POLITECNICO
MILANO 1863

DIPARTIMENTO DI ELETTRONICA
INFORMAZIONE E BIOINGEGNERIA

FONDAMENTI DI AUTOMATICA

(per allievi di INGEGNERIA FISICA)

Prof. Fabio Dercole

- Introduzione
- Formulazione del modello (dinamico, lineare, tempo-invariante)
- Movimento ed equilibrio
- Stabilità
- I sistemi non lineari (cenni)
- Raggiungibilità ed osservabilità
- Progetto di sistemi di controllo (nel dominio del tempo)
- Segnali e sistemi nel dominio della frequenza
- Progetto di sistemi di controllo (nel dominio della frequenza)

AUTOMATICA (o AUTOMAZIONE): disciplina (interdisciplinare!) che ha per obiettivo il progetto di un sistema di controllo che "agisca" su un processo (il sistema da controllare) al fine di far sì che esso segua, il più fedelmente possibile, un "comportamento" desiderato (detto di riferimento).

"comportamento": andamento nel tempo di alcune variabili caratteristiche del processo (dette variabili controllate).

"agire": imporre il valore, istante per istante, di alcune variabili "manipolabili" che influenzano il comportamento del processo (dette variabili di controllo o anche manipolate).

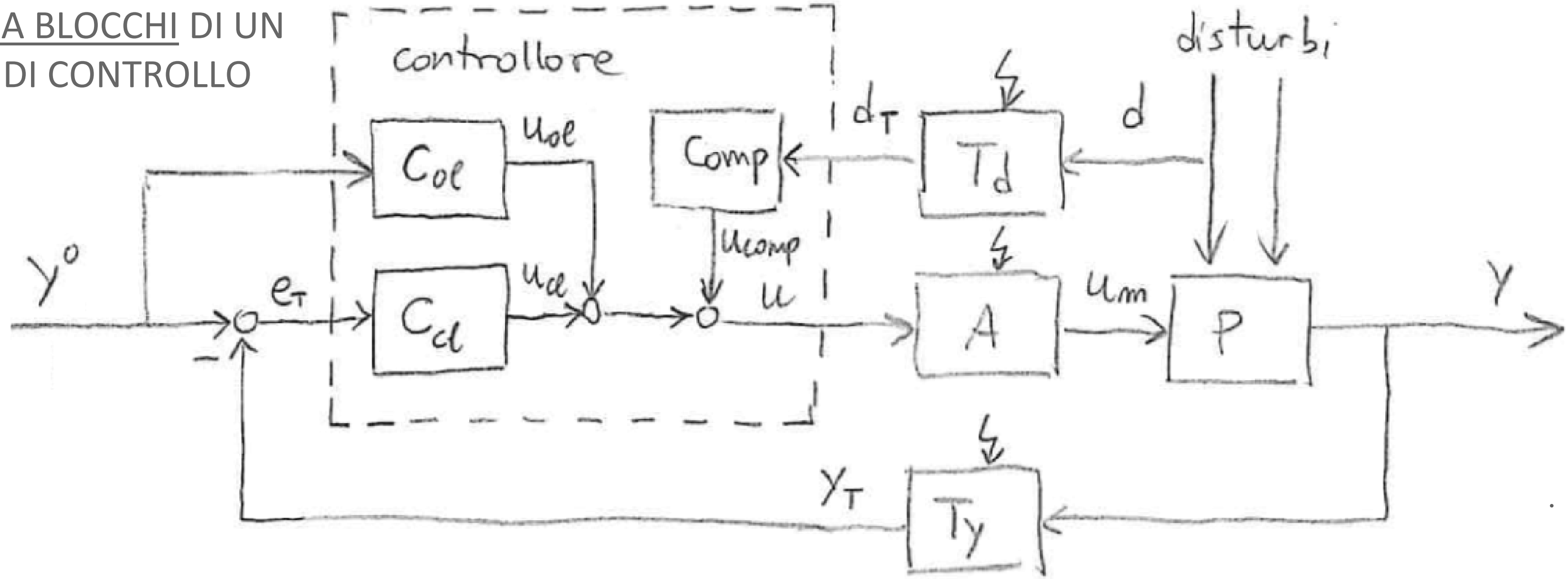
PROBLEMA DI CONTROLLO

processo
variabili controllate
andamento di riferimento
variabili di controllo
il controllore: il sistema che decide l'andamento delle variabili di controllo

