MOVIMENTO E FORMULA DI LAGRANGE

Movimento: soluzione $x(t) = \ldots$ dell'equazione di stato,
a fronte di un assegnato ingresso $u(t)$,
e conseguente andamento dell'uscita $y(t) = c^T x(t) + d u(t)$

Cause di movimento (non nullo)

1) lo stato iniziale $x(0)$
2) l'ingresso $u(t)$

Formula di Lagrange (t. continuo, sistemi lineari t. invarianti)

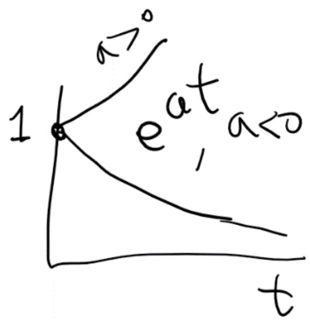
$$x(t) = \underbrace{e^{At}}_{\text{matrice esponenziale } (n \times n)} x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)} b\, u(\tau)\, d\tau \quad , \quad t \geq 0$$

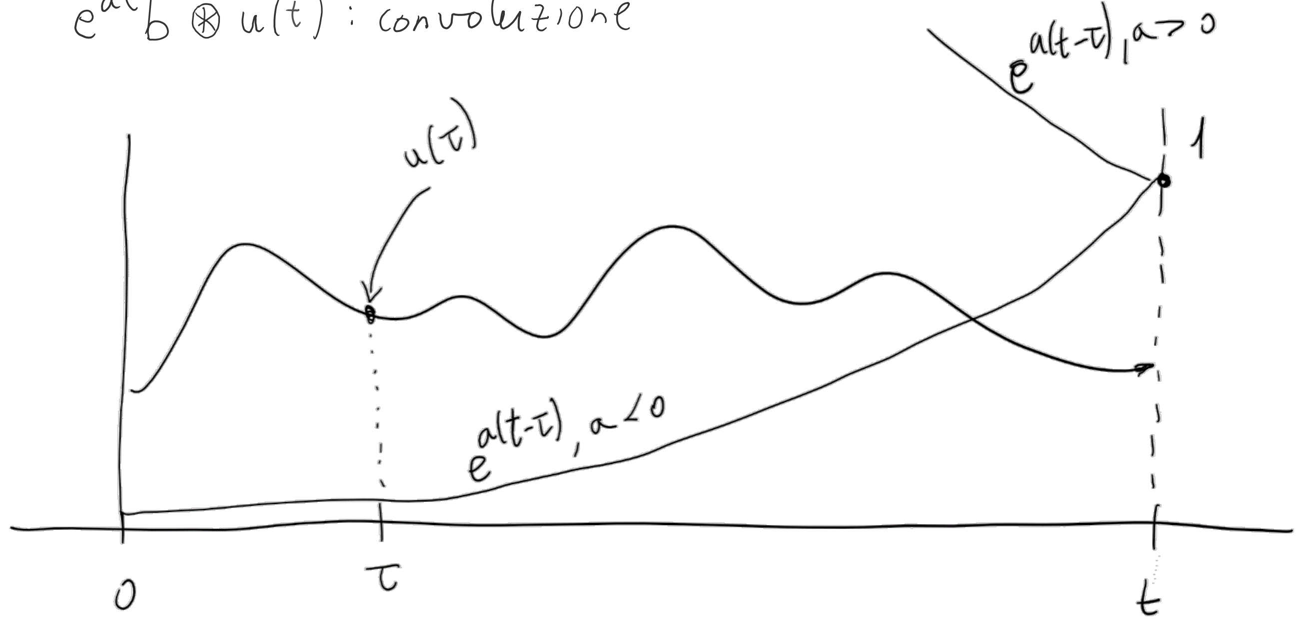
Nota: risolvere l'eq. di stato significa calcolare e^{At} e poi l'integrale.
È sempre possibile (almeno numericamente, purché l'integrale sia ben definito. Non lo faremo (lo abbiamo fatto nell'es. del controllo di temperatura)

INTERPRETAZIONE PER SISTEMI DEL I ORDINE

$$x(t) = e^{At}\, x(0) + \underbrace{\int_0^t e^{A(t-\tau)}\, b\, u(\tau)\, d\tau}_{e^{at} b \,\circledast\, u(t)\ :\ \text{convoluzione}}$$

