MODELLO <u>INTERNO</u>: prima formulazione, qui considerata per sistema SISO ($m = 1$, $p = 1$)

t.c.: $\dot{x} = A\,x + b\,u$

t.d.: $x(t+1) = A\,x(t) + b\,u(t)$

$$y(t) = c^T x(t) + d\,u(t)$$

MODELLO <u>ESTERNO</u> (<u>ARMA):</u> seconda formulazione, sempre SISO (oppure uno per ogni coppia (y_i, u_j))

t.d.:
$$y(t) + \alpha_1\,y(t-1) + \alpha_2\,y(t-2) + \cdots + \alpha_n\,y(t-n) =$$
$$\beta_0\,u(t) + \beta_1\,u(t-1) + \beta_2\,u(t-2) + \cdots + \beta_n\,u(t-n)$$

$$y(t) = \underbrace{-\sum_{i=1}^{n} \alpha_i y(t-i)}_{\text{AR (auto-regressive)}} + \underbrace{\sum_{i=0}^{n} \beta_i u(t-i)}_{\text{MA (moving average)}}$$

n è l'ordine del modello ARMA
(con α_n e β_n non entrambi nulli)
(≤ dell'ordine del modello interno)

A volte è più utile scrivere il modello "in avanti nel tempo", tanto l'equazione vale per ogni istante t

$$y(t+n) + \alpha_1\,y(t+n-1) + \alpha_2\,y(t+n-2) + \cdots + \alpha_n\,y(t) =$$
$$\beta_0\,u(t+n) + \beta_1\,u(t+n-1) + \beta_2\,u(t+n-2) + \cdots + \beta_n\,u(t)$$

t.c.:
$$y^{(n)}(t) + \alpha_1\,y^{(n-1)}(t) + \alpha_2\,y^{(n-2)}(t) + \cdots + \alpha_n\,y^{(0)}(t) =$$
$$\beta_0\,u^{(n)}(t) + \beta_1\,u^{(n-1)}(t) + \beta_2\,u^{(n-2)}(t) + \cdots + \beta_n\,u^{(0)}(t)$$

$$y^{(k)}(t) = \frac{d^k}{dt^k}\,y(t)$$

NEWTON (y: posizione, u: forza motrice)

$y^{(1)} =$ velocità $=$ non riesco a ottenerla come combinazione di $y^{(0)}, u^{(0)}$ e $u^{(1)}$

$$y^{(2)} = \frac{1}{m}(-hy^{(1)} + u) \quad \Rightarrow \quad \alpha_1 = \frac{h}{m},\ \alpha_2 = 0,\ \beta_0 = 0,\ \beta_1 = 0,\ \beta_2 = \frac{1}{m}$$

FIBONACCI ($y(t)$: totale coppie, $u(t)$: prelievo coppie adulte)

$y(t) = y(t-1) - u(t-1) \quad +$ coppie nate alla fine del mese $t-1$

$\downarrow$

coppie adulte nel mese $t-1$

$\downarrow$

totale coppie nel mese $t-2$ – prelievo a fine mese

$\downarrow$

$y(t-2) - u(t-2)$

In avanti nel tempo

$$y(t+2) - y(t+1) - y(t) = -u(t+1) - u(t)$$

$$\Rightarrow \quad \alpha_1 = -1,\ \alpha_2 = -1,\ \beta_0 = 0,\ \beta_1 = -1,\ \beta_2 = -1$$

Nota: solitamente, ci viene più naturale ragionare sulla formulazione interna

NOTAZIONE POLINOMIALE

simbolo p

- s (t.c.): rappresenta la derivata rispetto al tempo, $s\, y(t) = \frac{d}{dt} y(t) = y^{(1)}(t)$

  $s^k y(t) = \frac{d^k}{dt^k} y(t) = y^{(k)}(t)$

- z (t.d.): rappresenta l'anticipo di un passo, $z\, y(t) = y(t+1)$, $z^k y(t) = y(t+k)$

t.d. $y(t+n) + \alpha_1\, y(t+n-1) + \alpha_2\, y(t+n-2) + \cdots + \alpha_n\, y(t) =$
$\beta_0\, u(t+n) + \beta_1\, u(t+n-1) + \beta_2\, u(t+n-2) + \cdots + \beta_n\, u(t)$

t.c.: $y^{(n)}(t) + \alpha_1\, y^{(n-1)}(t) + \alpha_2\, y^{(n-2)}(t) + \cdots + \alpha_n\, y^{(0)}(t) =$
$\beta_0\, u^{(n)}(t) + \beta_1\, u^{(n-1)}(t) + \beta_2\, u^{(n-2)}(t) + \cdots + \beta_n\, u^{(0)}(t)$

$$p^n y(t) + \alpha_1 p^{n-1} y(t) + \cdots + \alpha_n y(t) = \beta_0 p^n u(t) + \beta_1 p^{n-1} u(t) + \cdots + \beta_n u(t)$$

$$\underbrace{(p^n + \alpha_1 p^{n-1} + \cdots + \alpha_n)}_{}\, y(t) = \underbrace{(\beta_0 p^n + \beta_1 p^{n-1} + \cdots + \beta_n)}_{}\, u(t)$$

$$D(p)\, y(t) = N(p)\, u(t)$$

NOTA: $D(p)$ è un polinomio di grado n *monico* (coefficiente del monomio di grado massimo = 1)

$N(p)$ è un polinomio di grado ≤ n.