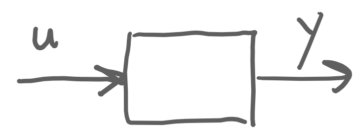
ESEMPI: 1)	2)	3)	4)
studenti in aula	corpo umano	sala cinematografica	lago
livello di attenzione	posizione	temperatura	livello
alto e costante	eretta	costante e 22°C	periodico stagionale
tono di voce del docente	contrazione muscolare	portata d'aria condizionata	apertura diga
docente	cervello	sistema di climatizzazione	gestore della diga

Origini storiche: riv. industriale, regolatore centrifugo di velocità (governor) del motore a vapore di Watt (1788; base teorica di Maxwell, 1868); materia a se stante dai contributi di Routh-Hurwitz (fine 800).

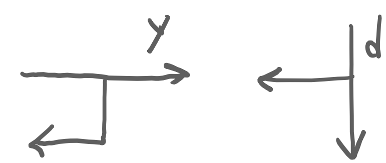
SCHEMA A BLOCCHI DI UN SISTEMA DI CONTROLLO



SISTEMI E SEGNALI: blocchi ("scatole") e connessioni ("fili")

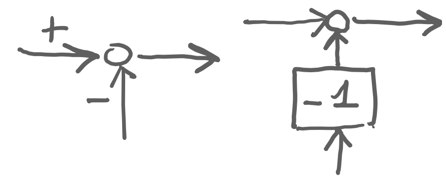


sistema: insieme di elementi (naturali o artefatti, materiali o immateriali) il cui comportamento può dipendere da grandezze esterne, dette variabili (o segnali) d'ingresso, e viene osservato misurando alcune variabili caratteristiche, dette variabili (o segnali) d'uscita.



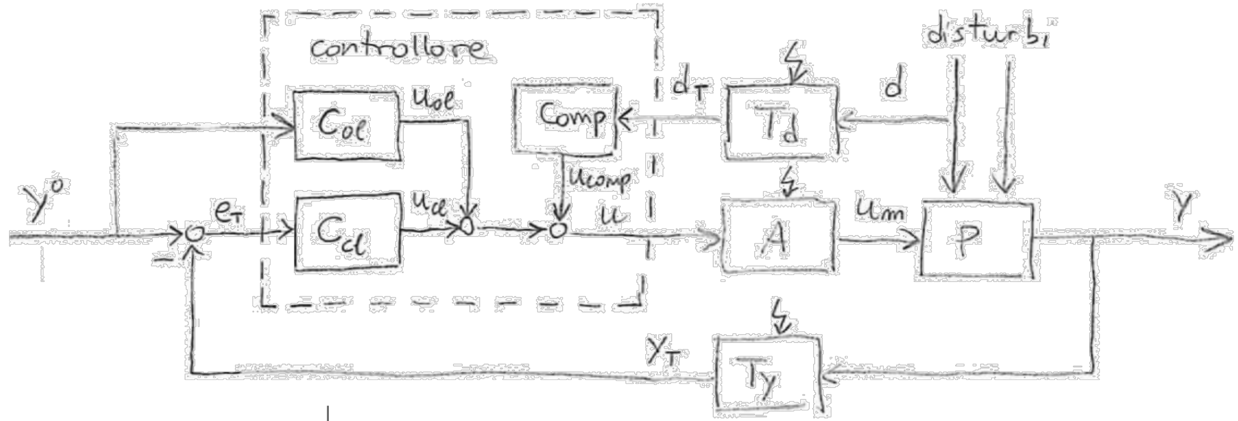
segnale: rappresentato da un "filo" con "freccia" di influenza causale (per semplicità nello schema un filo rappresenta un solo segnale).

diramazione: lo stesso segnale viene riportato in più punti dello schema, p.e. in ingresso a due sistemi.



nodo somma: i segnali che entrano nel nodo si sommano (si sottraggono se c'è il segno "-"); il segnale somma esce dal nodo.

