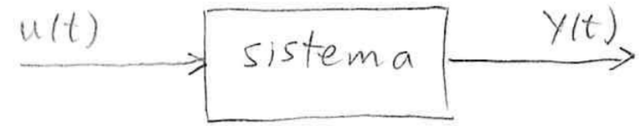
SISTEMA "FISICO" E SUO MODELLO MATEMATICO

Ogni blocco di uno schema a blocchi rappresenta un sistema fisicamente esistente, per es. il processo in un sistema di controllo (gli studenti in aula, il corpo umano, la sala cinematografica, il lago), ma anche il suo modello matematico.



Consideriamo

m variabili d'ingresso: $u_1(t)$, $u_2(t)$,…, $u_m(t)$

(per es. se $m = 2$, la variabile di controllo e un disturbo:
voce del docente e rumore esterno all'aula;
il comando dei muscoli e la forza peso;
la portata d'aria condizionata e la temperatura esterna;
l'apertura della diga e le precipitazioni)

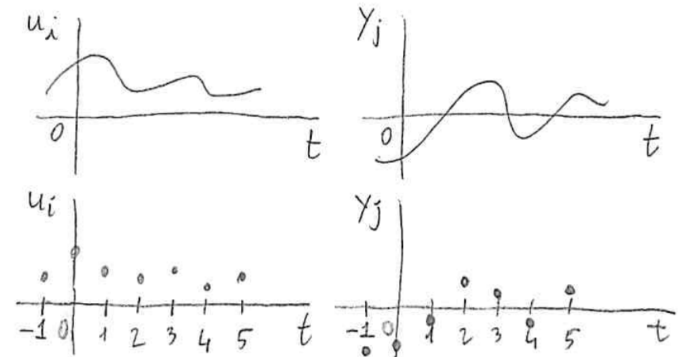
$$u(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ \vdots \\ u_m(t) \end{bmatrix}, \quad y(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_p(t) \end{bmatrix}$$

$u(t) \in \boldsymbol{R}^m$, $y(t) \in \boldsymbol{R}^p$,

p variabili d'uscita: $y_1(t)$, $y_2(t)$,…, $y_p(t)$

(per es. se $p = 2$, la variabile controllata e un'altra variabile caratteristica:
attenzione degli studenti e loro fame; posizione e velocità di un arto; temperatura e umidità della sala, livello e concentrazione di un inquinante)

Sono segnali che variano nel tempo t
- continuo (t.c.), $t \in \boldsymbol{R}$
- discreto (t.d.), $t \in \boldsymbol{Z}$



La scelta t.c. / t.d. è dettata dalla natura del segnale o da scelte modellistiche.

$u(t)$ e $y(t)$ sono dette <u>variabili esterne</u>.
Il sistema può avere altri ingressi (il cui effetto è trascurato) e altre variabili caratteristiche non misurate.

MODELLO MATEMATICO: a partire dalle variabili esterne e sfruttando la conoscenza del sistema fisico, vogliamo formulare un legame matematico tra ingresso $u(t)$ e uscita $y(t)$.

Nota: un modello (matematico) è per definizione una descrizione parziale e mai esatta della realtà.
Un modello descrive gli aspetti del sistema fisico rilevanti agli scopi per cui il modello è sviluppato, trascurando altri aspetti.

DUE CLASSI FONDAMENTALI

MODELLO (SISTEMA) NON DINAMICO (ALGEBRICO)

Definisce un legame istantaneo (valido in ogni t) tra l'ingresso $u(t)$, ed eventualmente l'istante di tempo t, e l'uscita $y(t)$

$$y(t) = g(u(t), t)$$

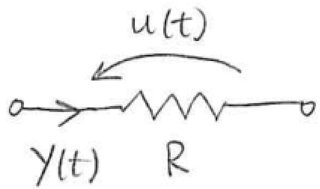
dove g è un vettore di p funzioni (una funzione a valore vettoriale)

$$g(u,t) = \begin{bmatrix} g_1(u,t) \\ \vdots \\ g_p(u,t) \end{bmatrix}$$

ciascuna dipendente da due argomenti (u, t).
Il primo è il vettore $u \in \boldsymbol{R}^m$ dei valori correnti degli ingressi; il secondo, opzionale, è l'istante t.

DINAMICO

ESEMPIO DI MODELLO NON DINAMICO: la legge di Ohm ($m=p=1$)



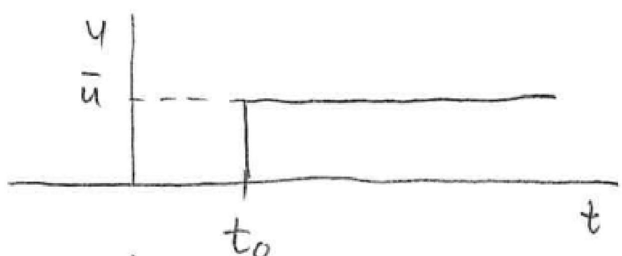
$$y(t) = \frac{u(t)}{R}, \quad g(u,t) = \frac{u}{R}$$

g non dipende da *t*

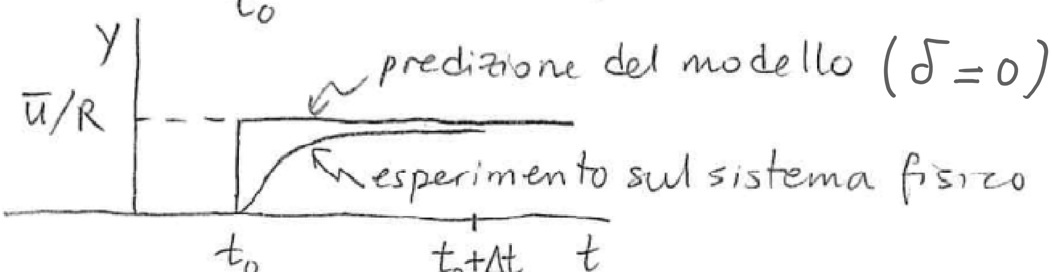
Se la resistenza *R* cambia nel tempo, p.e. perché sensibile all'escursione giornaliera di temperatura, allora *g* dipende da *t*

$$y(t) = \frac{u(t)}{R_0 + \delta \sin(\omega t + \varphi)}, \quad g(u,t) = \frac{u}{R_0 + \delta \sin(\omega t + \varphi)}, \quad R_0, \delta, \omega > 0$$