Notazione sintetica: $D\, y = N\, u$

MODELLO ESTERNO: $D(p)\,y(t) \;=\; N(p)\,u(t)$

<u>FUNZIONE DI TRASFERIMENTO</u> (F.d.T., terza formulazione, SISO): $G(p) = \dfrac{N(p)}{D(p)}$

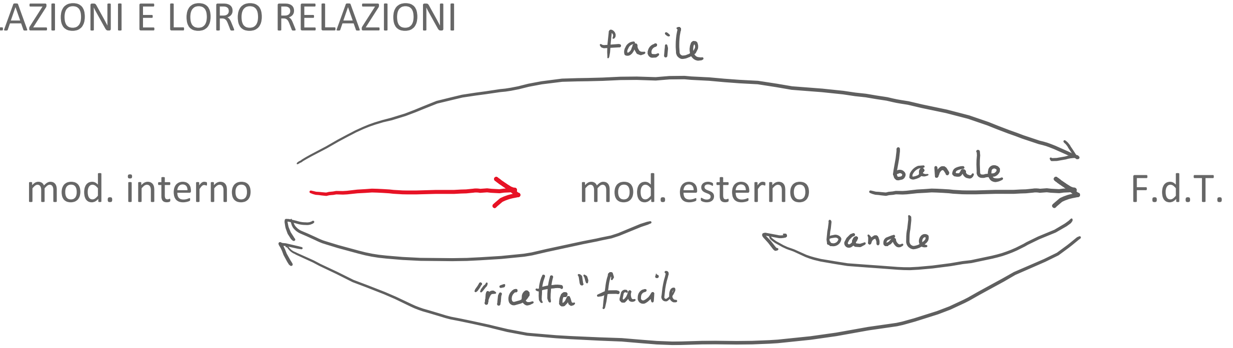
Notazione sintetica: $y = G\,u$

NOTA: cosa significa avere il simbolo *p* a denominatore?
Intuitivamente: t.c. $s^{-1}\,u(t) = \int_0^t u(\tau)d\tau$ e t.d. $z^{-1}\,u(t) = u(t-1)$
Ma dividere *u* per un polinomio in *p*?

Il significato corretto è in "frequenza": la F.d.T. è il fattore che lega le trasformate di Laplace (t.c.) e Z (t.d.) di *u* e *y*, dove *p* è la variabile complessa della trasformata, $Y(p) = G(p)U(p)$.
Nel dominio della frequenza, il legame tra *u* e *y* è algebrico!

Le trasformate descrivono il contributo al segnale di segnali base di tipo armonico (sin per la t. di Fourier; exp*sin per Laplace e Z). La variabile complessa *p* descrive il segnale base (exp e frequenza della parte sin); il numero complesso *U*(*p*) definisce il suo contributo in *u* (modulo = ampiezza; angolo = fase sin) e *G*(*p*) ci dice come questo contributo viene trasformato dal sistema nel corrispondente contributo a *y*.

TRE FORMULAZIONI E LORO RELAZIONI



DA MODELLO INTERNO A ESTERNO: i due classici esempi

NEWTON

ARMA: $y^{(2)} + \frac{h}{m} y^{(1)} = \frac{1}{m} u$ polinomi: $D(s) = s^2 + \frac{h}{m} s, N(p) = \frac{1}{m}$ fdt: $G(s) = \frac{1}{ms(s+h/m)}$

Procedura: sfruttando l'operatore *s*, l'eq. di stato diventa *algebrica*!
Vanno eliminate le variabili di stato dalla trasformazione d'uscita, risolvendo le *n* eq. di stato nelle *n* incognite x_i in funzione di *u*.

$s x_1 = x_2$

$s x_2 = -\frac{h}{m} x_2 + \frac{u}{m} \longrightarrow \left(s + \frac{h}{m}\right) x_2 = \frac{u}{m}$

$y = x_1 \longrightarrow$ moltiplico per s : $sy = s x_1 = x_2 \longrightarrow$ moltiplico per $\left(s + \frac{h}{m}\right)$: $s\left(s+\frac{h}{m}\right) y = \left(s + \frac{h}{m}\right) x_2 = \frac{u}{m}$

$\longrightarrow s^2 y + \frac{h}{m} s y = \frac{u}{m}$

FIBONACCI

ARMA: $y(t+2) - y(t+1) - y(t) = -u(t+1) - u(t)$

polinomi: $D(z) = z^2 - z - 1,\ \ N(p) = -z - 1$ fdt: $D(z) = -\frac{z+1}{z^2-z-1}$

Ricaviamo il modello ARMA dal modello interno, sfruttando l'operatore *z.*

$z x_1 = x_2$

$z x_2 = x_1 + x_2 - u \longrightarrow z^2 x_1 = x_1 + z x_1 - u \longrightarrow (z^2 - z - 1) x_1 = -u$

$y = x_1 + x_2 \longrightarrow y = x_1 + z x_1 = (z+1) x_1 \longrightarrow$ moltiplico per $(z^2 - z - 1)$

