 0$, $m_{g,i} = n - \text{rango}(\lambda_i I - A)$

$\hookrightarrow$ molteplicità geometrica di λ_i

Risulta $m_{g,i} \geq 1$ e $m_{g,i} \leq m_{a,i}$ dove $m_{a,i}$ è la molteplicità algebrica di λ_i

$\Delta_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{m_{a,1}} \cdots (\lambda - \lambda_{n_d})^{m_{a,n_d}}$, n_d: numero autoval. distinti, $\sum_{i=1}^{n_d} m_{a,i} = n$

$\rightarrow$ A diagonalizzabile $\longleftrightarrow$ $m_{g,i} = m_{a,i}$ (λ_i regolare) $\forall i$

Caso particolare: A è diagonalizzabile se $m_{a,i} = 1 \ \forall i$
(tutti i λ_i sono radici semplici di $\Delta_A(\lambda)$) ovvero se λ_i sono tutti distinti ($n_d = n$)

In pratica: solo per i λ_i radici multiple, si deve controllare se $m_{g,i} = m_{a,i}$

ESEMPIO: Newton

Con attrito, $h > 0$

$$A = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{h}{m} \end{vmatrix} \quad \lambda_1 = 0, \ \lambda_2 = -\frac{h}{m} \text{ semplici} \rightarrow \text{criterio caso semplice} \rightarrow \text{s. stab.}$$

Senza attrito, $h = 0$

$$A = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \quad \lambda_1 = 0, \ m_{a,1} = 2, \quad \lambda_1 I - A = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad m_{g,1} = 2 - \underbrace{\text{rango}(\lambda_1 I - A)}_{1} = 1$$

→ A non diagonalizzabile

→ Non possiamo usare il criterio di stab. semplice, ma sappiamo che il sistema è d. instab.

Intuitivamente: la mancanza di autovett. ass. ad un λ_i "critico" è responsabile della divergenza polinomiale del movimento libero

IL CASO GENERALE CON A NON DIAGONALIZZABILE (LA FORMA CANONICA DI JORDAN)

Supponiamo λ_i multiplo ($m_{a,i} > 1$) e non regolare ($m_{g,i} < m_{a,i}$)

$m_{g,i}$ autovettori: $v^{(i,1)}, \dots, v^{(i,m_{g,i})}$

Mancano $m_{a,i} - m_{g,i}$ vettori per completare il cambio di variabili.

Idea: sceglierli in modo da ottenere TAT^{-1} il più "vicino" possibile alla forma diagonale

Risultato: a partire da ciascun autovett. $v^{(i,j)}$, $j = 1, \dots, m_{g,i}$ si genera una sequenza di autovett. generalizzati, $w^{(i,j,1)}, w^{(i,j,2)}, \dots$ (non sono autovettori!). In totale se ne ottengono (indipendenti tra loro e da tutti gli autovett.) proprio $m_{a,i} - m_{g,i}$

si compone il cambio di variabili nel seguente modo:

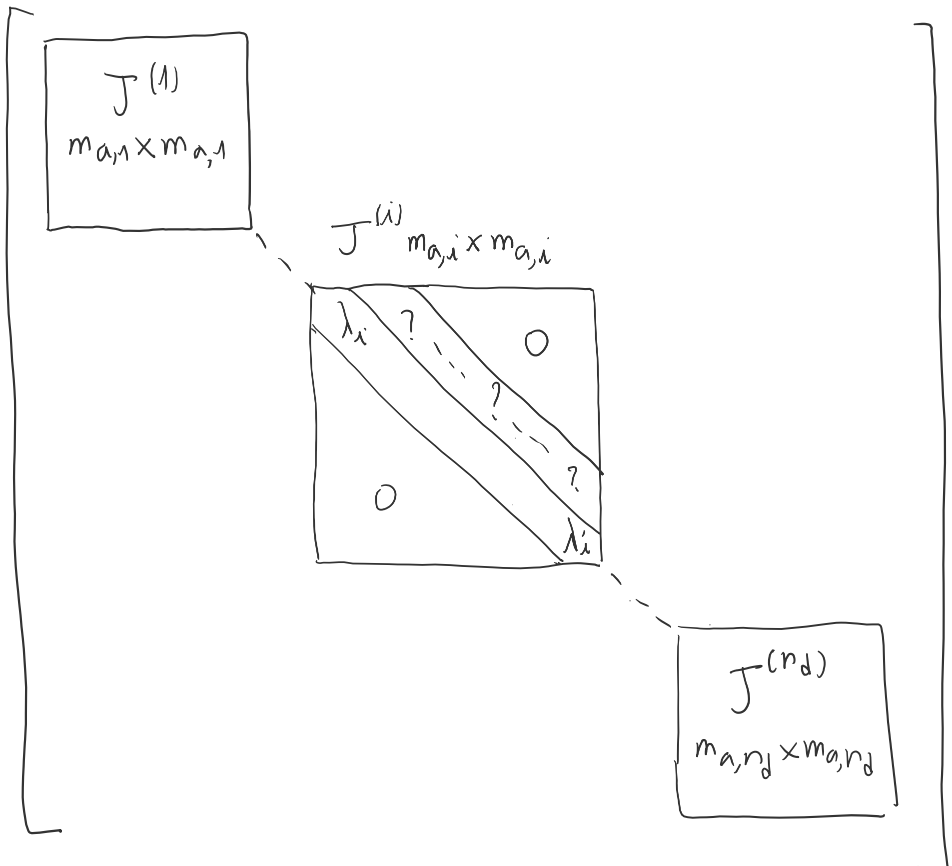
$$T^{-1} = \Bigg[\underbrace{\;\cdots\;}_{\substack{\text{autovett. (eventualmente gen.)}\\ \text{ass. a } \lambda_1, \dots, \lambda_{i-1}}} \Big| \overbrace{v^{(i,1)} \Big| w^{(i,1,1)} \Big| w^{(i,1,2)} \Big| \cdots \Big| v^{(i,2)} \Big| w^{(i,2,1)} \Big| w^{(i,2,2)} \Big| \cdots \Big| \cdots}^{m_{a,i} \text{ vettori ass. a } \lambda_i} \Big| \underbrace{\;\cdots\;}_{\substack{\text{autovett. (eventualmente gen.)}\\ \text{ass. a } \lambda_{i+1}, \dots, \lambda_{n_d}}} \Bigg]$$

Si ottiene TAT^{-1} triangolare (superiore) e diagonale a blocchi, con blocchi $J^{(i)}$ ($m_{a,i} \times m_{a,i}$)

IL CASO GENERALE CON A NON DIAGONALIZZABILE (LA FORMA CANONICA DI JORDAN)

Blocchi di Jordan

$TAT^{-1} =$



IL CASO GENERALE CON A NON DIAGONALIZZABILE (LA FORMA CANONICA DI JORDAN)

$$T^{-1} = \left[\cdots \,\middle|\, v^{(i,1)} \; w^{(i,1,1)} \; w^{(i,1,2)} \; v^{(i,2)} \; w^{(i,2,1)} \; \cdots \,\middle|\, \cdots \right]$$

$$J^{(i)} = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & & & & \\ & \lambda_i & 1 & & & \\ & & \lambda_i & 0 & & \\ & & & \lambda_i & 1 & \\ & & & & \lambda_i & \ddots \\ & & & & & \ddots \end{bmatrix}$$

C'è l'elemento "1" sulla sovradiag. se nella corrispondente colonna di T^{-1} c'è un autovett. generalizzato.

Ad una sequenza di autovett. gen. ottenuta dall'autovett. $v^{(i,j)}$ corrisponde una "catena" di "1" di pari lunghezza sulla sovra-diag.

Qual'è la conseguenza sulla stabilità del sistema?