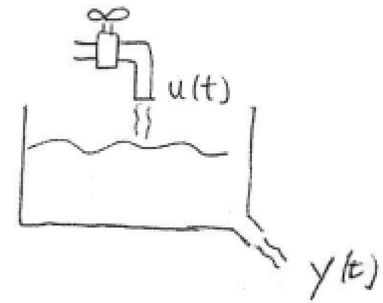
Nota: il modello non è la realtà…



Δ*t* è sufficientemente piccolo da poter essere trascurato in molte applicazioni. La legge di Ohm è quindi un buon modello ed è infatti molto usato



ESEMPIO DI MODELLO DINAMICO (a t.c.): un serbatoio ($m = p = 1$)



u(t) : portata entrante [Kg/s]

y(t) : portata uscente [Kg/s]

Domanda 1: se conosco $u(t)$ (oltre che l'istante t e la fisica del sistema), posso determinare y(t)? NO

MODELLO MATEMATICO: a partire dalle variabili esterne e sfruttando la conoscenza del sistema fisico, vogliamo formulare un legame matematico tra ingresso $u(t)$ e uscita $y(t)$.

Nota: un modello (matematico) è per definizione una descrizione parziale e mai esatta della realtà. Un modello descrive gli aspetti del sistema fisico rilevanti agli scopi per cui il modello è sviluppato, trascurando altri aspetti.

DUE CLASSI FONDAMENTALI

MODELLO (SISTEMA) NON DINAMICO (ALGEBRICO)

Definisce un legame istantaneo (valido in ogni t) tra l'ingresso $u(t)$, ed eventualmente l'istante di tempo t, e l'uscita $y(t)$

$$y(t) = g(u(t), t)$$

dove g è un vettore di p funzioni (una funzione a valore vettoriale)

$$g(u,t) = \begin{bmatrix} g_1(u,t) \\ \vdots \\ g_p(u,t) \end{bmatrix}$$

ciascuna dipendente da due argomenti (u, t).
Il primo è il vettore $u \in \boldsymbol{R}^m$ dei valori correnti degli ingressi; il secondo, opzionale, è l'istante t.

DINAMICO

L'uscita $y(t)$ dipende anche dal valore di alcune variabili interne che descrivono lo stato del sistema all'istante t, dette variabili di stato.

$$y(t) = g(x(t), u(t), t) \qquad x(t) \in \boldsymbol{R}^n$$

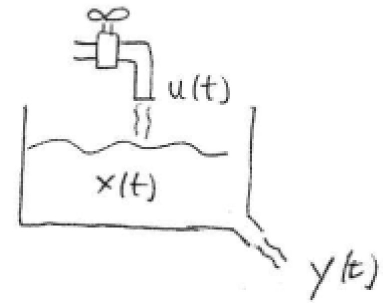
trasformazione d'uscita

$$g(x,u,t) = \begin{bmatrix} g_1(x,u,t) \\ \vdots \\ g_p(x,u,t) \end{bmatrix} \qquad x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}$$

$n \geq 1$ è detto ordine o dimensione del sistema.

L'idea è che lo stato x all'istante t riassuma l'effetto sull'uscita dei valori passati dell'ingresso (e dello stato stesso). Lo stato definisce quindi il legame dinamico tra ingresso e uscita.

ESEMPIO DI MODELLO DINAMICO (a t.c.): un serbatoio ($m = p = 1$)



$u(t)$: portata entrante [Kg/s]

$y(t)$: portata uscente [Kg/s]

Domanda 1: se conosco $u(t)$ (oltre che l'istante t e la fisica del sistema), posso determinare y(t)? NO

Domanda 2: quali variabili di stato mi serve conoscere per determinare y(t)?

$x(t)$: massa d'acqua contenuta [Kg]

$y(t) = k\,x(t) \longrightarrow g(x,u,t) = k\,x$

(g non dipende da t e nemmeno da u)

y(t) è proporzionale alla pressione sul fondo, che è proporzionale al livello, e quindi alla massa se l'area della sezione è costante; k è un parametro costante (coefficiente di deflusso del serbatoio)

Domanda 3: la scelta fatta per $x(t)$ è sufficiente per definire lo stato del sistema? Sì se riesco a definire una regola di aggiornamento dello stato. Prima di vedere come, vediamo un

ESEMPIO DI MODELLO DINAMICO (a t.d.): un conto corrente ($m = p = 1$)

$u(t)$: deposito netto giornaliero (deposito − prelievo)

$y(t)$: ammontare al mattino (prima di prelievo/deposito)

$x(t) = y(t) \longrightarrow g(x,u,t) = x$ (scelta banale; g non dipende da t e nemmeno da u)

EQUAZIONE DI (AGGIORNAMENTO DELLO) STATO

Lo stato $x(t)$, all'istante t, caratterizza l'effetto sul valore d'uscita $y(t)$ dei valori passati di ingresso e stato stesso.

Pertanto, noto lo stato $x(t_0)$ ad un <u>istante iniziale</u> t_0 e noto il segnale d'ingresso nell'intervallo $[t_0, t)$ che va dall'istante iniziale a quello <u>finale</u> t escluso ($t > t_0$), deve essere possibile determinare lo stato $x(t)$.