$\longrightarrow (z^2 - z - 1) y = (z+1)(z^2 - z - 1) x_1 = -(z+1) u$

$\longrightarrow (z^2 - z - 1) y = -(z+1) u$

DA MODELLO INTERNO A ESTERNO: considerazioni generali

$$p\,x = A\,x + b\,u$$
$$y = c^T x + d\,u$$

NOTA: grazie al simbolo p l'equazione di stato diventa (formalmente) *algebrica*

OBIETTIVO: eliminare la x dalla trasformazione d'uscita, sfruttando l'equazione di stato

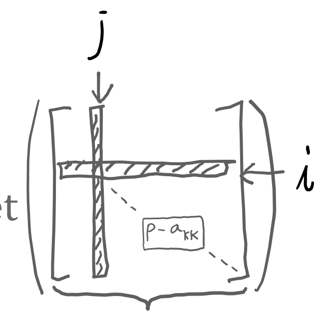
$$(pI - A)x = b\,u \quad \Rightarrow \quad x = (pI - A)^{-1} b\,u$$

NOTA: la matrice n x n $(pI - A)$ è sempre invertibile perché p è un simbolo

$\det(pI - A) = \Delta_A(p)$ polinomio caratteristico di A nella variabile p

$(pI - A)^{-1} = \dfrac{\mathrm{Cof}^T(p)}{\Delta_A(p)}$, Cof($p$): matrice dei cofattori, $\mathrm{Cof}_{ij}(p) = (-1)^{i+j}\det$

$\mathrm{Cof}_{ij}(p)$ è un polinomio di grado al più $n-1$



$(pI - A)$

$$\Rightarrow \quad \Delta_A\, y = (\overbrace{c^T \mathrm{Cof}^T b + d\Delta_A}^{N_A})u$$ (nota: Δ_A non dipende dalla coppia ingresso-uscita considerata)

$\Rightarrow$ $D = \Delta_A$ e $N = N_A$, è corretto? SI' se l'ordine dei modelli interno ed esterno coincidono

NEWTON

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{h}{m} \end{bmatrix} \quad \Delta_A(p) = p^2 - \mathrm{tr}(A)\,p + \det(A) = p^2 + \frac{h}{m}\,p$$

FIBONACCI

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \Delta_A(p) = p^2 - p - 1$$

DA MODELLO INTERNO A ESTERNO: considerazioni generali

$$p\,x = A\,x + b\,u$$
$$y = c^T x + d\,u$$

NOTA: grazie al simbolo p l'equazione di stato diventa (formalmente) *algebrica*

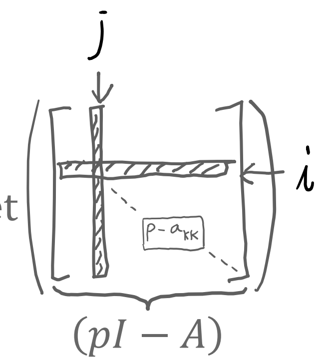
OBIETTIVO: eliminare la x dalla trasformazione d'uscita, sfruttando l'equazione di stato

$$(pI - A)x = b\,u \quad \Rightarrow \quad x = (pI - A)^{-1} b\,u$$

NOTA: la matrice n x n $(pI - A)$ è sempre invertibile perché p è un simbolo

$\det(pI - A) = \Delta_A(p)$ polinomio caratteristico di A nella variabile p

$(pI - A)^{-1} = \dfrac{\mathrm{Cof}^T(p)}{\Delta_A(p)}$, Cof($p$): matrice dei cofattori, $\mathrm{Cof}_{ij}(p) = (-1)^{i+j}\det$



$\mathrm{Cof}_{ij}(p)$ è un polinomio di grado al più $n-1$

$\Rightarrow$ $\Delta_A\, y = (\overbrace{c^T \mathrm{Cof}^T b + d\Delta_A}^{N_A})u$ (nota: Δ_A non dipende dalla coppia ingresso-uscita considerata)

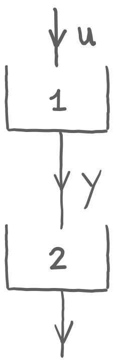
$\Rightarrow$ $D = \Delta_A$ e $N = N_A$, è corretto? SI' se l'ordine dei modelli interno ed esterno coincidono

NO, se il modello esterno ha ordine inferiore di quello interno. Significa che si riesce a eliminare la x dalla trasformazione d'uscita con un polinomio D di grado inferiore a Δ_A, ovvero sfruttando soluzioni $x_i = (\ldots)u$ con a denominatore polinomi con solo parte delle radici di Δ_A.

$\Rightarrow$ il modello corretto è quello che fa uso del polinomio D di grado minimo

Vediamolo attraverso due semplici esempi

ESEMPIO 1



$$\dot{x}_1 = u - k_1 x_1$$
$$\dot{x}_2 = k_1 x_1 - k_2 x_2$$
$$y = k_1 x_1$$

$$A = \begin{bmatrix} -k_1 & 0 \\ k_1 & -k_2 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$
$$c^T = \begin{bmatrix} k_1 & 0 \end{bmatrix} \quad d = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$$

Nota 1: la variabile d'uscita *y* è la portata uscente dal serbatoio 1. Dal punto di vista fisico, la portata uscente dal serbatoio 2 è l'uscita del sistema, nel senso di acqua che abbandona il sistema, ma non viene misurata.