SCHEMA A BLOCCHI DI UN SISTEMA DI CONTROLLO



SISTEMI

P: processo

oltre alla variabile manipolata u_m ci sono, in generale, altri ingressi non manipolati, detti disturbi, p.e.:

1) rumore esterno
2) forza peso
3) temperatura esterna
4) precipitazioni

A: attuatore

strumentazione che implementa sul processo il valore della variabile di controllo u; indichiamo con u_m (variabile manipolata) il valore effettivamente applicato al processo. (spesso considereremo l'attuatore ideale: $u_m = u$)

T: trasduttore (o sensore)

SEGNALI

y, y_T: variabile controllata e sua misura (spesso considereremo la misura ideale: $y_T = y$)

$y°$: andamento di riferimento

$e = y° - y$: errore di controllo

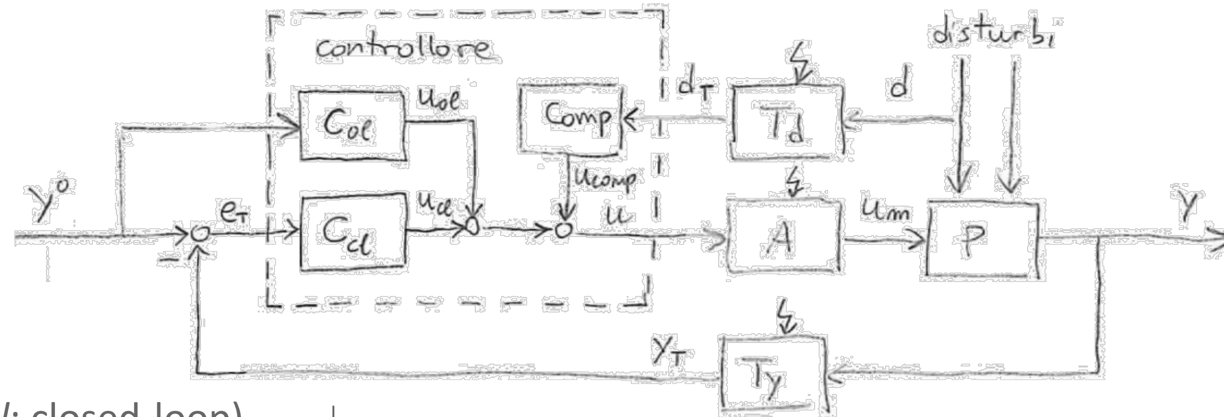
$e_T = y° - y_T$: misura dell'errore di controllo (attenzione: $e_T \neq e$ se T_y non è ideale)

u_m: variabile manipolata ($\neq u$ se A non è ideale)

$u = u_{cl} + u_{ol} + u_{comp}$: variabile di controllo

: altri disturbi

SCHEMA A BLOCCHI DI UN SISTEMA DI CONTROLLO



SISTEMI

C_{cl}: controllore in anello chiuso (*cl*: closed-loop) o in retroazione (*fb*: feedback), o regolatore

decide il contributo u_{cl} della var. di controllo in base alla misura dell'errore di controllo e_T opera in anello chiuso perché la sua uscita (u_{cl}) influenza il suo ingresso (e_T).

C_{ol}: controllore in anello aperto (*ol*: open-loop) o in avanti (*ff*: feedforward)

decide il contributo u_{ol} della var. di controllo in base al solo desiderio $y°$ da realizzare opera in anello aperto perché la sua uscita (u_{ol}) non influenza il suo ingresso ($y°$).

Comp: compensatore

decide il contributo u_{comp} della var. di controllo in base alla misura di un disturbo, con l'obiettivo di eliminarne l'effetto sul processo opera in anello aperto.

SEGNALI

y, y_T: variabile controllata e sua misura (spesso considereremo la misura ideale: $y_T = y$)