$n=1$: $A=a$, b (1×1)





Intuitivamente:

$a<0$, il sistema dimentica le cause passate di movimento

$a>0$ ... le amplifica

Generalizzeremo questa condizione in termini degli autovalori di A (vedi stabilità)

MATRICE ESPONENZIALE (o esponenziale di matrice)

$$e^x = \exp(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \dots + \frac{x^k}{k!} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

$$e^M = I + M + \frac{M \cdot M}{2} + \frac{M \cdot M \cdot M}{6} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{M^k}{k!}$$ (serie convergente per qualsiasi M)

M: matrice quadrata

$$e^{At} = I + At + \frac{A^2 t^2}{2} + \frac{A^3 t^3}{6} + \dots$$

↳ matrice di transizione $\Phi(t) = e^{At}$

(matrice soluzione fondamentale dell'eq. omogenea $\dot{x} = Ax$)

descrive la "transizione" da stato iniziale a finale per il sistema autonomo $(u(t) = 0)$: $x(t) = \phi(t)\, x(0)$

MOVIMENTO A T. DISCRETO

eq. stato: $x(t+1) = Ax(t) + bu(t)$

$$x(1) = Ax(0) + bu(0)$$

$$x(2) = Ax(1) + bu(1) = A^2x(0) + Abu(0) + bu(1)$$

$$\vdots$$

$$x(t) = A^t x(0) + A^{t-1}bu(0) + A^{t-2}bu(1) + \dots + Abu(t-2) + bu(t-1)$$

$$x(t) = \underbrace{A^t}_{} x(0) + \sum_{k=0}^{t-1} A^{t-1-k}bu(k) \quad , \quad t \geq 0$$

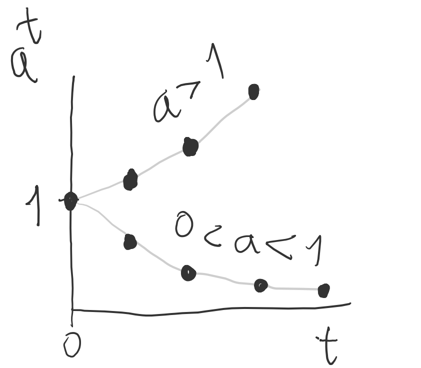
matrice di transizione $\phi(t) = A^t$

Nota: la formula è detta comunque "di Lagrange".

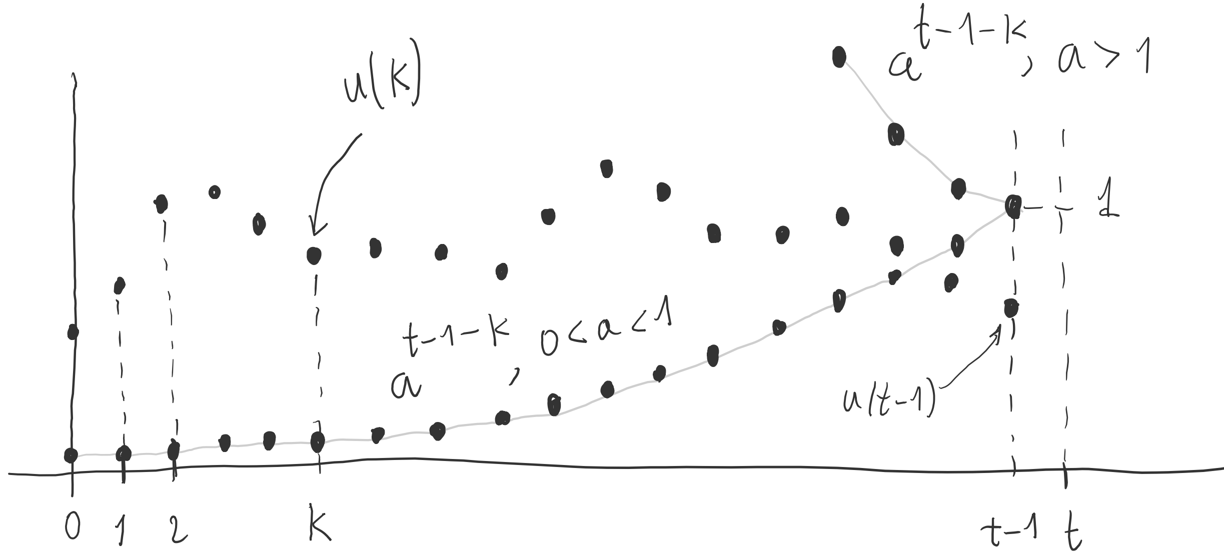
INTERPRETAZIONE PER SISTEMI DEL I ORDINE

$$x(t) = A^t x(0) + \underbrace{\sum_{k=0}^{t-1} A^{t-1-k} b u(k)}$$

$n=1: A=a,\ b\ (1\times 1)$ $\qquad a^t b \circledast u(t)$: convoluzione in $[0, t-1]$



successione geometrica



Intuitivamente:

$|a|<1$, il sistema dimentica le cause passate di movimento

$|a|>1$ ... le amplifica

MOVIMENTO LIBERO E FORZATO

Introduciamo una notazione comune a t.c. e t.d.

$$x(t) = \underbrace{\phi(t)\, x(0)}_{\text{movimento libero}} + \underbrace{\Psi(t)\, u_{[0,t)}(\cdot)}_{\text{movimento forzato}}$$

$$\phi(t) = \begin{cases} e^{At}, & \text{t.c.} \\ A^t, & \text{t.d.} \end{cases}$$

$$\Psi(t) = \begin{cases} \int_0^t e^{A(t-\tau)} b u(\tau)\, d\tau \\ \sum_{k=0}^{t-1} A^{t-1-k} b u(k) \end{cases}$$

è un operatore (lineare) dallo spazio degli ingressi ($u_{[0,t)}(\cdot)$ rappresenta l'ingresso $u(\tau)$ per $\tau \in [0,t)$) a $\mathbb{R}^n$

Movimento dell'uscita

$$y(t) = \underbrace{c^T \phi(t)\, x(0)}_{\text{uscita libera}} + \underbrace{c^T \Psi(t)\, u_{[0,t)}(\cdot) + d u(t)}_{\text{uscita forzata}}$$

PRINCIPIO DI SOVRAPPOSIZIONE DELLE CAUSE (DI MOVIMENTO) E DEGLI EFFETTI

Se alle cause $\left(x^{(1)}(0),\ u^{(1)}_{[0,t)}(\cdot)\right)$ corrisponde l'effetto $y^{(1)}_{[0,t)}(\cdot)$

e alle cause $\left(x^{(2)}(0),\ u^{(2)}_{[0,t)}(\cdot)\right)$ corrisponde l'effetto $y^{(2)}_{[0,t)}(\cdot)$

allora alle cause $\left(\alpha_1 x^{(1)}(0)+\alpha_2 x^{(2)}(0),\ \alpha_1 u^{(1)}_{[0,t)}(\cdot)+\alpha_2 u^{(2)}_{[0,t)}(\cdot)\right)$

corrisponde l'effetto $\alpha_1 y^{(1)}_{[0,t)}(\cdot)+\alpha_2 y^{(2)}_{[0,t)}(\cdot)$

È una diretta conseguenza della formula di Lagrange.

È enunciato rispetto agli effetti sull'uscita, ma vale anche sullo stato

$$
\begin{aligned}
x(t) &= \phi(t)\left(\alpha_1 x^{(1)}(0)+\alpha_2 x^{(2)}(0)\right)+\Psi(t)\left(\alpha_1 u^{(1)}_{[0,t)}(\cdot)+\alpha_2 u^{(2)}_{[0,t)}(\cdot)\right)\\
&= \alpha_1 \underbrace{\left[\phi(t)x^{(1)}(0)+\Psi(t)u^{(1)}_{[0,t)}(\cdot)\right]}_{x^{(1)}_{[0,t)}(\cdot)}+\alpha_2 \underbrace{\left[\phi(t)x^{(2)}(0)+\Psi(t)u^{(2)}_{[0,t)}(\cdot)\right]}_{x^{(2)}_{[0,t)}(\cdot)}
\end{aligned}
$$

Attenzione: entrambe le cause $\left(x(0), u_{[0,t)}(\cdot)\right)$ devono essere coinvolte nella combinazione
per es, è scorretto affermare "se raddoppia l'ingresso ($\alpha_1=2, \alpha_2=0$), raddoppia l'uscita".