Nota 2: la variabile di stato x_2 non influenza l'uscita *y*, quindi ci aspettiamo un modello esterno del primo ordine.

Invertendo $(sI - A)$

$$(sI - A) = \begin{bmatrix} s+k_1 & 0 \\ -k_1 & s+k_2 \end{bmatrix} \qquad Cof^T = \begin{bmatrix} s+k_2 & 0 \\ k_1 & s+k_1 \end{bmatrix}$$

$$\Delta_A(s) = (s+k_1)(s+k_2)$$

$$N_A(s) = c^T Cof^T b + d\,\Delta_A = k_1(s+k_2)$$

Conti "per sostituzione"

$$s x_1 = u - k_1 x_1 \longrightarrow (s+k_1)\, x_1 = u$$
$$s x_2 = k_1 x_1 - k_2 x_2$$
$$y = k_1 x_1 \longrightarrow \text{moltiplico per } (s+k_1):$$
$$(s+k_1)\, y = k_1 (s+k_1)\, x_1 = k_1 u$$
$$\underbrace{(s+k_1)}_{D}\, y = \underbrace{k_1}_{N} u$$

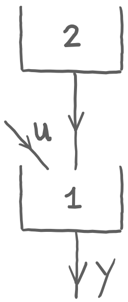
Nota 3: *D* è una parte di Δ_A (le sue radici sono un sottoinsieme di quelle di Δ_A; *D* divide Δ_A).

Nota 4: La radice di Δ_A che non è in *D* è radice anche di N_A. E' generale questo fatto? SI'

Idea: se, a conti fatti, trovo radici comuni tra *N* e *D*, posso eliminarle per ottenere i polinomi corretti?

NO, vedi prossimo esempio

ESEMPIO 2



$$\dot{x}_1 = u + k_2 x_2 - k_1 x_1$$
$$\dot{x}_2 = -k_2 x_2$$
$$y = k_1 x_1$$

$$A = \begin{bmatrix} -k_1 & k_2 \\ 0 & -k_2 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$
$$c^T = \begin{bmatrix} k_1 & 0 \end{bmatrix} \quad d = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$$

Nota 1: la numerazione dei serbatori è scelta in analogia all'esempio 1, per avere ingresso e uscita nel/dal serbatoio 1.

Nota 2: la variabile di stato x_2 influenza l'uscita y, ma non è influenzata dall'ingresso u. Vediamo questo cosa comporta…

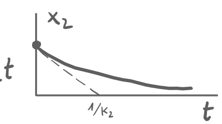
Invertendo $(sI - A)$

$$(sI - A) = \begin{bmatrix} s+k_1 & -k_2 \\ 0 & s+k_2 \end{bmatrix} \qquad Cof^T = \begin{bmatrix} s+k_2 & k_2 \\ 0 & s+k_1 \end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} \Delta_A(s) &= (s+k_1)(s+k_2) \\ N_A(s) &= c^T Cof^T b + d\Delta_A = k_1(s+k_2) \end{aligned}\right\} = \text{es. } 1$$

Conti "per sostituzione"

$$s x_1 = u + k_2 x_2 - k_1 x_1 \longrightarrow (s+k_1) x_1 = u + k_2 x_2$$
$$s x_2 = -k_2 x_2 \longrightarrow (s+k_2) x_2 = 0 \;\not\longrightarrow\; x_2 = 0$$
$$\hookrightarrow \dot{x}_2 = -k_2 x_2$$
$$x_2(t) = x_2(0) e^{-k_2 t}$$



$$y = k_1 x_1$$

moltiplico per $(s+k_1)$:

$$(s+k_1) y = k_1 (s+k_1) x_1 = k_1 u + k_1 k_2 x_2$$

moltiplico per $(s+k_2)$:

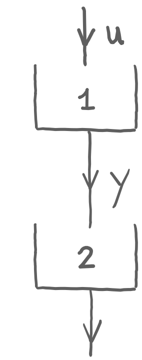
$$\underbrace{(s+k_1)(s+k_2)}_{D} y = \underbrace{k_1(s+k_2)}_{N} u + k_1 k_2 \underbrace{(s+k_2) x_2}_{0}$$

CONCLUSIONI GENERALI

1) L'ordine del modello ARMA (grado di D) è ≤ di quello del modello interno (dimensione matrice A)
Diciamo che D è "contenuto" in (divide) Δ_A, ovvero le sue radici sono autovalori di A.

$$D \subseteq \underbrace{\Delta_A}_{D \cdot R}, \quad N \subseteq N_A = \underbrace{c^T \mathrm{Cof}^T b + d\,\Delta_A}_{N \cdot R}$$

$\rightarrow R$: polinomio (monico) delle radici "sbagliate"

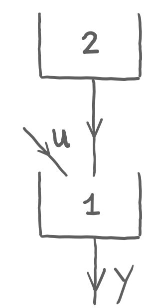


Vale il "contenuto stretto" (vedi es.1) quando nel sistema ci sono delle variabili di stato (o loro combinazioni) che non hanno influenza sull'uscita.
Il loro numero coincide con il grado di R.
Si dice che ci sono variabili (o parti) del sistema *non osservabili.*