IL CASO GENERALE CON A NON DIAGONALIZZABILE (LA FORMA CANONICA DI JORDAN)

$$T^{-1} = \left[\; \cdots \;\middle|\; \boxed{v^{(i,1)} \;\; w^{(i,1,1)} \;\; w^{(i,1,2)}} \;\; v^{(i,2)} \;\; w^{(i,2,1)} \;\; \cdots \;\middle|\; \cdots \; \right]$$

minoblocco di Jordan

riga q di TAT^{-1}

$$\begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} \lambda_i & 1 & \\ & \lambda_i & 1 \\ & & \lambda_i \end{matrix}} & \begin{matrix} \\ \\ 0 \end{matrix} & \\ & \begin{matrix} \lambda_i & 1 & \\ & \lambda_i & \ddots \\ & & \ddots \end{matrix} \end{bmatrix}$$

Le var. z_q, z_{q-1}, ... relative ad un miniblocco, costituiscono un sotto-sistema isolato

$$p \underbrace{\begin{bmatrix} \\ \hline \\ \hline \\ \end{bmatrix}}_{z} = \underbrace{\begin{bmatrix} & 0 & \\ 0 & \boxed{\;\;} & 0 \\ & 0 & \end{bmatrix}}_{TAT^{-1}} \underbrace{\begin{bmatrix} \vdots \\ \hline z_q \\ \hline \\ \end{bmatrix}}_{z} \leftarrow q$$

→ possiamo studiare il mov. libero del singolo miniblocco (sono tutti sistemi del I ordine se λ_i è regolare)

IL CASO GENERALE CON A NON DIAGONALIZZABILE (LA FORMA CANONICA DI JORDAN)

Calcoliamo il mov. libero del miniblocco, facciamolo a t.c.

$$\begin{vmatrix} \vdots \\ \dot{z}_{q-1} \\ \dot{z}_q \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \\ 0 \cdots\cdots \lambda_i \; 1 \\ 0 \cdots\cdots 0 \; \lambda_i \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \vdots \\ z_{q-1} \\ z_q \end{vmatrix}$$

L'ultima variabile è sempre lo stato di un sotto-sist. del I ordine

$$\dot{z}_q = \lambda_i z_q \longrightarrow z_q(t) = e^{\lambda_i t} z_q(0)$$

La soluzione si sostituisce nell'eq. di z_{q-1}, che può essere risolta con la formula di L. per sistemi del I ordine con ingresso $z_q(t)$.

$$\dot{z}_{q-1} = \lambda_i z_{q-1} + z_q \longrightarrow z_{q-1}(t) = e^{\lambda_i t} z_{q-1}(0) + \int_0^t e^{\lambda_i (t-\tau)} z_q(\tau)\, d\tau$$

$$\int_0^t \cdots = e^{\lambda_i t} \int_0^t \underbrace{e^{-\lambda_i \tau} \cdot e^{\lambda_i \tau}}_{1} z_q(0)\, d\tau = e^{\lambda_i t} z_q(0)\, t$$

$$\longrightarrow z_{q-1}(t) = e^{\lambda_i t} \left(z_{q-1}(0) + z_q(0)\, t \right)$$

IL CASO GENERALE CON A NON DIAGONALIZZABILE (LA FORMA CANONICA DI JORDAN)

Analogamente, sostituendo $z_{q-1}(t)$ nell'equazione per z_{q-2}, si ottiene

$$\dot{z}_{q-2} = \lambda_i z_{q-2} + z_{q-1} \longrightarrow z_{q-2}(t) = e^{\lambda_i t} z_{q-2}(0) + \int_0^t e^{\lambda_i (t-\tau)} z_{q-1}(\tau)\, d\tau$$

$$\int_0^t \cdots = e^{\lambda_i t} \int_0^t \underbrace{e^{-\lambda_i \tau} e^{\lambda_i \tau}}_{1} \left(z_{q-1}(0) + z_q(0)\, t \right) d\tau = e^{\lambda_i t} \left(z_{q-1}(0)\, t + z_q(0) \frac{t^2}{2} \right)$$

$$\rightarrow z_{q-2}(t) = e^{\lambda_i t} \left(z_{q-2}(0) + z_{q-1}(0)\, t + z_q(0) \frac{t^2}{2} \right)$$

Conclusione: l'andamento esponenziale viene moltiplicato per un polinomio in t. Il grado massimo compare nella prima var. del miniblocco ed è pari alla lunghezza della "catena di 1" (pari al numero di autovett. generalizzati coinvolti).

