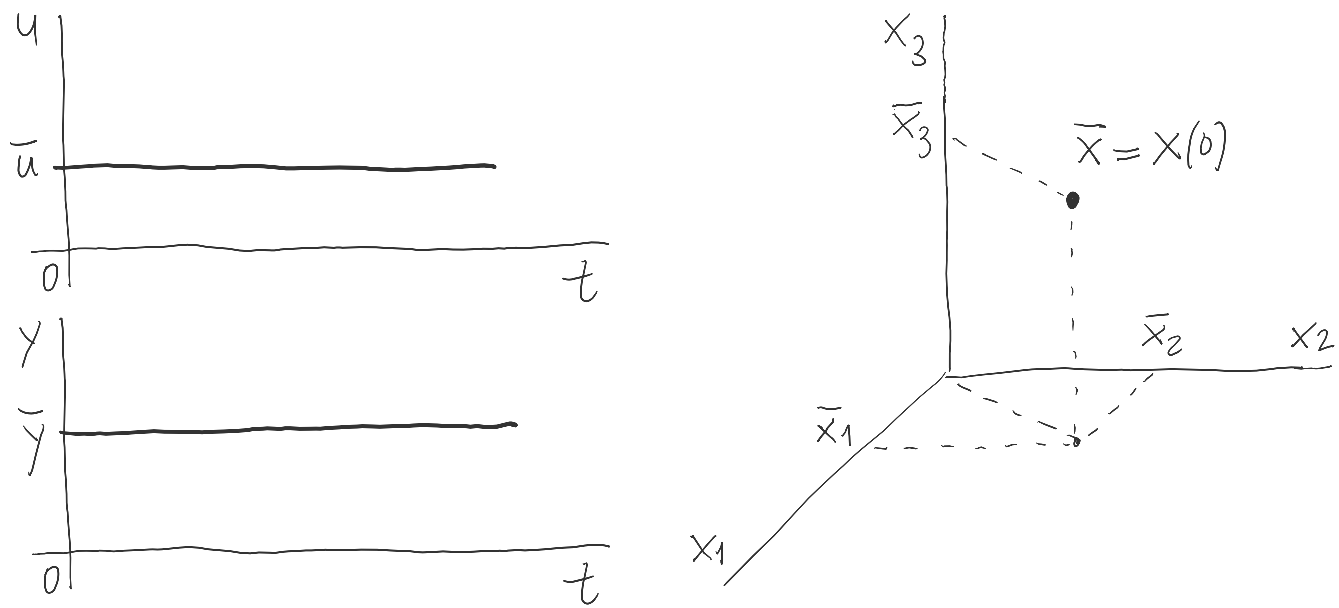
MOVIMENTO ED EQUILIBRIO

Movimento: soluzione $x(t) = \dots$ dell'equazione di stato, a fronte di un assegnato ingresso $u(t)$, e conseguente andamento dell'uscita $y(t) = c^T x(t) + d u(t)$

Equilibrio: movimento costante $x(t) = \bar{x}$ a fronte di un ingresso costante $u(t) = \bar{u}$

$(\bar{u}, \bar{x})$ tale che $x(0) = \bar{x}$ e $u(t) = \bar{u}$ per $t \geq 0 \Rightarrow x(t) = \bar{x}$ per $t > 0$

uscita di equilibrio $\bar{y} = c^T \bar{x} + d\bar{u}$



CALCOLO DEGLI EQUILIBRI

t.c.: $\dot{x} = Ax + bu$

$$0 = A\bar{x} + b\bar{u}$$

$$A\bar{x} = -b\bar{u}$$

Caso 1: A non singolare, $\det A \neq 0$
(A non ha autovalori $= 0$)

$\longrightarrow$ unico equilibrio $\bar{x} = -A^{-1}b\bar{u}$

t.d.: $x(t+1) = Ax(t) + bu(t)$

$$\bar{x} = A\bar{x} + b\bar{u}$$

$$(I-A)\bar{x} = b\bar{u}$$

$(I-A)$ non singolare, $\det(I-A) \neq 0$
(A non ha autovalori $= 1$)