Esempio: l'unico sistema dinamico a dimensione infinita che considereremo: il ritardatore a t.c.

$$y(t) = u(t-\tau)$$

Stato $x(t)$ = porzione di segnale $u(t')$ per $t' \in [t-\tau, t]$

E' un sistema lineare perché vale il principio di sovrapposizione

$$y(t) = \alpha_1 u^{(1)}(t-\tau) + \alpha_2 u^{(2)}(t-\tau) = \alpha_1 y^{(1)}(t) + \alpha_2 y^{(2)}(t)$$

Possiamo anche definire la T.d.T.

$$u(t-\tau) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Taylor in } \tau=0}}{=} \sum_{k=0}^{+\infty} u^{(k)}(t) \frac{(-\tau)^k}{k!} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{notaz. polinomiale} \\ u^{(k)}(t) = s^k u(t)}}{=} \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-s\tau)^k}{k!} \right) u(t) = e^{-s\tau} u(t)$$

$y(t) = e^{-s\tau} u(t)$ (notazione sintetica) $\rightarrow G(s) = e^{-s\tau}$

Nota: non è un rapporto di polinomi

Nota: nei sistemi con più ingressi, il principio permette di considerarli uno alla volta

sim/esp 1 : $x^{(1)}(0)=0, \quad u^{(1)}(t)=\begin{bmatrix} u_1(t) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$

sim/esp 2 $\quad x^{(2)}(0)=0, \quad u^{(2)}(t)=\begin{bmatrix} 0 \\ u_2(t) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$

$\vdots$

sim/esp m $\quad x^{(m)}(0)=0, \quad u^{(m)}(t)=\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ u_m(t) \end{bmatrix}$

più una sim/esp

$x^{(m+1)}(0)=x_0\neq 0$ e $u^{(m+1)}(t)=0$

per considerare $x_0\neq 0$

Il caso con tutti gli ingressi applicati contemporaneamente e stato iniziale x_0 si ottiene combinando le $m+1$ sim/esp con coefficienti $\alpha_i=1$

$$x(0)=\sum_{i=1}^{m+1} x^{(i)}(0)=x_0$$

$$u(t)=\sum_{i=1}^{m+1} u^{(i)}(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \vdots \\ u_m(t) \end{bmatrix}$$

Nota: anche nel calcolo della fdt in uno schema a blocchi con più ingressi, si può considerare un ingresso alla volta.

MATRICE DI TRANSIZIONE: IL METODO DELLE N SIMULAZIONI/ESPERIMENTI

Sim/esp $j = 1, \dots, n$: movimento libero a partire da

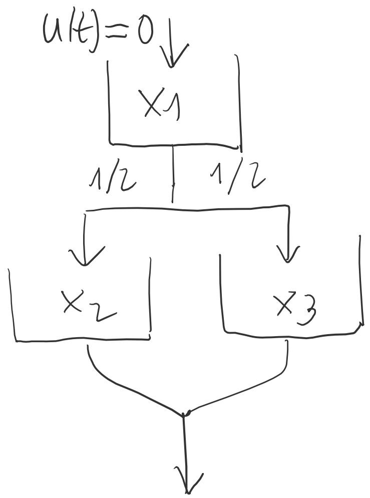
$$x(0) = e^{(j)} = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ \\ \leftarrow j \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