Come si fa? Formulando l'<u>equazione di stato</u>

t.c.: <u>equazioni differenziali</u> t.d.: <u>equazioni alle differenze</u>

$$\frac{d}{dt}x(t) = \dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t) \qquad x(t+1) = f(x(t), u(t), t)$$

$$f(x,u,t) = \begin{bmatrix} f_1(x,u,t) \\ \vdots \\ f_n(x,u,t) \end{bmatrix}$$

Domanda 3: la scelta di $x(t)$ è una buona definizione di stato?

Sì se riesco a definire f, altrimenti devo aggiungere delle variabili di stato.

ESEMPI: serbatoio ($n = 1$) conto corrente ($n = 1$)

$\dot{x} = u - kx \qquad f(x,u,t) = u - kx$

conservazione della massa

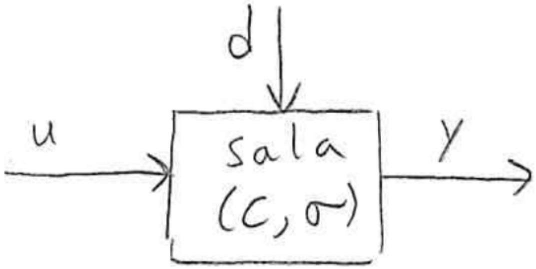
$(x(t+dt) = x(t) + u(t)dt - kx(t)dt)$

$x(t+1) = (x(t) + u(t))(1+\rho)$

$f(x,u,t) = (x+u)(1+\rho)$

$0 < \rho < 1$: tasso giornaliero d'interesse

ESEMPIO: Controllo di temperatura di una sala cinematografica



Variabili $y(t)$: temperatura della sala

$y°$: temperatura desiderata (costante)

d: temperatura esterna (costante)

$u(t)$: flusso di calore di condizionamento

Parametri C: capacità termica della sala

σ: coefficiente di scambio termico

Modello matematico del processo:
un'equazione differenziale lineare

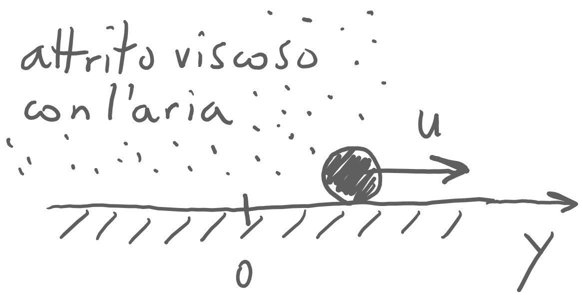
$$C \frac{d}{dt} y(t) = \sigma \left(d(t) - y(t) \right) + u(t)$$

variazione di calore = bilancio dei flussi di calore

$y(t) = x(t)$ è la variabile di stato ($n = 1$).

ESEMPIO: un caso in cui il procedimento visto risponde inizialmente NO alla Domanda 3.
E' un esempio storico, la legge di Newton, il primo sistema dinamico a t.c. (fine 1600), in quanto Newton ha introdotto (con Leibniz) il calcolo infinitesimale.

Sistema fisico



$u(t)$: forza motrice (positiva verso destra)
(frenante se discorde alla velocità)

$y(t)$: posizione (sull'asse y orientato verso destra)

parametri: m, massa della pallina; h coefficiente di attrito viscoso

Nota 1: il sistema ha un ingresso ($m = 1$) e una uscita ($p = 1$). L'uso dello stesso simbolo (m) per grandezze diverse (massa e numero di ingressi) è a volte inevitabile; si capisce dal contesto.

Nota 2: l'esempio originale di Newton è la caduta verticale, ma in quel caso la forza $u(t)$ è quella di gravità costante. Nel caso orizzontale la forza di gravità è compensata dalla reazione vincolare.

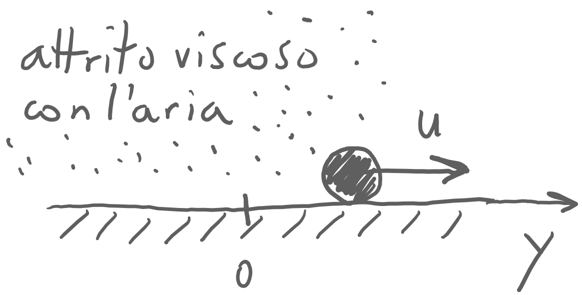
Nota 3: più precisamente la pallina è considerata un punto materiale, in quanto, per semplicità (e analogia al caso di caduta), non consideriamo il moto di rotolamento.

Nota 4: sempre per semplicità (e analogia al caso di caduta), consideriamo solo l'attrito viscoso dell'aria e non quello radente (scivolamento) o volvente (rotolamento).

Domanda 1: se conosco $u(t)$ (oltre che l'istante t e la fisica del sistema), posso determinare y(t)?

ESEMPIO: un caso in cui il procedimento visto risponda inizialmente con un NO alla Domanda 3.
E' un esempio storico, la legge di Newton, il primo sistema dinamico a t.c. (fine 1600), in quanto Newton ha Introdotto (con Leibniz) il calcolo infinitesimale.

Sistema fisico



$u(t)$: forza motrice (positiva verso destra)
(frenante se discorde alla velocità)

$y(t)$: posizione (sull'asse y orientato verso destra)

parametri: m, massa della pallina; h coefficiente di attrito viscoso

Domanda 2: quali variabili di stato serve conoscere per determinare $y(t)$? E' sufficiente la scelta banale

$x(t)$: posizione $\longrightarrow y(t) = x(t) \longrightarrow g(x,u,t) = x$

Domanda 3: la scelta di $x(t)$ è una buona definizione di stato?

equazione di stato: $\frac{d}{dt}x(t) = \text{velocità} = f(x(t), u(t), t)$?