Nota: un risultato analogo vale a t. d.

$$\rightarrow z_q(t) = \lambda_i^t z_q(0)$$

$$\rightarrow z_{q-1}(t) = \lambda_i^t z_{q-1}(0) + \lambda_i^{t-1}\, t\, z_q(0)$$

$$\rightarrow z_{q-2}(t) = \lambda_i^t z_{q-2}(0) + \lambda_i^{t-1}\, t\, z_{q-1}(0) + \lambda_i^{t-2} \frac{t(t-1)}{2} z_q(0)$$

IL CASO GENERALE CON A NON DIAGONALIZZABILE (LA FORMA CANONICA DI JORDAN)

Riassumendo: nel movimento libero delle variabili z compaiono i seguenti segnali caratteristici, detti <u>modi</u> dell'autovalore λ_i

t.c. $\underbrace{e^{\mathrm{Re}(\lambda_i)t}}_{\text{esp./s.geom reale}} \underbrace{\left(\cos(\mathrm{Im}(\lambda_i)t) + i\sin(\mathrm{Im}(\lambda_i)t)\right)}_{\text{sinusoidi di pulsazione } \mathrm{Im}(\lambda_i) / \text{ angolo rot. } \arg(\lambda_i)} \underbrace{\frac{t^{k-1}}{(k-1)!}}_{\text{polinomi in } t \text{ di grado } k-1}$

t.d. $|\lambda_i|^{t-k+1}\left(\cos(\arg(\lambda_i)(t-k+1)) + i\sin(\arg(\lambda_i)(t-k+1))\right)\frac{t(t-1)\cdots(t-k+2)}{(k-1)!}, \; t \geq k-1$

$k = 1, 2, \ldots,$ dimensione dei miniblocchi di $J^{(i)}$ ($k=1$ se λ_i regolare)

($k-1$ = lunghezza della più lunga catena di "1")

Nota: le variabili $x = T^{-1}z$ sono reali e sono combinazioni lineari dei modi, con coefficienti che dipendono dalle righe di T^{-1} (quindi dagli autovettori di A) e dalla cond. iniziale $x(0)$ (che determina $z(0) = Tx(0)$).

Nota: per la stabilità, i polinomi in t sono determinanti solo se λ_i è "critico". Inoltre non interessa il grado del polinomio, ma solo sapere se zero o ≥ 1

LEGAME TRA STABILITA' E MATRICE A

Criterio di stabilità (caso generale; A qualsiasi)

Il sistema (la matrice A) è

as. stab. $\longleftrightarrow \begin{cases} Re(\lambda_i) < 0 \ , \text{ t.c.} \\ |\lambda_i| < 1 \ , \text{ t.d.} \end{cases} \quad \forall i = 1, \dots, n$

s. stab. $\longleftrightarrow \begin{cases} Re(\lambda_i) \leq 0 \\ |\lambda_i| \leq 1 \end{cases} \quad \forall i, \ \exists i^*: \lambda_{i^*}$ critico, tutti i λ_{i^*} critici sono regolari

d. instab $\longleftrightarrow \begin{cases} Re(\lambda_i) \leq 0 \\ |\lambda_i| \leq 1 \end{cases} \quad \forall i, \ \exists i^*: \lambda_{i^*}$ critico e non regolare

(f.) instab. $\longleftrightarrow \exists i^*: \begin{cases} Re(\lambda_{i^*}) > 0 \\ |\lambda_{i^*}| > 1 \end{cases}$

ESEMPI:

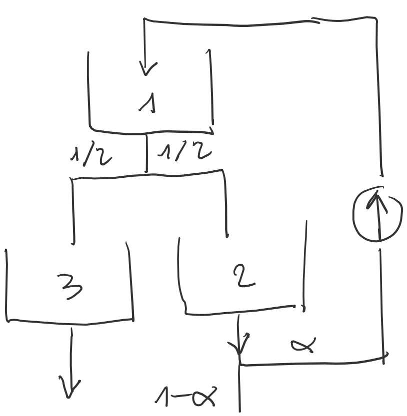
Newton senza attrito, $h = 0$

$$A = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \quad \lambda_1 = 0,\ m_{a,1} = 2, \quad \lambda_1 I - A = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad m_{g,1} = 2 - \underbrace{\text{rango}(\lambda_1 I - A)}_{1} = 1$$

$\rightarrow$ λ_1 non è regolare $\rightarrow$ di instab.

Fibonacci: $\lambda_{1,2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$, $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} > 1$ $\left(-1 < \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} < 0 \right)$ $\rightarrow$ (f.) instab.