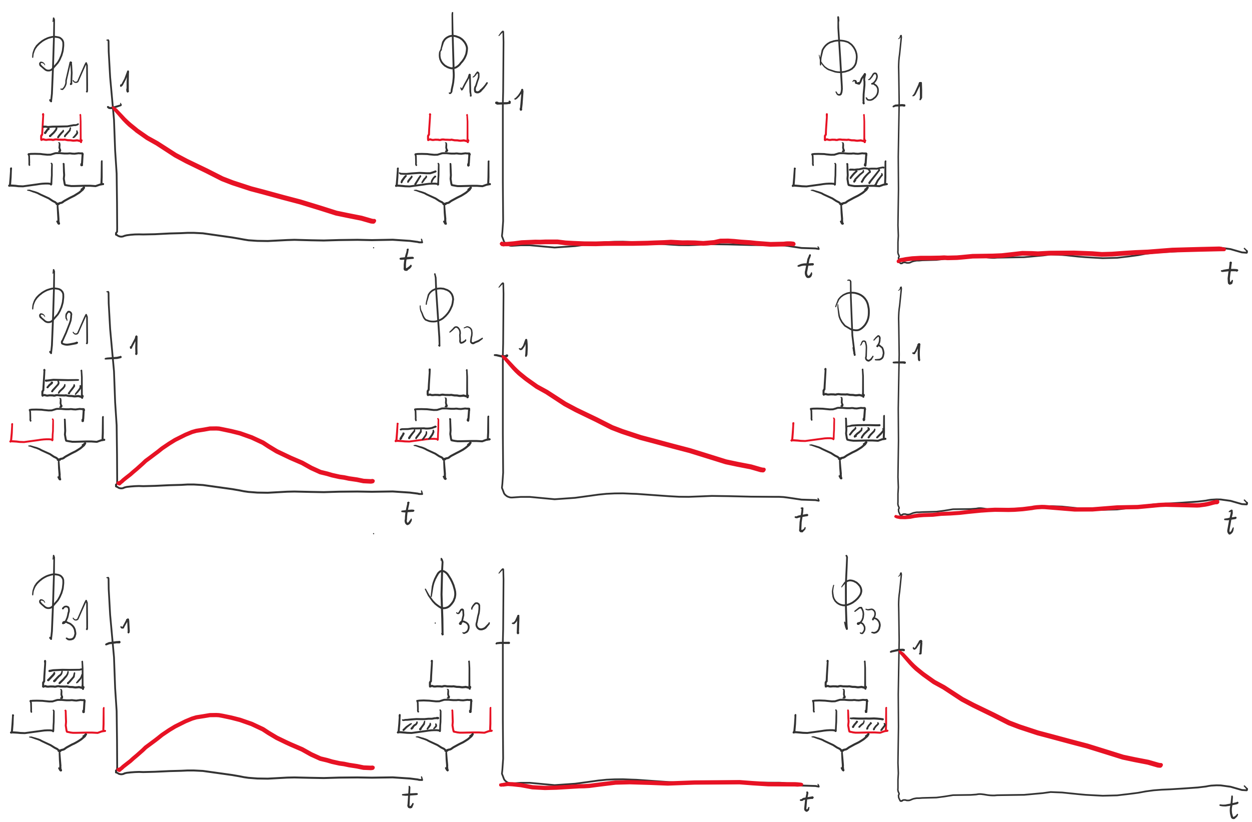
versore asse j

$$\rightarrow \; x(t) = \Phi(t)\, x(0) = \begin{array}{r} \\ \text{riga } i \rightarrow \\ \\ \\ \end{array} \begin{array}{c} \text{colonna } j \\ \downarrow \\ \begin{bmatrix} \phi_{i1}(t) & \cdots & \boxed{\phi_{ij}(t)} & \cdots & \phi_{in}(t) \\ & & & & \\ & & & & \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{r} \\ \\ \\ j \rightarrow \\ \\ \\ \end{array} \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \boxed{1} \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \phi_{1j}(t) \\ \vdots \\ \phi_{ij}(t) \\ \vdots \\ \phi_{nj}(t) \end{bmatrix}}_{j\text{-esima colonna di } \Phi(t)}$$

$\rightarrow$ $\phi_{ij}(t)$ è il movimento di $x_i(t)$ nella sim/esp j

ESEMPIO: rete di serbatoi





REVERSIBILITA'

Premessa: la formula di L. è valida per $t \geq 0$. Determina univocamente il movimento $x(t)$ del sistema in avanti nel tempo a partire dallo stato $x(0)$ all'istante iniziale $t=0$

Domanda: il movimento è univocamente determinato anche all'indietro nel tempo?
Se sì il sistema è detto <u>reversibile</u>

Nota: Per capirlo, non possiamo semplicemente usare la formula di L. con $t<0$.
Dobbiamo usarla "in avanti", immaginando l'istante $t=0$ nel passato e l'istante t come presente, con $x(t)$ noto e provare a risolvere per $x(0)$

$$\underbrace{x(t)}_{\text{noto}} = \phi(t) \underbrace{x(0)}_{?} + \Psi(t) \underbrace{u_{[0,t)}(\cdot)}_{\text{noto}}$$