No, non riesco a esprimere la velocità come una funzione di posizione e forza all'istante t!
Quindi la aggiungo come variabile di stato x_2 (la posizione diventa x_1)

$\dot{x}_1(t) = x_2(t)$ Legge di Newton $F = m \cdot a$

$\dot{x}_2(t) = \text{accelerazione} \stackrel{\downarrow}{=} \frac{1}{m}\left(u(t) - h\,x_2(t)\right)$

$\Rightarrow$

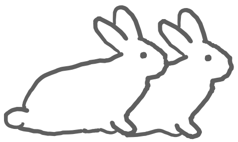
$f_1(x,u,t) = x_2$

$f_2(x,u,t) = \frac{1}{m}(u - h\,x_2)$

Nota: è noto che posizione e velocità dei corpi in movimento descrivono lo stato di un sistema meccanico

ESEMPIO: il primo sistema dinamico a t.d. (XIII sec.), l'allevamento di Fibonacci.

Sistema fisico



I conigli sono giovani nel primo mese di vita e adulti a partire dal secondo.
Ogni coppia (maschio-femmina) adulta genera una nuova coppia ogni fine mese.
I conigli non muoiono mai, ma Fibonacci ne preleva $u(t)$ coppie adulte alla fine del mese t (dopo la riproduzione). A metà mese, osserva il totale di coppie $y(t)$.

Nota: a t.d. è importante la temporizzazione degli eventi!

Domanda 1: se conosco $u(t)$ (oltre che l'istante t e la fisica del sistema), posso determinare $y(t)$?

Domanda 2: quali variabili di stato mi serve conoscere per determinare $y(t)$?

$x(t)$: num. totale di coppie $\longrightarrow y(t) = x(t) \longrightarrow g(x,u,t) = x$

Domanda 3: la scelta di $x(t)$ è una buona definizione di stato?

equazione di stato: $$x(t+1) = x(t) + \underbrace{\text{nuove coppie nate alla fine del mese } t}_{\text{sono pari alle coppie adulte del mese } t} - u(t)$$

$x_1(t)$: num. totale coppie; $x_2(t)$ coppie adulte nel mese t (osservate a metà mese):

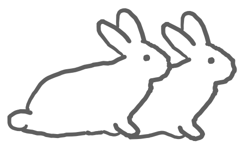
$$x_1(t+1) = x_1(t) + x_2(t) - u(t)$$

$$x_2(t+1) = x_2(t) - u(t) + \underbrace{x_1(t) - x_2(t)}_{\text{coppie giovani nel mese } t} = x_1(t) - u(t)$$

$$y(t) = x_1(t)$$

ESEMPIO: il primo sistema dinamico a t.d. (XIII sec.), l'allevamento di Fibonacci.

Sistema fisico



I conigli sono giovani nel primo mese di vita e adulti a partire dal secondo. Ogni coppia (maschio-femmina) adulta genera una nuova coppia ogni fine mese. I conigli non muoiono mai, ma Fibonacci ne preleva $u(t)$ coppie adulte alla fine del mese t (dopo la riproduzione). A metà mese, osserva il totale di coppie $y(t)$.

Nota: a t.d. è importante la temporizzazione degli eventi!

Le variabili di stato più tipiche sono: $x_1(t)$ coppie giovani e $x_2(t)$ coppie adulte nel mese t

Nota: nei modelli demografici con struttura d'età è tipico usare una var. di stato per ogni classe di età.

$$\begin{aligned} x_1(t+1) &= x_2(t) \\ x_2(t+1) &= x_1(t) + x_2(t) - u(t) \\ y(t) &= x_1(t) + x_2(t) \end{aligned}$$

Nota: la scelta delle variabili di stato non è univoca!

La sequenza di Fibonacci: $y(t)$ nel caso senza prelievo partendo da una coppia giovane

t	0	1	2	3	4	5	6	7	...
$x_1(t)$	1	0	1	1	2	3	5	8	...
$x_2(t)$	0	1	1	2	3	5	8	13	...
$y(t)$	1	1	2	3	5	8	13	21	...

MODELLO (SISTEMA) DINAMICO: riassumendo

$$\left.\begin{array}{lll} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t) & \text{t.c.} \\ x(t+1) = f(x(t), u(t), t) & \text{t.d.} \end{array}\right\} \text{equazione di stato}$$

$$y(t) = g(x(t), u(t), t) \quad \text{trasformazione d'uscita}$$

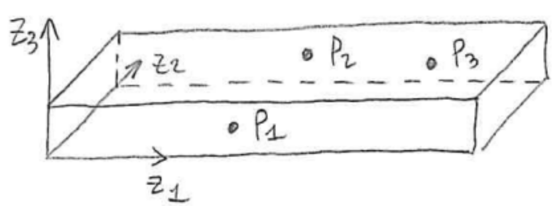
Nota: a t.c. "dimenticheremo" spesso di indicare la dipendenza dal tempo $\begin{cases} \dot{x} = f(x, u, t) \\ y = g(x, u, t) \end{cases}$

CLASSIFICAZIONE DEI SISTEMI DINAMICI

Deterministici: nessun evento casuale; stato iniziale $x(t_0)$ e ingresso $u(\tau)$, $\tau \geq t_0$, determinano il futuro.

Stocastici: le funzioni f e g dipendono anche da qualche processo casuale.

Dimensione infinita ($n = \infty$): un esempio classico è l'equazione del calore, in cui lo stato è la temperatura in ogni punto di un corpo



$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ \vdots \end{bmatrix} \begin{array}{l} \text{temp. in } P_1 \\ \text{temp. in } P_2 \\ \text{temp. in } P_3 \\ \vdots \end{array}$$

lo stato al tempo t è una funzione delle 3 coordinate spaziali (z_1, z_2, z_3) $x(t) \in$ spazio funzionale