Serbatoi:



$$A = \left[\begin{array}{cc|c} -k_1 & \alpha k_2 & 0 \\ k_1/2 & -k_2 & 0 \\ \hline k_1/2 & 0 & -k_3 \end{array}\right]$$

$A^{(1)}$, $\Delta_{A^{(1)}}(\lambda) = \lambda^2 - \text{tr}(A^{(1)})\lambda + \det(A^{(1)})$
$= \lambda^2 + (k_1 + k_2)\lambda + k_1 k_2 \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)$

$A^{(1)}$ as. stab. $\Longleftrightarrow \begin{cases} \text{tr}(A^{(1)}) < 0 \\ \det(A^{(1)}) > 0 \end{cases}$

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}\left[-(k_1 + k_2) \pm \sqrt{\underbrace{(k_1+k_2)^2 - 4k_1k_2\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)}_{(k_1 - k_2)^2 + 2\alpha k_1 k_2 > 0}} \right] \quad \text{reali} < 0 \quad (\text{anche se } \alpha = 1)$$

$\lambda_3 = -k_3 < 0$

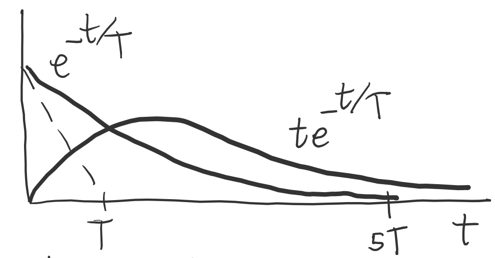
MODI E COSTANTE DI TEMPO DOMINANTE

I modi associati all'autoval. λ_i hanno costante di tempo

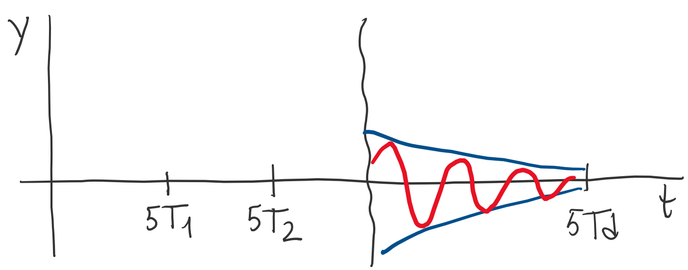
$$T_i = -\frac{1}{Re(\lambda_i)} \quad t.c. \qquad T_i = -\frac{1}{\log|\lambda_i|} \quad t.d.$$

Per un sistema as. stab. (tutte le $T_i > 0$), consideriamo un modo "esaurito" (trascurabile) dopo $5T_i$ (il termine esponenziale si è ridotto a meno dell'1% del valore 1 iniziale).

Nota: se nel modo c'è il termine polinomiale di grado $k \geq 1$ impiegherà un po' più tempo a divenire trascurabile, rispetto al modo con $k=0$, ma trascuriamo questo aspetto.

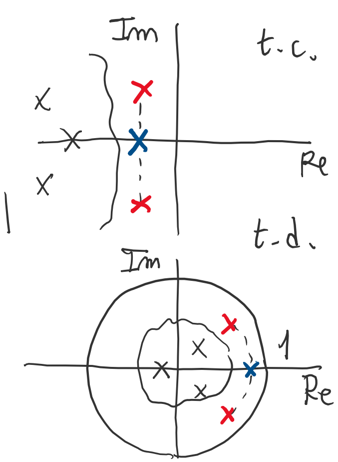


→ nell'ultima parte del mov. libero, resta visibile solo il modo "più lento", detto <u>dominante</u>, quindi un andamento del I (coda esp) o II ordine (coda esp che modula sin)



c.d.t. dominante $T_d = \max_i \{T_i\}$

λ_d è quello con
- $Re(\lambda_i)$ meno negativa quindi, tenendo conto del segno, con $Re(\lambda_i)$ max
- $|\lambda_i|$ max