$\longrightarrow$ $\bar{x} = (I-A)^{-1}b\bar{u}$

NOTA DI RIPASSO DI ALGEBRA DELLE MATRICI

$$\text{autoval}(M+\alpha I) = \text{autoval}(M) + \alpha$$

$$\text{autoval}(-M) = -\,\text{autoval}(M)$$

Inoltre, $M+\alpha I$ e $-M$ hanno gli stessi autovettori di M
(ci servirà ricordarlo più avanti)

$$Mv = \lambda v \rightarrow (M+\alpha I)v = Mv + \alpha v = \lambda v + \alpha v = (\lambda+\alpha)v$$

$$\rightarrow (-M)v = -Mv = -\lambda v = (-\lambda)v$$

$$\rightarrow \text{autoval}(I-A) = 1 - \text{autoval}(A)$$

CALCOLO DEGLI EQUILIBRI

t.c.: $\dot{x} = Ax + bu$

$0 = A\bar{x} + b\bar{u}$

$A\bar{x} = -b\bar{u}$

Caso 1: A non singolare, $\det A \neq 0$
(A non ha autovalori $= 0$)

$\rightarrow$ unico equilibrio $\bar{x} = -A^{-1}b\bar{u}$

t.d.: $x(t+1) = Ax(t) + bu(t)$

$\bar{x} = A\bar{x} + b\bar{u}$

$(I-A)\bar{x} = b\bar{u}$

$(I-A)$ non singolare, $\det(I-A) \neq 0$
(A non ha autovalori $= 1$)

$\rightarrow \bar{x} = (I-A)^{-1}b\bar{u}$

$\bar{u} = 0 \rightarrow \bar{x} = 0$

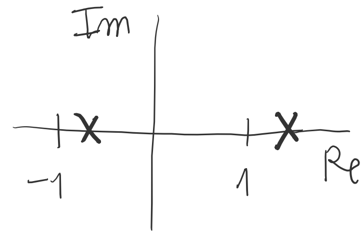
ESEMPIO: FIBONACCI $(u(t) = 0)$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

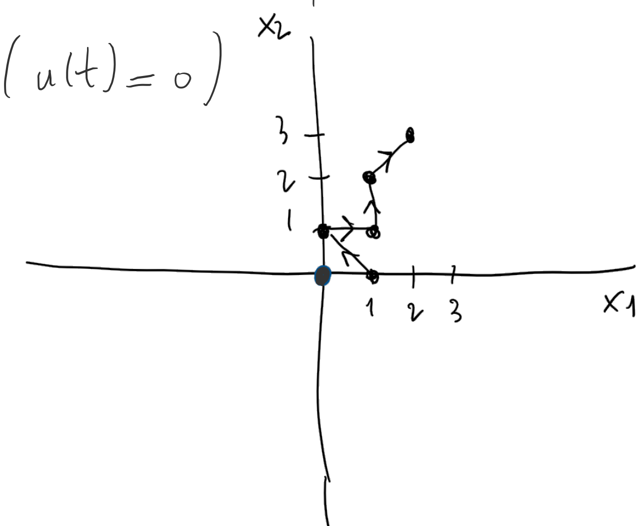
$$I - A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \det(I - A) = -1$$

$$\Delta_A(\lambda) = \lambda^2 - \lambda - 1, \quad \lambda = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$\left(= \lambda^2 - \mathrm{tr}A\,\lambda + \det A \right)$$



$(u(t) = 0)$



$$\bar{u} = 0 \longrightarrow \bar{x} = 0 \quad (\text{unico})$$

Nota: le traiettorie che partono vicine all'equilibrio non ci convergono (vedi capitolo sulla stabilità)

CALCOLO DEGLI EQUILIBRI

t.c.: $\dot{x} = Ax + bu$

$$0 = A\bar{x} + b\bar{u}$$

$$A\bar{x} = -b\bar{u}$$

Caso 1: A non singolare, $\det A \neq 0$
(A non ha autovalori $= 0$)

$\rightarrow$ unico equilibrio $\bar{x} = -A^{-1}b\bar{u}$

t.d.: $x(t+1) = Ax(t) + bu(t)$

$$\bar{x} = A\bar{x} + b\bar{u}$$

$$(I-A)\bar{x} = b\bar{u}$$

$(I-A)$ non singolare, $\det(I-A) \neq 0$
(A non ha autovalori $= 1$)