$y°$: andamento di riferimento

$e = y° - y$: errore di controllo

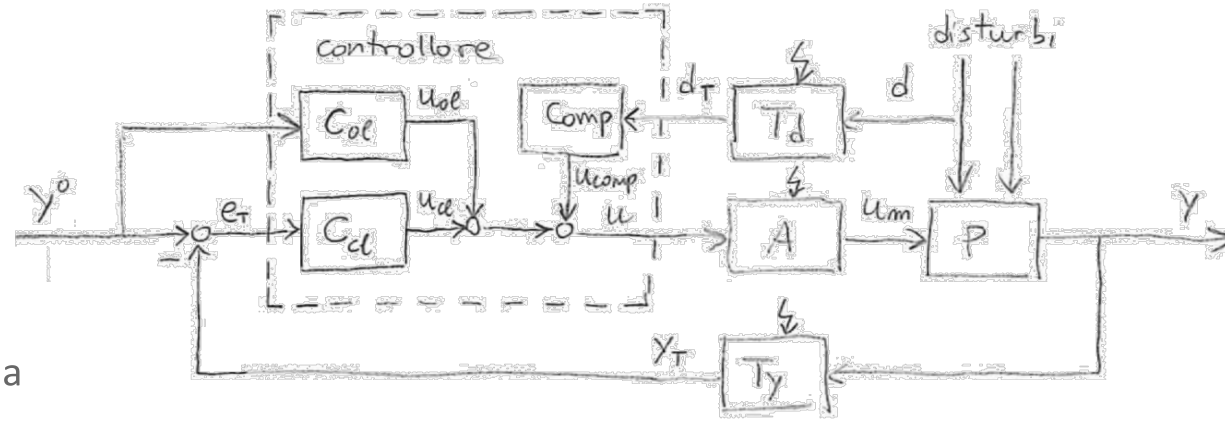
$e_T = y° - y_T$: misura dell'errore di controllo (attenzione: $e_T \neq e$ se T_y non è ideale)

u_m: variabile manipolata ($\neq u$ se A non è ideale)

$u = u_{cl} + u_{ol} + u_{comp}$: variabile di controllo

ϟ : altri disturbi

OBIETTIVO DEL CORSO



Progettare il controllore
(C_{cl}, C_{ol}, *Comp*)
per assegnati
P, *A*, *T* e riferimento $y°$

Progettare significa formulare una descrizione matematica per la legge (algoritmo) di controllo.

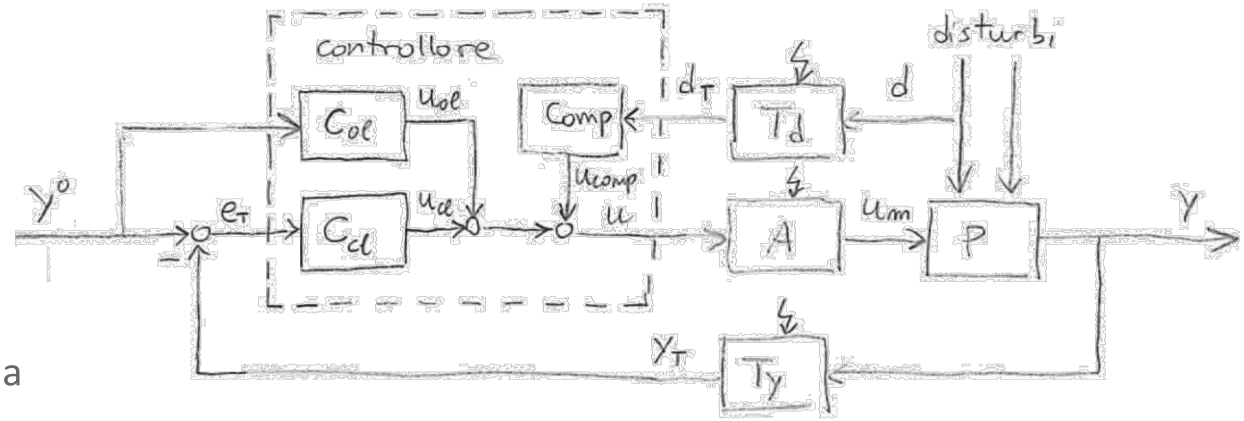
Per farlo, dobbiamo partire da una descrizione matematica di *P*, *A*, *T*
(in contrapposizione alla descrizione verbale utilizzata dal controllore umano "esperto")

Dobbiamo saper 1) formulare e 2) analizzare un modello matematico di un singolo sistema, per poi interconnettere più sistemi.

Dobbiamo occuparci di
1) Modellistica
2) Teoria dei sistemi.