$\longrightarrow$ Il sistema è reversibile $\longleftrightarrow$ $\phi(t)$ non singolare

$$x(0) = \phi(t)^{-1} \left[x(t) - \Psi(t) u_{[0,t)} \right]$$

REVERSIBILITA': T. CONTINUO

$$\phi(t) = e^{At} = I + At + \frac{A^2t^2}{2} + \frac{A^3t^3}{6} + \dots$$

$$\phi(t)^{-1} = e^{-At} = I - At + \frac{A^2t^2}{2} - \frac{A^3t^3}{6} + \dots \qquad \text{(serie convergente)}$$

$$\phi(t)\phi(t)^{-1} = \left(I + At + \frac{A^2t^2}{2} + \frac{A^3t^3}{6} + \dots\right)\left(I - At + \frac{A^2t^2}{2} - \frac{A^3t^3}{6} + \dots\right)$$

$$= I + \text{tutti gli altri termini si cancellano}$$

→ i sistemi a t.c. sono reversibili

Nota: in effetti la formula di L. risulta corretta anche se valutata con $t < 0$.

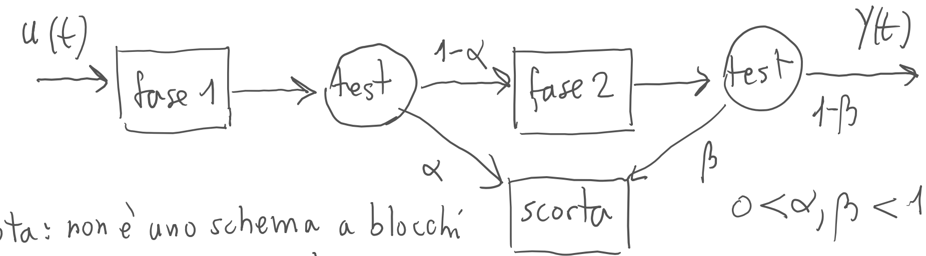
REVERSIBILITA': T. DISCRETO $\phi(t) = A^t$

Nota: autoval (A^t) = autoval $(A)^t$ $\rightarrow$ A^t non singolare $\longleftrightarrow$ A non singolare

$\rightarrow$ i sistemi a t.d. sono reversibili $\longleftrightarrow$ A non ha autoval $= 0$

Esempi: Fibonacci è reversibile, il processo di produzione seguente no.

ESEMPIO: PROCESSO DI PRODUZIONE



Nota: non è uno schema a blocchi ma solo una rappresentazione grafica dei flussi di materiale

$$x_1(t+1) = u(t)$$

$$x_2(t+1) = (1-\alpha)\, x_1(t)$$

$$x_3(t+1) = x_3(t) + \alpha x_1(t) + \beta x_2(t)$$

$$y(t) = (1-\beta)\, x_2(t)$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1-\alpha & 0 & 0 \\ \alpha & \beta & 1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$c^T = \begin{bmatrix} 0 & 1-\beta & 0 \end{bmatrix}$$

t. discreto in periodi di lavorazione

$u(t)$: unità di materiale introdotto in fase 1 alla fine del periodo t

$x_1(t)$ e $x_2(t)$: unità di materiale in lavorazione in fase 1 e 2 durante il periodo t

$x_3(t)$: unità di materiale in scorta durante il periodo t

$y(t)$: unità di prodotto finito alla fine del periodo t

NOTA SUI SISTEMI NON REVERSIBILI

Fissato $t > 0$, mi aspetto che il sistema algebrico $\phi(t) \underbrace{x(0)}_{?} = \underbrace{x(t)}_{\text{noto}} - \psi(t) \underbrace{u_{[0,t)}(\cdot)}_{\text{noto}}$

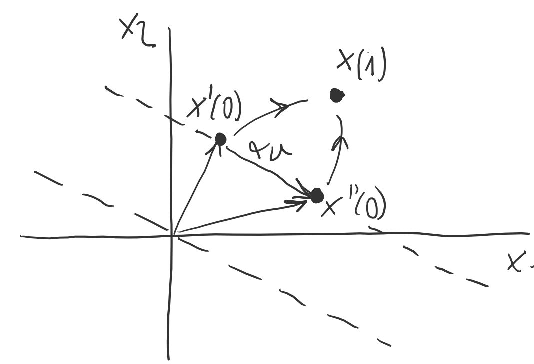
abbia ∞ soluzioni (ovvero $x(t) - \psi(t)\, u_{[0,t)}(\cdot) \in \text{Immagine}(\phi(t))$) perché l'ingresso $u_{[0,t)}(\cdot)$ è supposto noto, quindi sappiamo che il movimento è partito dall'istante 0.