$\rightarrow \bar{x} = (I-A)^{-1}b\bar{u}$

$$\bar{u} = 0 \longrightarrow \bar{x} = 0$$

Caso 2: A singolare e $\bar{u} = 0$

$\rightarrow \infty$ equilibri $\bar{x}$: $A\bar{x} = 0$

$\bar{x}$ e' autovettore di A associato a $\lambda = 0$

$(I-A)$ singolare e $\bar{u} = 0$

$\rightarrow \infty$ equilibri $\bar{x}$: $(I-A)\bar{x} = 0$

$\bar{x}$ e' autovet. di A ass. $\lambda = 1$ $(A\bar{x} = \bar{x})$

∞^{m_g} equilibri, m_g : molteplicità geometrica di $\lambda = 0$ $(\lambda = 1)$

$$m_g = n - \text{rango}(\lambda I - A)$$

ESEMPIO: NEWTON $(u(t) = 0)$

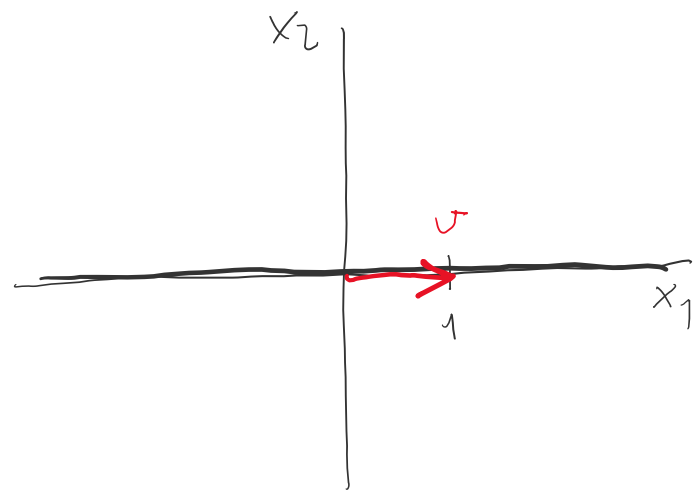
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -h/m \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix}$$

A singolare, $\det A = 0$

A triangolare $\rightarrow$ autoval $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -\frac{h}{m}$

Calcolo $\bar{x}$ dalle condizioni di equilibrio: $0 = A\bar{x} + b\bar{u}$ $\quad (\bar{u} = 0)$

$$\begin{cases} 0 = \bar{x}_2 \\ 0 = -\frac{h}{m}\bar{x}_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \bar{x}_2 = 0 \\ \bar{x}_1 \text{ qualsiasi} \end{cases} \quad \bar{x} = \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

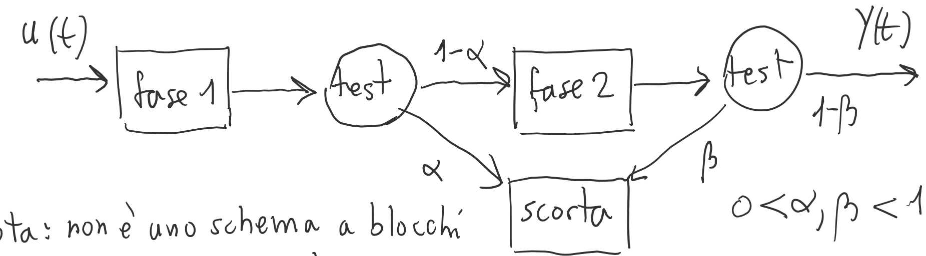


Calcolo l'autovettore v ass. a $\lambda = 0$

$$Av = 0, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{h}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} v_2 = 0 \\ -\frac{h}{m} v_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} v_2 = 0 \\ v_1 \text{ qualsiasi} \end{matrix} \quad \text{per es. } \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ESEMPIO: PROCESSO DI PRODUZIONE



Nota: non è uno schema a blocchi ma solo una rappresentazione grafica dei flussi di materiale

t. discreto in periodi di lavorazione

$u(t)$: unità di materiale introdotto in fase 1 alla fine del periodo t

$x_1(t)$ e $x_2(t)$: unità di materiale in lavorazione in fase 1 e 2 durante il periodo t

$x_3(t)$: unità di materiale in scorta durante il periodo t

$y(t)$: unità di prodotto finito alla fine del periodo t

$$x_1(t+1) = u(t)$$
$$x_2(t+1) = (1-\alpha)\, x_1(t)$$
$$x_3(t+1) = x_3(t) + \alpha x_1(t) + \beta x_2(t)$$
$$y(t) = (1-\beta)\, x_2(t)$$

Equilibri per $\bar{u} = 0$

$$\bar{x}_1 = \bar{u} = 0$$
$$\bar{x}_2 = (1-\alpha)\,\bar{x}_1 = 0$$
$$\cancel{\bar{x}_3} = \cancel{\bar{x}_3} + \alpha \bar{x}_1 + \beta \bar{x}_2 \rightarrow 0 = 0$$