2) Ci possono essere radici in comune tra N e D

$$\rightarrow N = n \cdot r, \quad D = d \cdot r$$

r : polinomio (monico) delle radici comuni



Ciò accade (vedi es.2) quando nel sistema ci sono delle variabili di stato (o loro combinazioni) che influenzano l'uscita ma non sono influenzate dall'ingresso.
Il loro numero coincide con il grado di r.
Si dice che ci sono variabili (o parti) del sistema *osservabili ma non raggiungibili.*

3) Le radici "sbagliate" aggiungono delle soluzioni al modello che non esistono nel sistema fisico.
Infatti, il modello ARMA "sbagliato" dell'es.1 ha le soluzioni dell'es.2. Se $x_2(0) \neq 0$, la sol. non esiste nel sistema fisico (p.e.: $u(t) = 0$, $t \geq 0$, $x_1(0) = 0$, $x_2(0) = 1$; la sol. corretta è $y(t) = 0$).

TRE FORMULAZIONI E LORO RELAZIONI

$$
\begin{tikzcd}[column sep=huge]
\text{mod. interno} \arrow[r] \arrow[rr, bend left=40, "\text{facile}"] & \text{mod. esterno} \arrow[r, "\text{banale}"] \arrow[l, bend left=30] & \text{F.d.T.} \arrow[l, bend left=30, "\text{banale}"'] \arrow[ll, bend left=45, "\text{``ricetta'' facile}"']
\end{tikzcd}
$$

FUNZIONE DI TRASFERIMENTO (F.d.T., ce n'è una per ogni coppia (y_i, u_j)))

$$G(p) = \frac{N(p)}{D(p)} = \frac{n(p)}{d(p)} \quad \left(= \frac{c^T \mathrm{Cof}^T(p)\, b + d\Delta_A(p)}{\Delta_A(p)} = c^T(pI - A)^{-1}b + d \right)$$

NOTA: il modello ARMA $d\, y = n\, u$ è detto (per analogia) *di trasferimento*

coincide col modello ARMA se N e D sono *coprimi* (senza radici in comune)

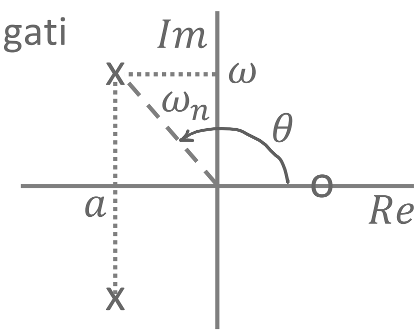
zeri e *poli*: radici di $n(p)$ e $d(p)$. In particolare, i poli sono autovalori di A (non necessariamente tutti!)

grado relativo: $r = $ #*poli* $-$ #*zeri*

indicando con n il #*poli* (sebbene possa essere < ordini di modello interno e ARMA), possiamo scrivere

$$G(p) = \frac{\beta_r p^{n-r} + \beta_{r+1} p^{n-r-1} + \cdots + \beta_{n-1} p + \beta_n}{p^n + \alpha_1 p^{n-1} + \cdots + \alpha_{n-1} p + \alpha_n} = \beta_r \frac{(p-z_1)(p-z_2)\ldots(p-z_{n-r})}{(p-p_1)(p-p_2)\ldots(p-p_n)}$$

NOTA: *zeri* (pallini) e *poli* (crocette) possono essere a coppie complessi coniugati



$$p_k = a + i\omega = \omega_n e^{i\theta} = \omega_n\,(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$$

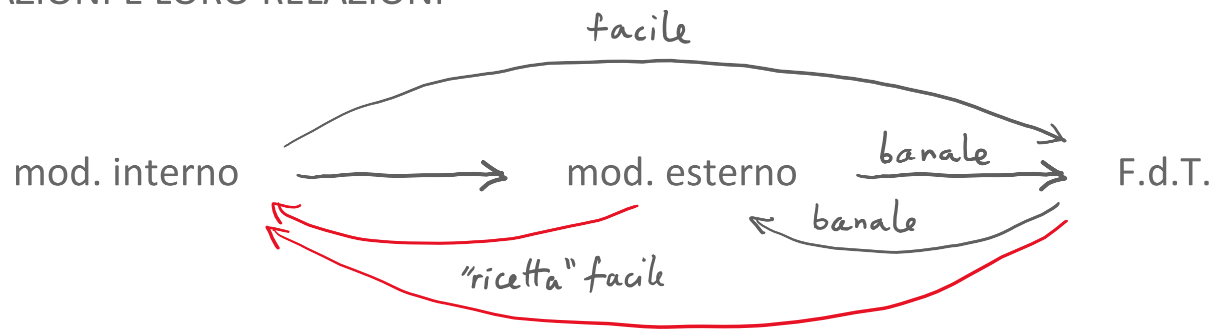
t.c.: smorzamento $\xi = \cos(\pi - \theta)$, *pulsazione naturale* $\omega_n = |p_k|$

$$(s - p_k)(s - \bar{p}_k) = s^2 - 2as + |p_k|^2 = s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2$$

NEWTON: $G(s) = \frac{1}{ms(s+h/m)}$ zeri: nessuno, poli: $p_1 = 0$ e $p_2 = -\frac{h}{m}$