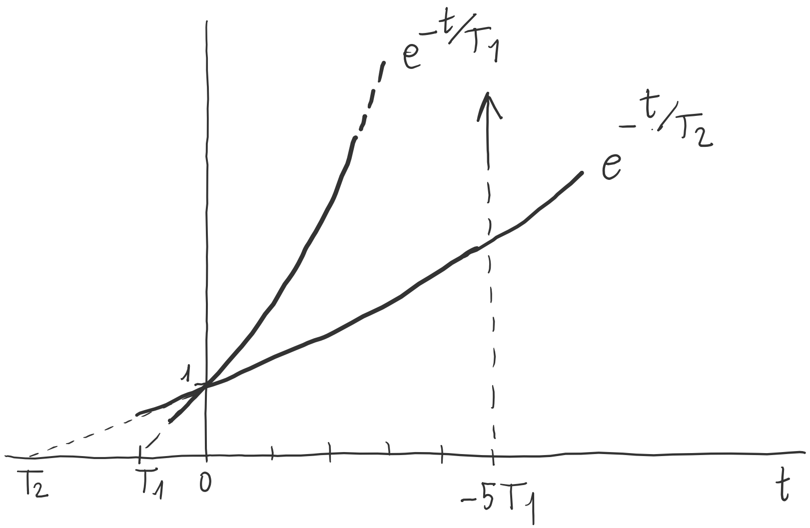


MODI E COSTANTE DI TEMPO DOMINANTE

Il confronto può essere fatto (anche se meno interessante) tra modi "instabili" ($T_i < 0$)

Dopo $-5T_i > 0$ il termine esponenziale ha superato di oltre 100 volte il valore 1 iniziale.

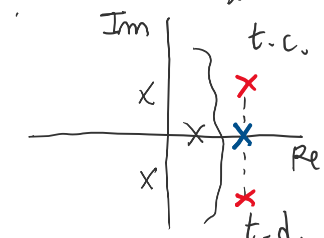
Tutti i modi instabili divergono, ma dopo un pò il contributo principale è dato dal modo più "veloce"

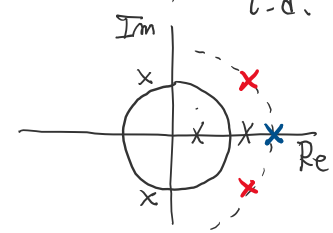


c.d.t. dominante: è quella meno negativa.

Tenendo conto del segno, vale ancora $T_d = \max_i \{T_i\}$

λ_d è quello con
- Re(λ_i) max
- $|\lambda_i|$ max

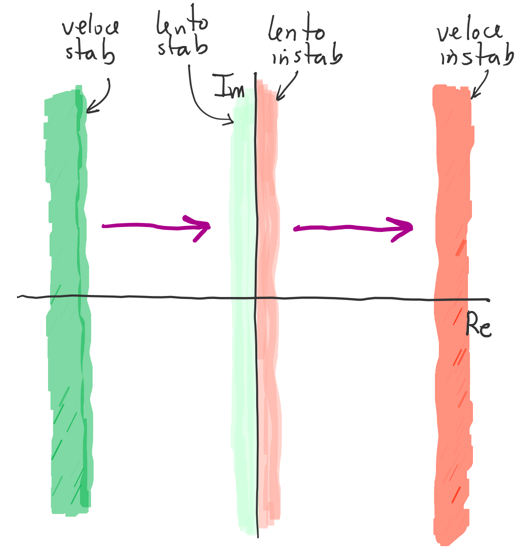


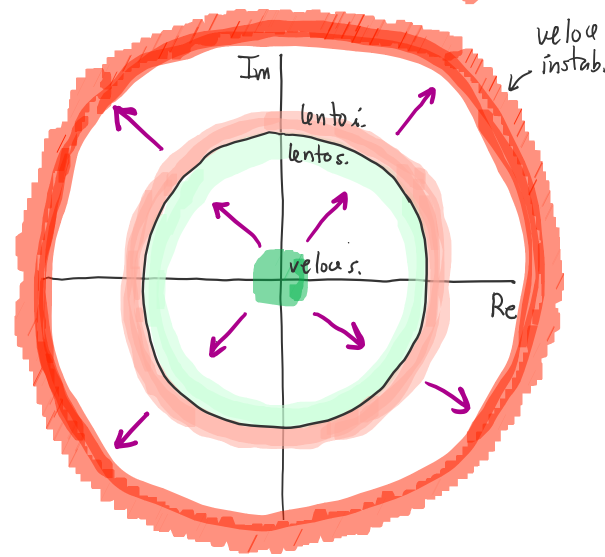


Nota: nel confronto tra un modo stabile e uno instabile, domina (ovviamente) quello instabile