∞ equilibri $\bar{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \bar{x}_3 \end{bmatrix}$

Calcolo l'autovet. di A ass. $\lambda = 1$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1-\alpha & 0 & 0 \\ \alpha & \beta & 1 \end{bmatrix}, \quad Av = v, \quad v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 0 = v_1 \\ (1-\alpha)v_1 = v_2 \\ \alpha v_1 + \beta v_2 + v_3 = v_3 \end{cases} \qquad \begin{cases} v_1 = 0 \\ v_2 = 0 \\ v_3 \text{ qualsiasi} \end{cases}$$

CALCOLO DEGLI EQUILIBRI

$A\bar{x} = -b\bar{u}$	$(I-A)\bar{x} = b\bar{u}$
Caso 3: A singolare, $\bar{u} \neq 0$ e rango$([A\|b])$ = rango(A)	$(I-A)$ singolare, $\bar{u} \neq 0$ e rango$([I-A\|b])$ = rango$(I-A)$

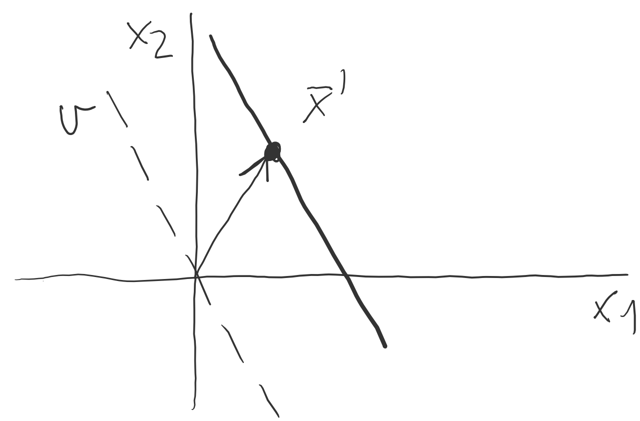
$\rightarrow \infty$ equilibri

se $\bar{x}'$ è soluzione $(A\bar{x}'+b\bar{u}=0)$ e v è autovett. ass. $\lambda=0$	se $\bar{x}'$ è soluzione $((I-A)\bar{x}'=b\bar{u})$ e v è autovett. ass. $\lambda=1$

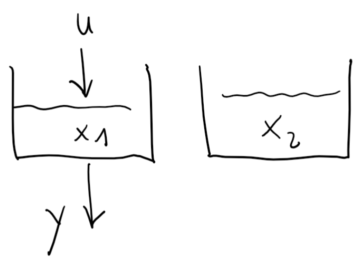
$\rightarrow \bar{x}'' = \bar{x}' + \alpha v$ è soluzione

$(A\bar{x}''+b\bar{u} = A\bar{x}' + \alpha \underbrace{Av}_{0} + b\bar{u} = 0)$	$((I-A)\bar{x}'' = (I-A)\bar{x}' + \alpha \underbrace{(I-A)v}_{0} = b\bar{u})$

$\rightarrow \bar{x}$ sono disposti su una retta (piano, iper-piano m_g-dim) // autospazio di $\lambda=0$ $(\lambda=1)$



ESEMPIO BANALE: SERBATOI



$$\dot{x}_1 = u - k_1 x_1$$
$$\dot{x}_2 = 0$$
$$y = k_1 x_1$$

$$A = \begin{bmatrix} -k_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\det A = 0$, autoval: $\lambda_1 = -k_1$, $\lambda_2 = 0$

rango$(A) = 1$, rango$([A|b]) = 1$

Equilibri per $\bar{u} > 0$

$$\begin{cases} 0 = \bar{u} - k_1 \bar{x}_1 \\ 0 = 0 \end{cases} \rightarrow \bar{x}_1 = \frac{\bar{u}}{k_1}$$