FIBONACCI: $D(z) = -\frac{z+1}{z^2-z-1}$ zeri: $z_1 = -1$, poli: $p_{1,2} = (1 \pm \sqrt{5})/2$ (+: sezione aurea)

TRE FORMULAZIONI E LORO RELAZIONI



PASSAGGIO DA MODELLO ESTERNO A INTERNO (*Realizzazione* del modello ARMA)

Una "ricetta": la forma canonica di *ricostruzione*

ARMA: $(p^n + \alpha_1 p^{n-1} + \cdots + \alpha_n)\, y(t) = (\beta_0 p^n + \beta_1 p^{n-1} + \cdots + \beta_n)\, u(t)$

$$\mathbf{A}_r = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -\alpha_n \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -\alpha_{n-1} \\ 0 & 1 & \dots & 0 & -\alpha_{n-2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -\alpha_1 \end{vmatrix} \qquad \mathbf{b}_r = \begin{vmatrix} \gamma_n \\ \gamma_{n-1} \\ \gamma_{n-2} \\ \vdots \\ \gamma_1 \end{vmatrix}$$

$$\mathbf{c}_r^T = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix} \qquad \mathrm{d}_r = \begin{vmatrix} \beta_0 \end{vmatrix}$$

$$\gamma_i = \beta_i - \beta_0 \alpha_i$$

Che variabili di stato utilizza?

Trasformazione d'uscita: $y = z_n + \beta_0 u$

$$\Rightarrow \quad z_n = y - \beta_0 u$$

$$z_{n-1} = (p + \alpha_1)\, y - (\beta_0 p + \beta_1)\, u$$

$$\vdots$$

$$z_i = (p^{n-i} + \alpha_1 p^{n-i-1} + \cdots + \alpha_{n-i})\, y - (\beta_0 p^{n-i} + \beta_1 p^{n-i-1} + \cdots + \beta_{n-i})\, u$$

$$\vdots$$

$$z_1 = (p^{n-1} + \alpha_1 p^{n-2} + \cdots + \alpha_{n-1})\, y - (\beta_0 p^{n-1} + \beta_1 p^{n-2} + \cdots + \beta_{n-1})\, u$$

NOTA 1: le variabili di stato sono combinazioni di $y(t)$ e $u(t)$ e loro derivate a t.c. o anticipi a t.d., $p^k y(t)$ (p.e., nella formulazione interna di Newton: posizione $x_1 = y$ e velocità $x_2 = \mathrm{d}y/\mathrm{d}t$).

NOTA 2: Può sembrare che contengano valori futuri di y e u (t.d. $py(t) = y(t+1)$), ma non è così. Grazie al legame del mod. ARMA sono combinazioni che dipendono dal passato di y e u. Vediamolo…

ARMA: $(p^n + \alpha_1 p^{n-1} + \cdots + \alpha_n)\, y(t) = (\beta_0 p^n + \beta_1 p^{n-1} + \cdots + \beta_n)\, u(t)$

ARMA/p^n: $(1 + \alpha_1 p^{-1} + \cdots + \alpha_n p^{-n})\, y(t) = (\beta_0 + \beta_1 p^{-1} + \cdots + \beta_n p^{-n})\, u(t)$

$$z_n = y - \beta_0 u = \underbrace{-(\alpha_1 p^{-1} + \cdots + \alpha_n p^{-n}) y(t) + (\beta_1 p^{-1} + \cdots + \beta_n p^{-n})\, u(t)}_{\text{passato (potenze neg. di } p\text{)}}$$

ARMA/p^{n-1}: $(p + \alpha_1 + \alpha_2 p^{-1} + \cdots + \alpha_n p^{-(n-1)}) y = (\beta_0 p + \beta_1 + \beta_2 p^{-1} + \cdots + \beta_n p^{-(n-1)}) u$

$$z_{n-1} = (p + \alpha_1) y - (\beta_0 p + \beta_1) u = -(\alpha_2 p^{-1} + \cdots + \alpha_n p^{-(n-1)}) y$$
$$+ (\beta_2 p^{-1} + \cdots + \beta_n p^{-(n-1)}) u$$

⋮

ARMA/p: $(p^{n-1} + \alpha_1 p^{n-2} + \cdots + \alpha_{n-1} + \alpha_n p^{-1}) y$
$$= (\beta_0 p^{n-1} + \beta_1 p^{n-2} + \cdots + \beta_{n-1} + \beta_n p^{-1}) u$$

$$z_1 = (p^{n-1} + \alpha_1 p^{n-2} + \cdots + \alpha_{n-1}) y - (\beta_0 p^{n-1} + \beta_1 p^{n-2} + \cdots + \beta_{n-1}) u$$
$$= -\alpha_n p^{-1} y + \beta_n p^{-1} u$$