Le soluzioni $x(0)$ sono su rette (piani, iperpiani) // agli autovett. v di A^t ass. $\lambda = 0$

Infatti se $x'(0)$ è sol. lo è anche $x''(0) = x'(0) + \alpha v$

In particolare, l'autovett. di A, $Av = 0$, è anche autovett. di A^t
(è l'unico se $\lambda = 0$ è semplice, $m_g = m_a = 1$)
In questo caso $x'(0)$ e $x''(0)$ portano nello stesso $x(1)$, indipendentem. da $u(0)$

$$x(1) = Ax''(0) + bu(0) = Ax'(0) + \alpha \underbrace{Av}_{0} + bu(0)$$



Se $\lambda = 0$ è multiplo (e $m_g < m_a$), ci sono traiettorie che si uniscono dopo più passi ...

UNA CLASSE PARTICOLARE DI SISTEMI NON REVERSIBILI: I SISTEMI A MEMORIA FINITA

Sono i sistemi (a t.d. non reversibili) che dimenticano completamente lo stato iniziale in tempo finito, ovvero i sistemi per cui esiste un istante t^* al quale $\phi(t^*) = A^{t^*} = 0$.

Per $t \geq t^*$ c'è solo il movimento forzato, qualsiasi sia stato lo stato iniziale.
Qualsiasi $x(0)$ potrebbe essere stato lo stato iniziale
(in termini algebrici: qualsiasi vettore v è autovett. di A^t ass. $\lambda = 0$, $A^t v = 0 \cdot v = 0$)

Relazione con gli autoval. di A: Sono i sistemi con tutti gli autoval. di A nulli

Memoria finita $\rightarrow$ autoval(A^{t^*}) tutti $= 0$ $\rightarrow$ autoval$(A)^{t^*} = 0$

autoval(A) tutti $= 0$ $\rightarrow$ $\Delta_A(\lambda) = \lambda^n$ $\longrightarrow$ $A^n = 0$ $\rightarrow$ t^* esiste ed è $\leq n$

[Teorema di Caley-Hamiton: una matrice quadrata soddisfa $\Delta_A(A) = 0$

$A^n + \alpha_1 A^{n-1} + \dots + \alpha_{n-1} A + \alpha_n I = 0$]

ESEMPIO: AULA INFORMATIZZATA

$u(t)$: PC acquistati alla fine dell'anno t

$y(t)$: totale PC nell'anno t

anno di funzionamento	1	2	3	4
prob. rottura	0	0.2	0.4	0.5

I PC vengono comunque eliminati alla fine del 4° anno di funzionamento

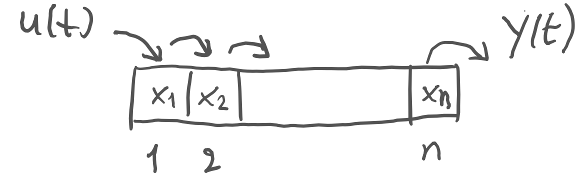
$x_i(t)$: PC nell'i-esimo anno di funzionamento nell'anno t

$$x_1(t+1) = u(t)$$
$$x_2(t+1) = (1-0)\,x_1(t)$$
$$x_3(t+1) = (1-0.2)\,x_2(t)$$
$$x_4(t+1) = (1-0.4)\,x_3(t)$$
$$y(t) = x_1(t) + x_2(t) + x_3(t) + x_4(t)$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.6 & 0 \end{bmatrix}$$

ESEMPIO: Registro a scorrimento – buffer di memoria – ritardatore a t.d.

$y(t) = u(t-n)$



$u(t)$: dato che arriva alla fine del periodo t

$y(t)$: dato eliminato alla fine del periodo t

$x_i(t)$: dato nella cella i nel periodo t

Equazioni di stato

$x_1(t+1) = u(t)$

$x_i(t+1) = x_{i-1}(t) \quad , i = 2, \ldots, n$

Trasformazione d'uscita

$y(t) = x_n(t)$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$c^T = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad d = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$$

Modello ARMA

$z x_1 = u$

$z x_i = x_{i-1}$

$$\rightarrow z^n y = z^n x_n = z^{n-1} x_{n-1} = \cdots = z x_1 = u$$

Nota: (A, b, c^T, d) è in forma canonica di ricostruzione $\rightarrow \alpha_i = 0, \ \beta_i = 0, i < n, \beta_n = 1$.