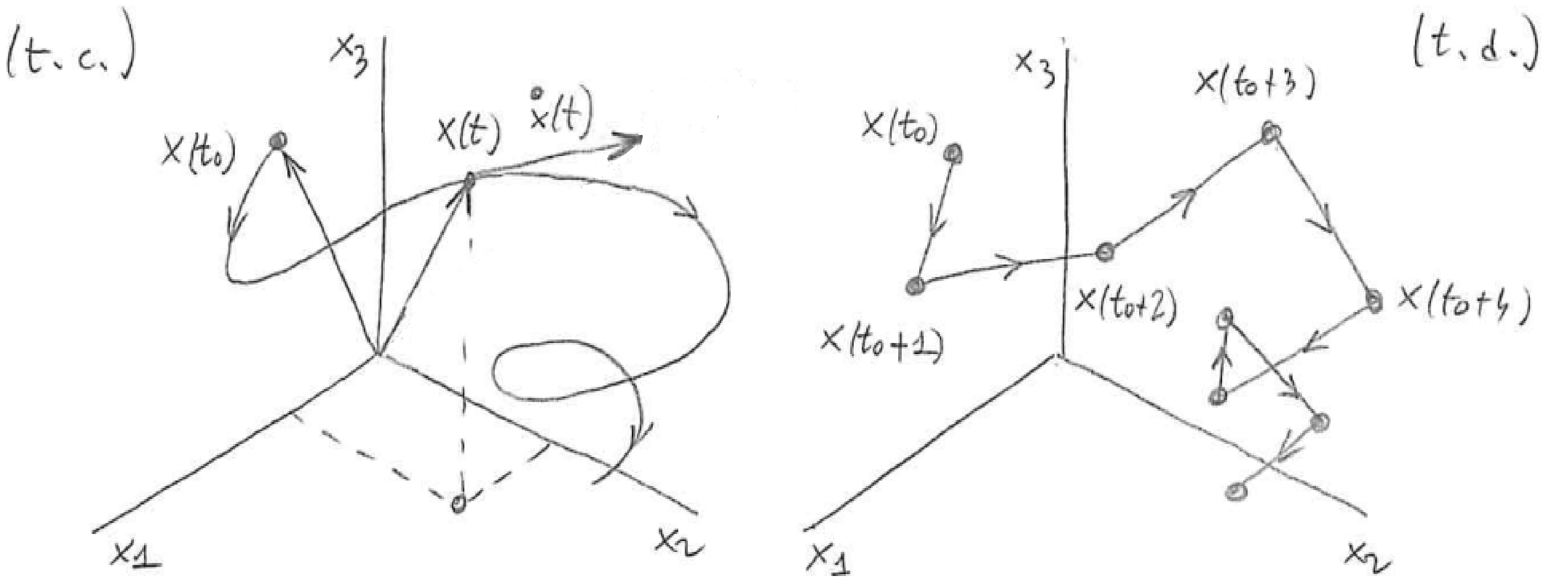
L'equazione di stato è tipicamente un'equazione differenziale (t.c.) o alla differenze (t.d.) alle derivate/differenze parziali (PDE).

Dimensione finita (n finito): $x(t) \in \boldsymbol{R}^n$, l'equazione di stato è ordinaria (ODE).

Dimensione finita (n finito): $x(t) \in \boldsymbol{R}^n$, $\boldsymbol{R}^n$ è lo spazio di stato

Interpretazione geometrica: lo stato è un punto che si muove nello spazio di stato.

Parte dallo stato (o condizione) iniziale $x(t_0)$ e percorre una traiettoria



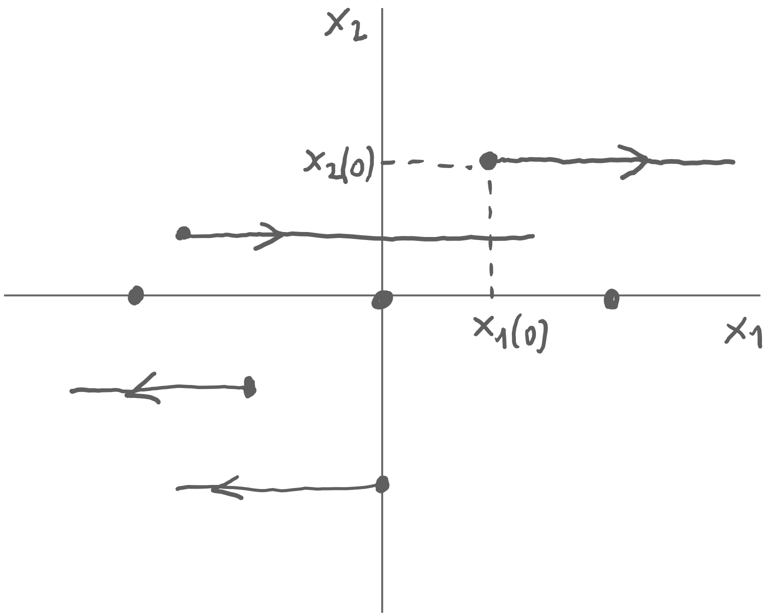
Nota: a t.c. il vettore $\dot{x}(t)$ (disegnato a partire dalla punta del vettore $x(t)$) è tangente alla traiettoria nel verso di avanzamento del tempo e rappresenta il vettore "velocità" con cui si muove il punto di stato

Nota: a t.d. i segmenti che uniscono i punti successivi della traiettoria hanno solo utilità grafica.

Il <u>quadro delle traiettorie</u>: un insieme di traiettorie dalle quali sia possibile capire, qualitativamente, tutte le altre.