Verifica delle eq. di stato:

$$z_i = (p^{n-i} + \alpha_1 p^{n-i-1} + \cdots + \alpha_{n-i})\, y$$
$$-(\beta_0 p^{n-i} + \beta_1 p^{n-i-1} + \cdots + \beta_{n-i})\, u$$

$$A_r = \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}\begin{array}{cccccc} & i-1\downarrow & & n-1\downarrow & & \\ \end{array}$$

$$A_r = \left[\begin{array}{ccccccc} 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & -\alpha_n \\ \vdots & \ddots & \vdots & & & & \vdots \\ 0 & & 1 & 0 & \cdots & 0 & -\alpha_{n-i+1} \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & & 1 & -\alpha_1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \leftarrow 1 \\ \vdots \\ \leftarrow i \\ \vdots \\ \leftarrow n \end{array} \qquad b_r = \begin{bmatrix} \gamma_n \\ \vdots \\ \gamma_{n-i+1} \\ \vdots \\ \gamma_1 \end{bmatrix}$$

$$\gamma_i = \beta_i - \beta_0 \alpha_i$$

$$p z_i = p(p^{n-i} + \alpha_1 p^{n-i-1} + \cdots + \alpha_{n-i})\, y - p(\beta_0 p^{n-i} + \beta_1 p^{n-i-1} + \cdots + \beta_{n-i})\, u$$

$$= (p^{n-i+1} + \alpha_1 p^{n-i} + \cdots + \alpha_{n-i} p + \alpha_{n-i+1} - \alpha_{n-i+1})\, y$$

$$-(\beta_0 p^{n-i+1} + \beta_1 p^{n-i} + \cdots + \beta_{n-i} p + \beta_{n-i+1} - \beta_{n-i+1})\, u$$

ARMA

$$i > 1: = z_{i-1} - \alpha_{n-i+1}\underbrace{(z_n + \beta_0 u)}_{y} + \beta_{n-i+1} u = z_{i-1} - \alpha_{n-i+1} z_n + \underbrace{(\beta_{n-i+1} - \beta_0 \alpha_{n-i+1})}_{\gamma_{n-i+1}}\, u$$

$$i = 1: = 0 - \alpha_n \underbrace{(z_n + \beta_0 u)}_{y} + \beta_n u = -\alpha_n z_n + \underbrace{(\beta_n - \beta_0 \alpha_n)}_{\gamma_n}\, u$$

NEWTON: $\alpha_1 = \frac{h}{m},\ \alpha_2 = 0,\ \beta_0 = 0,\ \beta_1 = 0,\ \beta_2 = \frac{1}{m}$

$$A_r = \begin{bmatrix} 0 & -\alpha_2 \\ 1 & -\alpha_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -\frac{h}{m} \end{bmatrix} \qquad b_r = \begin{bmatrix} \beta_2 \\ \beta_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{m} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$c_r^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad d_r = \beta_0 = 0$$

$$z_1 = \dot{y} + \alpha_1 y - \beta_0 \dot{u} - \beta_1 u = \dot{y} + \frac{h}{m} y$$

$$z_2 = y - \beta_0 u = y$$

Nota: le z_i di solito non sono le variabili di stato x_i scelte nella formulazione interna, ma sono una buona scelta di stato. Ciò significa che c'è un legame lineare invertibile tra le z e le x:

$$z_1 = \dot{y} + \frac{h}{m} y = x_2 + \frac{h}{m} x_1$$

$$z_2 = y = x_1$$

$$\rightarrow \quad z = Tx \qquad T = \begin{bmatrix} \frac{h}{m} & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$x = T^{-1} z \qquad T^{-1} = \frac{1}{-1} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & \frac{h}{m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -\frac{h}{m} \end{bmatrix}$$

La trasformazione $z = Tx$ (T: matrice $n \times n$ non singolare) è un <u>cambio di variabili di stato</u>. Corrisponde ad un cambio di coordinate (di base) nello spazio di stato.

Nota: ci sono quindi infinite scelte di variabili di stato, una per ogni possibile matrice di trasformazione T, a partire da una data scelta x. A partire da tutte le corrispondenti realizzazioni (A, b, c^T, d) si ottiene lo stesso modello esterno $Dy=Nu$.

FIBONACCI: $\alpha_1 = -1,\ \alpha_2 = -1,\ \beta_0 = 0,\ \beta_1 = -1,\ \beta_2 = -1$

$$A_r = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad b_r = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$c_r^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \quad d_r = 0$$

$$z_1(t) = y(t+1) + \alpha_1 y(t) - \beta_0 u(t+1) - \beta_1 u(t)$$
$$= y(t+1) - y(t) + u(t)$$

$$z_2(t) = y(t) - \beta_0 u(t) = y(t)$$

Legame tra le *z* e le *x*:

$$z_1(t) = y(t+1) - \underbrace{\left(y(t) - u(t)\right)}_{\text{coppie presenti al mese } t \text{ che restano al mese } t+1} = \text{coppie nate alla fine del mese } t$$
$$= \text{coppie adulte nel mese } t = x_2(t)$$

$$z_2(t) = y(t) = x_1(t) + x_2(t)$$

$$\rightarrow \quad z = Tx \qquad x = T^{-1}z \qquad T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},\ T^{-1} = \frac{1}{-1}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Nota: ricordiamoci anche la formulazione con x_1=totale coppie e x_2=coppie adulte. Ricavare la *T*.