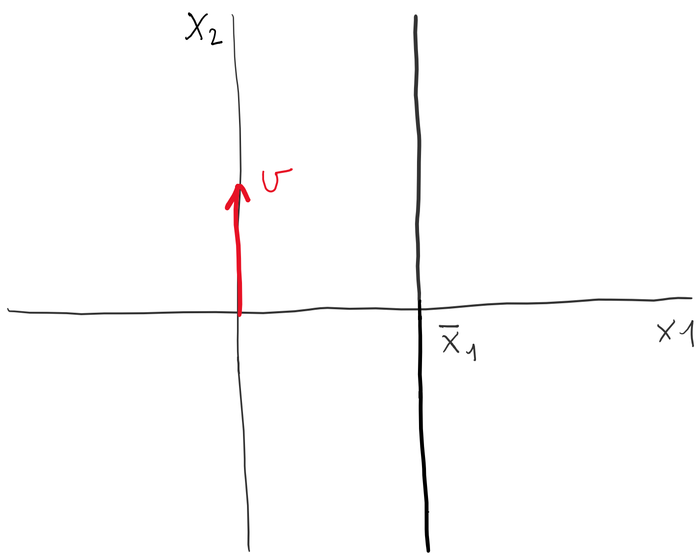
$\bar{x}_2$ qualsiasi

autovett. v ass. a $\lambda_2 = 0$

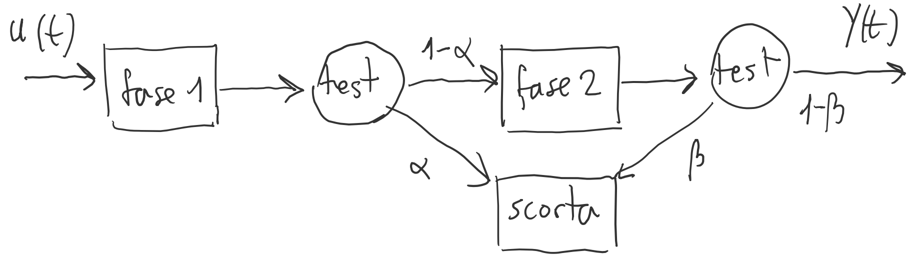
$$Av = 0 \quad \begin{cases} -k_1 v_1 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} v_1 = 0 \\ v_2 \text{ qualsiasi} \end{cases}$$

$\downarrow$

per es. $v = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$



ESEMPIO BANALE: PROCESSO DI PRODUZIONE con $\alpha = \beta = 0$ e $\bar{u} > 0$



$$x_1(t+1) = u(t)$$
$$x_2(t+1) = (1-\alpha)\, x_1(t)$$
$$x_3(t+1) = x_3(t) + \alpha x_1(t) + \beta x_2(t)$$

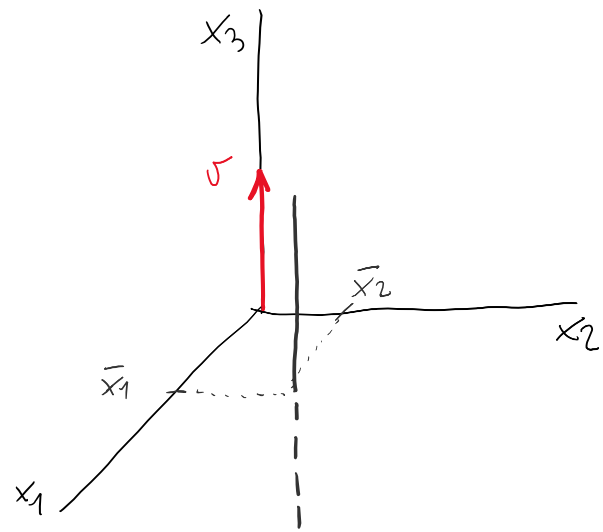
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1-\alpha & 0 & 0 \\ \alpha & \beta & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad I-A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{rango}(I-A) = \mathrm{rango}([I-A \mid b])$$

∞ equilibri

$$\bar{x}_1 = \bar{u}$$
$$\bar{x}_2 = (1-\alpha)\, \bar{x}_1 = (1-\alpha)\, \bar{u} \qquad \bar{x} = \begin{bmatrix} \bar{u} \\ (1-\alpha)\bar{u} \\ \bar{x}_3 \end{bmatrix}$$
$$\cancel{\bar{x}_3} = \cancel{\bar{x}_3} \rightarrow \bar{x}_3 \text{ qualsiasi}$$

$$Av = v, \quad v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \text{qualsiasi} \end{bmatrix}$$