- Introduzione
- Formulazione del modello (dinamico, lineare, tempo-invariante)
- Movimento ed equilibrio
- Stabilità
- I sistemi non lineari (cenni)
- Raggiungibilità ed osservabilità
- Progetto di sistemi di controllo (nel dominio del tempo)
- Segnali e sistemi nel dominio della frequenza
- Progetto di sistemi di controllo (nel dominio della frequenza)

OBIETTIVO DEL CORSO



Progettare il controllore
(C_{cl}, C_{ol}, *Comp*)
per assegnati
P, *A*, *T* e riferimento *y°*

Progettare significa formulare una descrizione matematica per la legge (algoritmo) di controllo.

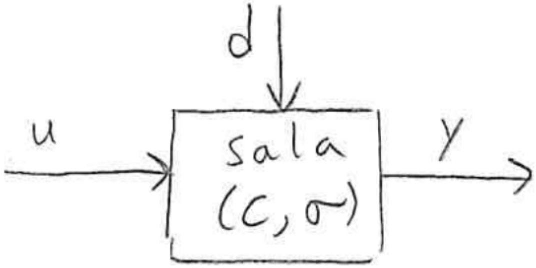
Per farlo, dobbiamo partire da una descrizione matematica di *P*, *A*, *T*
(in contrapposizione alla descrizione verbale utilizzata dal controllore umano "esperto")

Dobbiamo saper 1) formulare e 2) analizzare un modello matematico di un singolo sistema, per poi interconnettere più sistemi.

Dobbiamo occuparci di
1) Modellistica
2) Teoria dei sistemi.

Nota: L'automatica è solo una delle tante discipline basate sulla Teoria dei sistemi.
Altre importanti applicazioni sono la simulazione, la generazione di previsioni, la stima di variabili non direttamente misurabili e l'identificazione del modello matematico a partire da dati
(fino alle moderne tecniche di AI).

ESEMPIO: Controllo di temperatura di una sala



Variabili $y(t)$: temperatura della sala
$y°$: temperatura desiderata (costante)
d: temperatura esterna (costante)
$u(t)$: flusso di calore di condizionamento

Parametri C: capacità termica della sala
σ: coefficiente di scambio termico

Modello matematico del processo:
un'equazione differenziale (lineare)

$$\underbrace{C\frac{d}{dt}y(t)}_{\text{variazione di calore}} = \underbrace{\sigma\big(d(t)-y(t)\big)+u(t)}_{\text{bilancio dei flussi di calore}}$$

Risolviamola nel caso di sistema non controllato ($u(t)=0$)

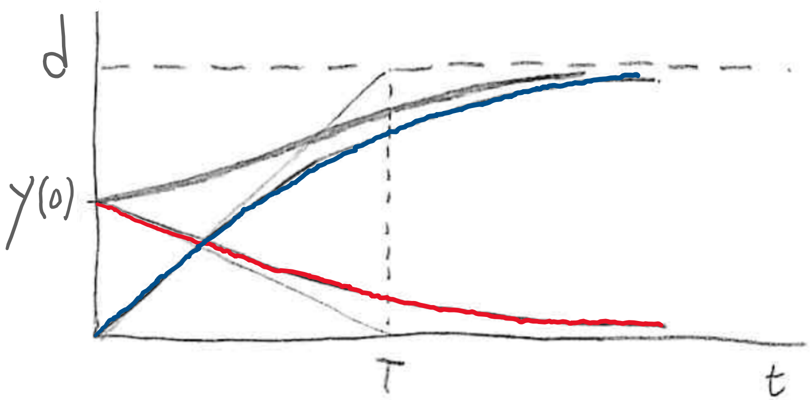
$$\frac{dy}{dt} = -\frac{\sigma}{C}y + \frac{\sigma}{C}d \;\longrightarrow\; y(t) = e^{-\frac{\sigma}{C}t}y(0) + \underbrace{\int_0^t e^{-\frac{\sigma}{C}(t-\tau)}\frac{\sigma}{C}\,d\,d\tau}$$

$$d e^{-\frac{\sigma}{C}t}\int_0^t \frac{\sigma}{C}e^{\frac{\sigma}{C}\tau}d\tau = d e^{-\frac{\sigma}{C}t} e^{\frac{\sigma}{C}\tau}\Big|_0^t = d e^{-\frac{\sigma}{C}t}\left(e^{\frac{\sigma}{C}t}-1\right) = d\left(1-e^{-\frac{\sigma}{C}t}\right)$$