Esempio: Newton senza attrito ($h = 0$)

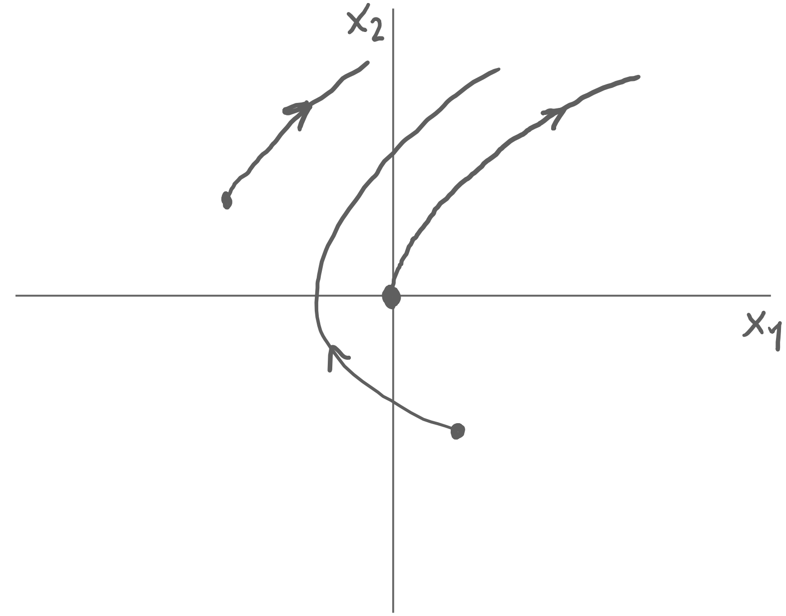
senza forza motrice ($u(t) = 0$)



moto rettilineo uniforme

$$\begin{vmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_2 \\ 0 \end{vmatrix}$$

con forza motrice costante ($u(t) = \bar{u} > 0$)



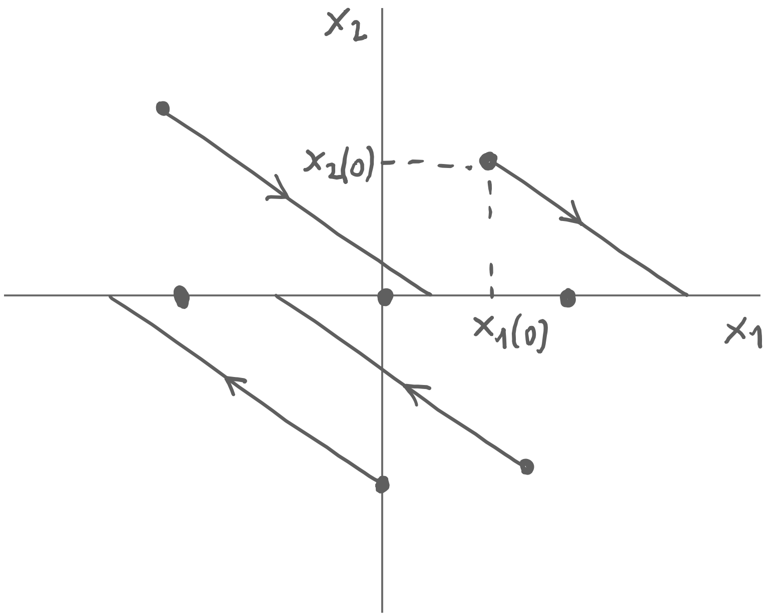
moto uniformemente accelerato

$$\begin{vmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_2 \\ \bar{u}/m \end{vmatrix}$$

Il quadro delle traiettorie: un insieme di traiettorie dalle quali sia possibile capire, qualitativamente, tutte le altre.

Esempio: Newton con attrito ($h > 0$)

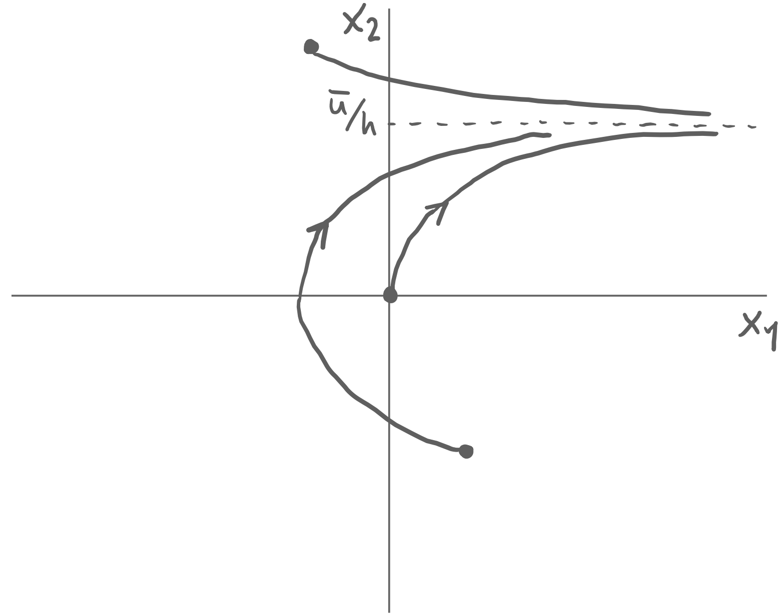
senza forza motrice ($u(t) = 0$)



arresto (traiettorie rettilinee!)

$$\begin{vmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_2 \\ -\frac{h x_2}{m} \end{vmatrix}$$