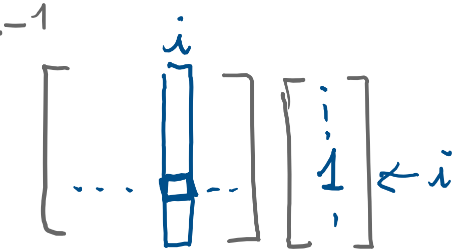
IL CAMBIO DI VARIABILI (DI STATO): interpretazione geometrica

$$z = Tx \qquad x = T^{-1}z$$

Colonne di T^{-1}

$$z = e^{(i)} = \begin{array}{c}\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}\end{array} \begin{array}{c} \\ \\ \\ \leftarrow i \\ \\ \\ \\ \end{array} \Rightarrow x = T^{-1}e^{(i)} = i\text{-esima colonna di } T^{-1}$$

versore asse z_i
espresso nelle
coordinate x



Righe di T: combinazione di x che definisce z_i

$$z_i = [\text{riga } i\text{-esima di } T] \cdot x$$

$$\frac{\partial z_i}{\partial x} = \nabla z_i = \text{riga } i\text{-esima di } T$$

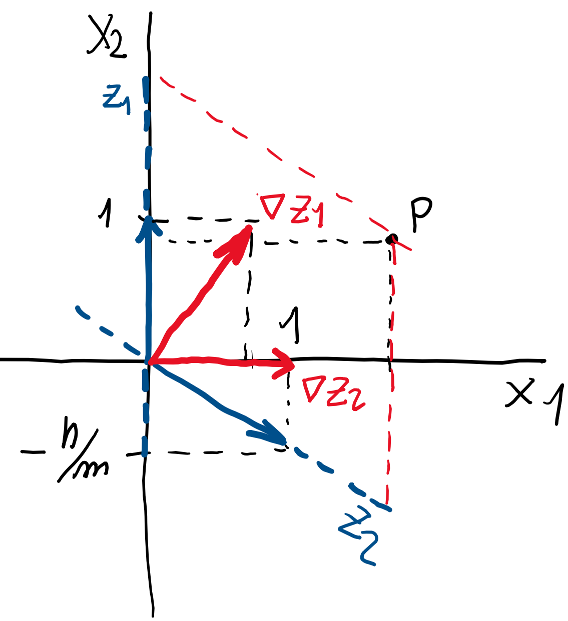
$\perp$ alle linee di livello di z_i

$\perp$ agli assi $z_j,\ j \neq i$

NEWTON:

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -\frac{h}{m} \end{bmatrix}$$

$$T = \begin{bmatrix} \frac{h}{m} & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$



COME CAMBIANO LE EQUAZIONI DEL SISTEMA

$$pz = Tpx = T(Ax+bu) = \underbrace{TAT^{-1}}_{\tilde{A}} z + \underbrace{Tb}_{\tilde{b}} u$$

$$y = c^T x + du = \underbrace{c^T T^{-1}}_{\tilde{c}^T} z + du$$

Nota: calcolando il modello ARMA o la FdT a partire da queste equazioni (con le matrici "tilde"), si ottiene lo stesso risultato ottenuto con le variabili x (con le matrici A, b, c^T, d).

$$G(p) = c^T (pI - A)^{-1} b + d$$

$$\tilde{G}(p) = c^T T^{-1} \underbrace{(\overset{TpT^{-1}}{\overbrace{pI}} - TAT^{-1})^{-1}}_{(T(pI-A)T^{-1})^{-1} = T(pI-A)^{-1}T^{-1}} Tb + d = c^T \cancel{T^{-1}} \cancel{T} (pI-A)^{-1} \cancel{T^{-1}} \cancel{T} b = G(p)$$

In particolare i polinomi caratteristici di A e TAT^{-1} coincidono (sono matrici simili).

$$\Delta_{\tilde{A}}(p) = \det(\overset{TpT^{-1}}{\overbrace{pI}} - TAT^{-1}) = \det(T(pI-A)T^{-1}) = \cancel{\det}(T) \det(pI-A) \cancel{\det}(T^{-1}) = \Delta_A(p)$$

RIASSUMENDO…

MODELLO INTERNO (per sistema SISO):

t.c.: $\dot{x} = A\,x + b\,u$

t.d.: $x(t+1) = A\,x(t) + b\,u(t)$

$$y(t) = c^T x(t) + d\,u(t)$$

MODELLO ESTERNO (ARMA):

$$\underbrace{(p^n + \alpha_1 p^{n-1} + \cdots + \alpha_n)}_{D(p)}\, y(t) = \underbrace{(\beta_0 p^n + \beta_1 p^{n-1} + \cdots + \beta_n)}_{N(p)}\, u(t)$$

FUNZIONE DI TRASFERIMENTO (F.d.T.)

$$G(p) = \frac{N(p)}{D(p)} = \frac{n(p)}{d(p)} \qquad \left(= \frac{c^T \mathrm{Cof}^T(p)\, b + d\Delta_A(p)}{\Delta_A(p)} = c^T (pI - A)^{-1} b + d \right)$$

TRE FORMULAZIONI E LORO RELAZIONI

$$\begin{tikzcd}
\text{mod. interno} \arrow[r] \arrow[rr, bend left, "\text{facile}"] & \text{mod. esterno} \arrow[r, "\text{banale}"] \arrow[l, bend left] & \text{F.d.T} \arrow[l, bend left, "\text{banale}"] \arrow[ll, bend left, "\text{“ricetta” facile}"]
\end{tikzcd}$$