Sistema non controllato ($u(t) = 0$)

$$y(t) = e^{-\frac{\sigma}{c}t} y(0) + d\left(1 - e^{-\frac{\sigma}{c}t}\right)$$

$$\lim_{t \to +\infty} y(t) = d$$



Nota: la costante di tempo T dell'esponenziale $e^{-\frac{t}{T}}$

$$e^{-\frac{\sigma}{c}t} = e^{-t/(c/\sigma)} \rightarrow T = \frac{c}{\sigma}$$

Geometricamente:

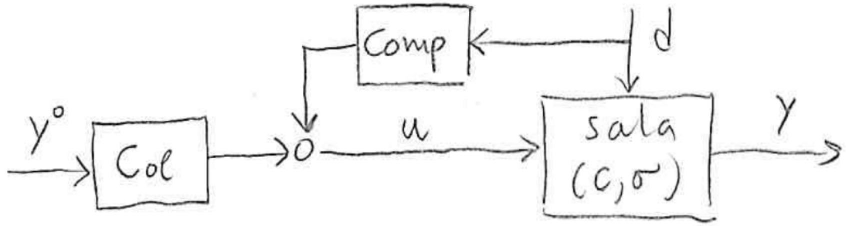
(pendenza iniziale) $\cdot$ T = escursione

$$\left.\begin{aligned} -\frac{\sigma}{c} y(0)\, T &= -y(0) \\ d \frac{\sigma}{c} T &= d \end{aligned}\right\} \rightarrow T = \frac{c}{\sigma}$$

Regola approssimata: consideriamo un andamento esponenziale "esaurito" (valore asintotico raggiunto a meno dell'1% dell'escursione complessiva) dopo 5*T*

t	T	$3T$	$5T$	t^*
% raggiungimento del valore asintotico (o di regime) di un esponenziale	64	95	99	$(1 - e^{-t^*/T})\, 100$

Controllo in anello aperto



Legge di controllo (lineare algebrica):

$$u = \sigma_m y^\circ - \sigma_m d$$

dove σ_m è una misura di σ

Caso non controllato: $\dfrac{dy}{dt} = \underbrace{-\dfrac{\sigma}{c} y + \dfrac{\sigma}{c}}_{\text{stesso coefficiente}} d \rightarrow y(t) = e^{-\frac{\sigma}{c}t} y(0) + d\left(1 - e^{-\frac{\sigma}{c}t}\right)$

Caso controllato:

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{\sigma}{c} y + \frac{\sigma}{c} d + \frac{u}{c} = -\frac{\sigma}{c} y + \frac{\sigma}{c} d + \frac{\sigma_m}{c} y^\circ - \frac{\sigma_m}{c} d = -\frac{\sigma}{c} y + \frac{\sigma}{c} \underbrace{\left(\left(1 - \frac{\sigma_m}{\sigma}\right) d + \frac{\sigma_m}{\sigma} y^\circ\right)}$$

La soluzione è analoga al caso non controllato, con *d* sostituito da $\bar{y}$

$$\rightarrow y(t) = e^{-\frac{\sigma}{c}t} y(0) + \bar{y}\left(1 - e^{-\frac{\sigma}{c}t}\right) \rightarrow \lim_{t \to +\infty} y(t) = \bar{y} \quad \text{con } T = \frac{c}{\sigma}$$

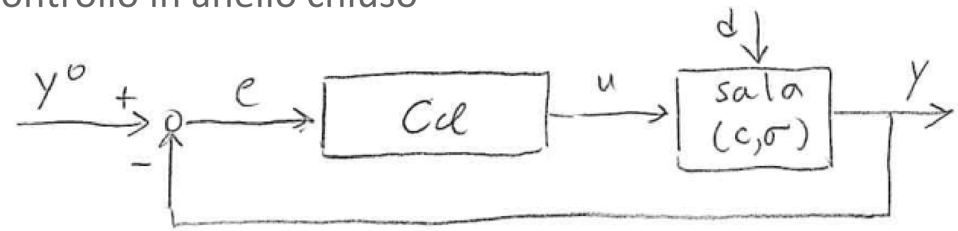
Conclusioni: il controllo in anello aperto

funziona bene se il modello del processo è accurato ($\sigma_m \cong \sigma$), $\bar{e} = y^\circ - \bar{y} = \left(1 - \dfrac{\sigma_m}{\sigma}\right)(y^\circ - d)$

si dice che non è <u>robusto</u>: gli errori modellistici (p.e. $\sigma_m = 0{,}9\sigma$, err. 10%), generano errori di controllo di pari entità ($\bar{e}$ passa da 0, nel caso ideale, a $0{,}1(y^\circ - d)$, quindi da 0 al 10% della prestazione desiderata)

non altera la dinamica caratteristica del processo (stessa costante di tempo)