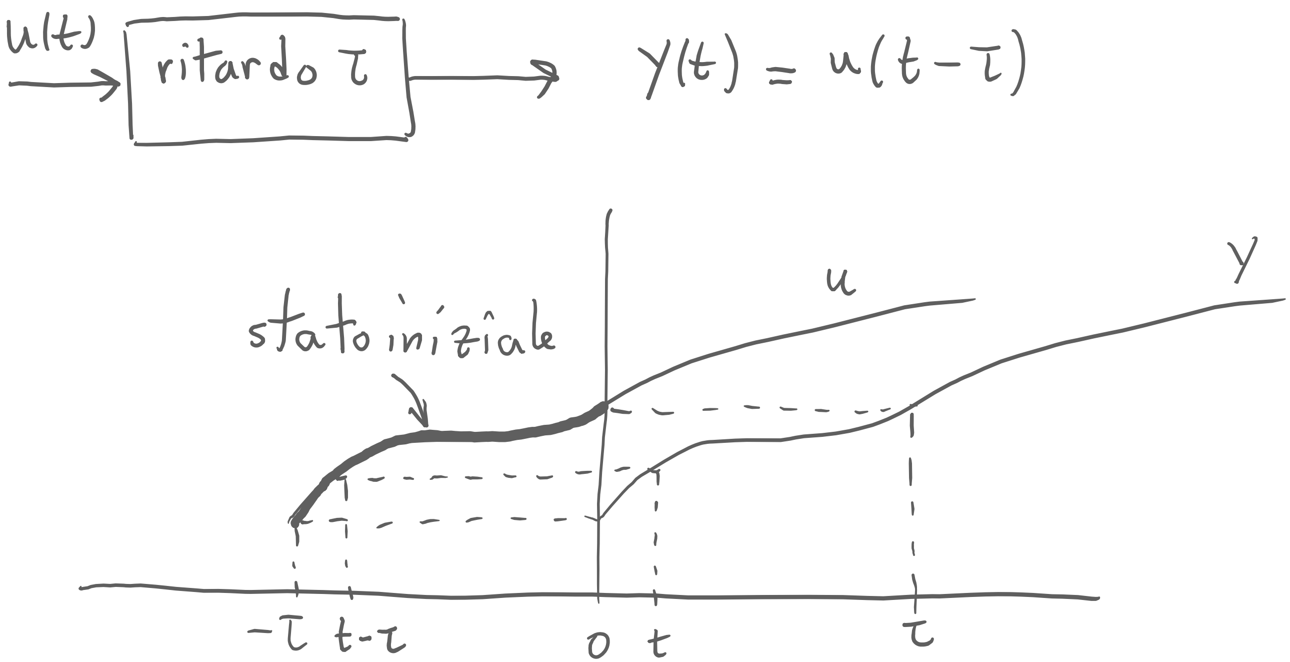
con forza motrice costante ($u(t) = \bar{u} > 0$)



caduta con velocità limite

$$\begin{vmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_2 \\ \frac{1}{m}(\bar{u} - h x_2) \end{vmatrix}$$

Esempio: l'unico sistema dinamico a dimensione infinita che considereremo: il ritardatore a t.c.

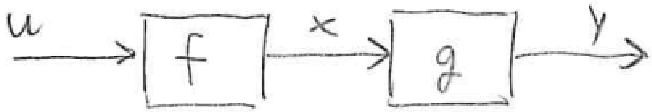


Stato $x(t)$ = porzione di segnale $u(t')$ per $t' \in [t - \tau, t]$

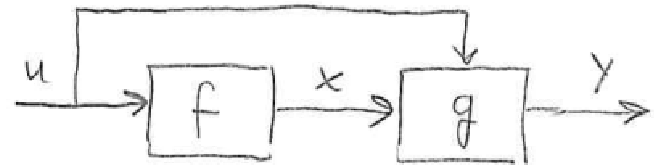
CLASSIFICAZIONE DEI SISTEMI DINAMICI

Sistemi propri [impropri]: è assente [presente] un legame istantaneo tra ingresso e uscita

$g(x,u,t)$ non dipende [dipende] dall'argomento u



(sistema proprio)



(sistema improprio)

Nota: alcuni testi usano "strettamente proprio" e "non strettamente proprio", riservando il termine "improprio" ad una formulazione approssimata nel dominio della frequenza (vedi penultimo p. indice).

Sistemi (tempo) invarianti [varianti]: la dinamica non dipende [dipende] dall'istante iniziale t_0

$f(x,u,t)$ e $g(x,u,t)$ non dipendono [almeno una dipende] dall'argomento t

Nota: nei sistemi tempo invarianti, l'istante iniziale è per convenzione fissato in $t_0 = 0$.

Sistemi autonomi: non hanno ingressi ($m = 0$) o, equivalentemente, gli ingressi sono costanti (e considerati come parametri; per es. Newton con forza motrice costante).

$f(x,u,t)$ e $g(x,u,t)$ non dipendono dall'argomento u

Sistemi SISO (Single-Input-Single-Output): $m = 1$, $p = 1$.

Sistemi MIMO (Multiple-Input-Multiple-Output): $m \geq 2$ e/o $p \geq 2$.

CLASSIFICAZIONE DEI SISTEMI DINAMICI

Sistemi <u>lineari</u>: $f(x,u,t)$ e $g(x,u,t)$ sono combinazioni lineari di *x* e *u*

$$f(x,u,t) = A(t)\,x + B(t)\,u$$

$$g(x,u,t) = C(t)\,x + D(t)\,u$$

$A(t) = [a_{ij}(t)]$ matrice $n \times n$ di funzioni del tempo

$B(t) = [b_{ij}(t)]$ matrice $n \times m$ di funzioni del tempo

$C(t) = [c_{ij}(t)]$ matrice $p \times n$ di funzioni del tempo

$D(t) = [d_{ij}(t)]$ matrice $p \times m$ di funzioni del tempo

$$\begin{array}{ccc} \overbrace{}^{n} & \overbrace{}^{m} & \\ \begin{bmatrix} A \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} B \end{bmatrix} & \}\,n \\ \begin{bmatrix} C \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} D \end{bmatrix} & \}\,p \end{array}$$

Nota 1: gli elementi delle matrici possono dipendere dal tempo. Se almeno un elemento è funzione di *t*, il sistema è tempo-variante, altrimenti è invariante.

Nota 2: la linearità è richiesta rispetto a *x* e *u* congiuntamente, quindi, per es., i prodotti $x_i u_j$ sono delle non-linearità (mentre non lo sono i prodotti $x_i t$).

ESEMPIO DI SISTEMA NON LINEARE: la crescita logistica (modello classico in ecologia e economia)

t.c.: $\dot{x} = rx(1 - x/K)$ a bassa densità ($x \ll K$), la biomassa cresce proporzionalmente a quanta ce n'è. Ad alta densità, la competizione per risorse (termine non lineare $-rx^2/K$) domina e rende negativa la derivata $\dot{x}$ (x diminuisce).

t.d.: $x(t+1) = x(t) + rx(t)(1 - x(t)/K)$ dove $x(t)$ è il capitale di un'azienda nel priodo t.