MODI E COSTANTE DI TEMPO DOMINANTE: Riassumendo

modo	T_i	λ_i
"lento"	$\lvert T_i \rvert$ grande	$\lvert Re(\lambda_i) \rvert$ / $\log\lvert\lambda_i\rvert$ piccolo — vicino alla frontiera stab.
(a convergere a 0 - stab. / a divergere - instab.)	($T_i > 0$ / $T_i < 0$)	($Re(\lambda_i) < 0$, $\lvert\lambda_i\rvert < 1$ / $Re(\lambda_i) > 0$, $\lvert\lambda_i\rvert > 1$)
"veloce"	$\lvert T_i \rvert$ piccola	$\lvert Re(\lambda_i) \rvert$ / $\log\lvert\lambda_i\rvert$ grande — lontano dalla frontiera stab.
"dominante"	max (con segno)	max $Re(\lambda_i)$ (con segno) / max $\lvert\lambda_i\rvert$
tra modi stabili	il più lento	
tra modi instabili	il più veloce	





STABILITA' E EQUILIBRIO

Stabilità e l'equilibrio $(\bar{u}, \bar{x})$

I sistemi as. stab. sono quelli (tutti e soli) che hanno $\bar{x}$ unico (in corrispondenza di $u(t) = \bar{u}$) e $x(t) \xrightarrow[t \to +\infty]{} \bar{x} \quad \forall x(0)$ (in circa $5 T_d$)

mov complessivo = libero + forzato (da $\bar{u}$)

Accenno alla dimostrazione

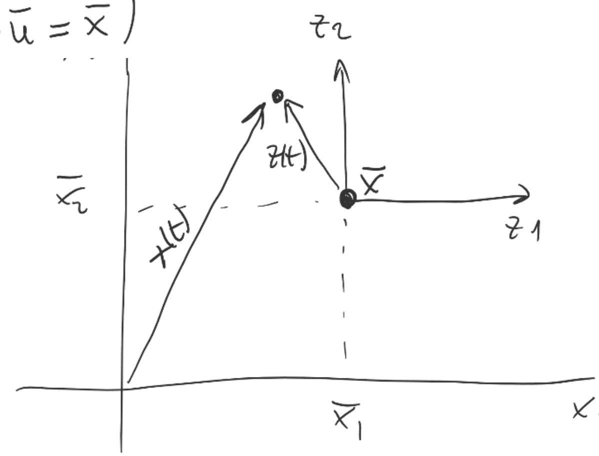
A as. stab.
- t.c. $Re(\lambda_i) < 0 \; \forall i \rightarrow$ non $\exists$ autoval $= 0 \longrightarrow \bar{x} = -A^{-1} b \bar{u}$ $\quad (A\bar{x} + b\bar{u} = 0)$
- t.d. $|\lambda_i| < 1 \; \forall i \rightarrow$ non $\exists$ autoval $= 1 \longrightarrow \bar{x} = (I-A)^{-1} b \bar{u}$ $\quad (A\bar{x} + b\bar{u} = \bar{x})$

$\Big\}$ unico

Per dimostrare che $x(t) \to \bar{x}$ traslamo gli assi in $\bar{x}$

$z(t) = x(t) - \bar{x}$

↳ vettore distanza da $\bar{x}$



STABILITA' E EQUILIBRIO

$$\dot z = \dot x - \overset{0}{\cancel{\frac{d}{dt}\bar x}} = A\underbrace{x}_{\bar x + z} + b\bar u = Az + \underbrace{A\bar x + b\bar u}_{0} = Az$$

$$z(t+1) = x(t+1) - \bar x = A\underbrace{x(t)}_{\bar x + z(t)} + b\bar u - \bar x = Az(t) + \underbrace{A\bar x + b\bar u - \bar x}_{0} = Az(t)$$

→ il mov. complessivo (libero + forzato da $\bar u$) $\equiv$ mov. libero "centrato" in $\bar x$