CALCOLO DEGLI EQUILIBRI

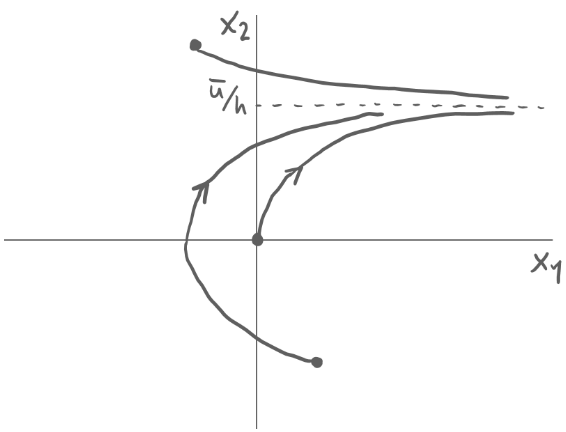
Caso 4: A singolare, $\bar{u} \neq 0$
e rango$([A|b])$ = rango$(A)+1$

$(I-A)$ singolare, $\bar{u} \neq 0$
e rango$([I-A|b])$ = rango$(I-A)+1$

$\rightarrow$ 0 equilibri

Newton ($\bar{u} > 0$)

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{h}{m} \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} \quad \text{rango}([A|b]) = 2$$



Processo di produzione ($\bar{u} > 0$)

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1-\alpha & 0 & 0 \\ \alpha & \beta & 1 \end{bmatrix}, \quad I-A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \alpha-1 & 1 & 0 \\ -\alpha & -\beta & 0 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\bar{x}_1 = \bar{u}$

$\bar{x}_2 = (1-\alpha)\,\bar{x}_1$

$\bar{x}_3 = \bar{x}_3 + \alpha\bar{x}_1 + \beta\bar{x}_2$

$\alpha\bar{u} + \beta(1-\alpha)\bar{u} = \underbrace{(\alpha+\beta(1-\alpha))}_{\neq 0}\,\bar{u} = 0$

impossibile

USCITA DI EQUILIBRIO E GUADAGNO

$$\bar{y} = c^T \bar{x} + d\bar{u}$$

Nel caso 1 di equilibrio unico, si ottiene

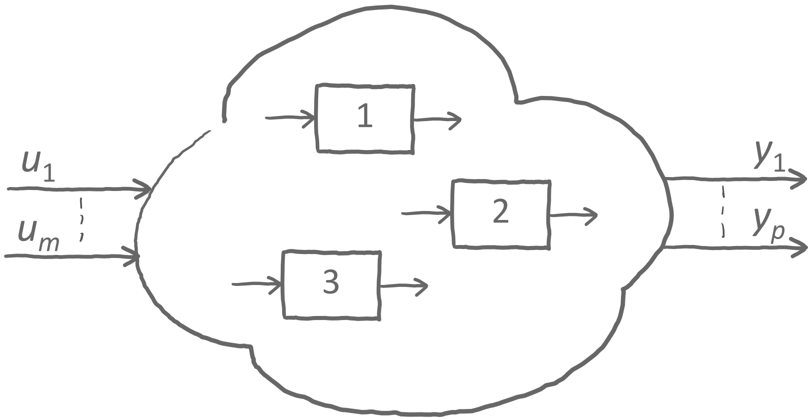
$$\bar{y} = \underbrace{\left(-c^T A^{-1} b + d\right)}_{\mu} \bar{u} \qquad \bar{y} = \underbrace{\left(c^T (I-A)^{-1} b + d\right)}_{\mu} \bar{u}$$

μ : guadagno del sistema = rapporto y/u all'equilibrio (caso 1)
(nei casi con 0 o ∞ equilibri, il guadagno non è definito;
a volte diremo che è "∞")

Confrontando con l'espressione della fdt : $G(p) = c^T (pI - A)^{-1} b + d$
si ottiene

$$\mu = G(0) = \frac{\beta_n}{\alpha_n} \qquad \mu = G(1) = \frac{\sum_{i=0}^{n} \beta_i}{1 + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i}$$

GUADAGNO DEGLI AGGREGATI



$$\mu_{u_j y_i} = \begin{cases} G_{u_j y_i}(0), & \text{t.c.} \\ G_{u_j y_i}(1), & \text{t.d.} \end{cases}$$

Serie: $G(p) = G_1(p)\,G_2(p) \longrightarrow \mu = \mu_1 \mu_2$

parallelo: $G(p) = G_1(p) + G_2(p) \longrightarrow \mu = \mu_1 + \mu_2$

retroaz. pos/neg: $G(p) = \dfrac{G_1(p)}{1 \mp G_1(p)\,G_2(p)} \longrightarrow \mu = \dfrac{\mu_1}{1 \mp \mu_1 \mu_2} = \dfrac{\mu_{andata}}{1 - \mu_{anello}}$