CLASSIFICAZIONE DEI SISTEMI DINAMICI

Sistemi <u>lineari</u>: $f(x,u,t)$ e $g(x,u,t)$ sono combinazioni lineari di *x* e *u*

$$f(x,u,t) = A(t)\,x + B(t)\,u$$

$$g(x,u,t) = C(t)\,x + D(t)\,u$$

$A(t) = [a_{ij}(t)]$ matrice $n \times n$ di funzioni del tempo

$B(t) = [b_{ij}(t)]$ matrice $n \times m$ di funzioni del tempo

$C(t) = [c_{ij}(t)]$ matrice $p \times n$ di funzioni del tempo

$D(t) = [d_{ij}(t)]$ matrice $p \times m$ di funzioni del tempo

$$\begin{array}{ccc} n & m & \\ \begin{bmatrix} \quad A \quad \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} B \end{bmatrix} & \}\, n \\ \begin{bmatrix} \quad C \quad \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} D \end{bmatrix} & \}\, p \end{array}$$

Newton è lineare, proprio, invariante, SISO

$$\dot{x}_1 = x_2$$
$$\dot{x}_2 = \frac{1}{m}(u - h x_2)$$
$$y = x_1$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \overbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{h}{m} \end{bmatrix}}^{A\,(2\times 2)} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \overbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix}}^{b\,(2\times 1)} u$$

$$y = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}}_{c^T\,(1\times 2)} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}}_{d\,(1\times 1)} u$$

Notazione: lettere maiuscole = matrici; lettere minuscole = scalari (1x1) e vettori colonna

CLASSIFICAZIONE DEI SISTEMI DINAMICI

Sistemi <u>lineari</u>: $f(x,u,t)$ e $g(x,u,t)$ sono combinazioni lineari di *x* e *u*

$$f(x,u,t) = A(t)\,x + B(t)\,u$$

$$g(x,u,t) = C(t)\,x + D(t)\,u$$

$A(t) = [a_{ij}(t)]$ matrice $n \times n$ di funzioni del tempo

$B(t) = [b_{ij}(t)]$ matrice $n \times m$ di funzioni del tempo

$C(t) = [c_{ij}(t)]$ matrice $p \times n$ di funzioni del tempo

$D(t) = [d_{ij}(t)]$ matrice $p \times m$ di funzioni del tempo

$$\begin{array}{ccl} \overbrace{\begin{bmatrix} \quad & A & \quad \end{bmatrix}}^{n} & \overbrace{\begin{bmatrix} B \end{bmatrix}}^{m} & \}\,n \\ \begin{bmatrix} \quad & C & \quad \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} D \end{bmatrix} & \}\,p \end{array}$$

Anche Fibonacci è lineare, proprio, invariante, SISO

$$x_1(t+1) = x_2(t)$$

$$x_2(t+1) = x_1(t) + x_2(t) - u(t)$$

$$y(t) = x_1(t) + x_2(t)$$

$$\begin{bmatrix} x_1(t+1) \\ x_2(t+1) \end{bmatrix} = \overbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}}^{A} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \overbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}}^{b} u(t)$$

$$y(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}}_{c^T} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}}_{d} u(t)$$

Nota: anche il serbatoio e il conto corrente sono sistemi lineari (del primo ordine, $n=1$, A è scalare; anche il ritardatore lo è (lo capiremo più avanti, vedi sovrapposizione cause ed effetti).

Nota sulla definizione di stato e temporizzazione a t.d.

Per scelta modellistica, lo stato riassume l'effetto sull'uscita dei valori passati dell'ingresso.
Il legame istantaneo tra ingresso e uscita, se presente, è descritto nella trasformazione d'uscita.
Non è quindi accettabile una definizione di stato che sia influenzata istantaneamente dall'ingresso.

Esempio: il conto corrente

$u(t)$: deposito netto giornaliero

$y(t)$: saldo a fine giornata (prima dell'applicazione dell'interesse)

Stato: una scelta apparentemente comoda sarebbe quella banale $x(t) = y(t)$, però

$$x(t+1) = (1+\rho)\,x(t) + \underline{u(t+1)}$$

La scelta corretta è quindi $x(t) =$ saldo a inizio giornata

che rende il sistema ben formulato e improprio

$$y(t) = x(t) + u(t)$$

$$x(t+1) = (1+\rho)\big(x(t) + u(t)\big)$$

CLASSIFICAZIONE DEI SISTEMI DINAMICI

Sistemi <u>lineari</u>: $f(x,u,t)$ e $g(x,u,t)$ sono combinazioni lineari di *x* e *u*

$$f(x,u,t) = A(t)x + B(t)u$$

$$g(x,u,t) = C(t)x + D(t)u$$

$A(t) = [a_{ij}(t)]$ matrice $n \times n$ di funzioni del tempo

$B(t) = [b_{ij}(t)]$ matrice $n \times m$ di funzioni del tempo

$C(t) = [c_{ij}(t)]$ matrice $p \times n$ di funzioni del tempo

$D(t) = [d_{ij}(t)]$ matrice $p \times m$ di funzioni del tempo

$$\begin{array}{ccl} \overbrace{\qquad\quad}^{n} & \overbrace{\quad}^{m} & \\ \begin{bmatrix} \quad A \quad \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} B \end{bmatrix} & \Big\} \, n \\ \begin{bmatrix} \quad C \quad \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} D \end{bmatrix} & \} \, p \end{array}$$

RIASSUMENDO:

i sistemi (dinamici, deterministici, dimensione finita) lineari, invarianti, SISO

t.c.

$$\dot{x} = Ax + bu$$
$$y = c^T x + du$$

t.d.

$$x(t+1) = Ax(t) + bu(t)$$
$$y(t) = c^T x(t) + du(t)$$