Controllo in anello chiuso



Legge di controllo (proporzionale):

$$u = Ke = K(y^o - y)$$

dove *K* è un parametro di progetto

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{\sigma}{c}y + \frac{\sigma}{c}d + \frac{K}{c}y^o - \frac{K}{c}y = \underbrace{-\frac{\sigma+K}{c}y + \frac{\sigma+K}{c}}_{\text{stesso coefficiente}}\underbrace{\left(\frac{\sigma}{\sigma+K}d + \frac{K}{\sigma+K}y^o\right)}_{\bar{y}}$$

La soluzione è ancora analoga al caso non controllato, con *d* sostituito da $\bar{y}$
ma cambia anche la costante di tempo

$$\longrightarrow \; y(t) = e^{-\frac{\sigma+K}{c}t}y(0) + \bar{y}\left(1 - e^{-\frac{\sigma+K}{c}t}\right) \; \longrightarrow \; \lim_{t\to+\infty} y(t) = \bar{y} \quad \text{con } T = \frac{c}{\sigma+K}$$

Conclusioni: il controllo in anello chiuso

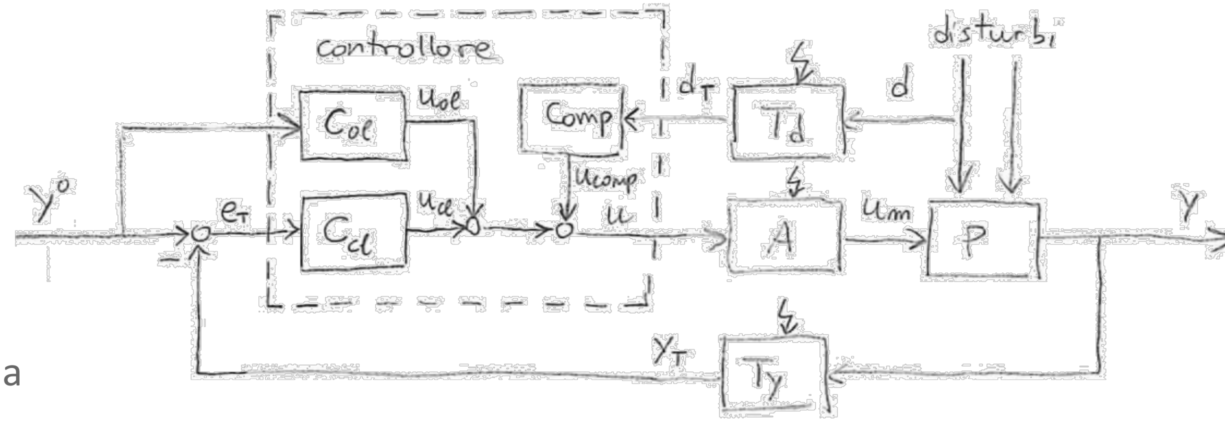
funziona bene se ha un "alto guadagno" (alto *K*), $\bar{e} = y^o - \bar{y} = \frac{\sigma}{\sigma+K}(y^o - d) = \frac{1}{1+K/\sigma}(y^o - d) = \frac{1}{1+\mu}(y^o - d)$

$\bar{e}_{\%} = \frac{1}{1+\mu} \simeq 1/\mu$, $\mu = K/\sigma$: guadagno d'anello

Si dice che è <u>robusto</u>, perché la legge di controllo non fa uso del modello del processo.
Più precisamente, σ_m viene usato per scegliere $K = \mu^o\sigma_m$ per avere $\mu = \mu^o$ (p.e. $\mu^o = 100$) nel caso ideale.
Se $\sigma_m = (1 - e_{m\%})\sigma$ (p.e. $e_{m\%} = 0{,}1$, errore modellistico 10%), si ottiene $\mu = K/\sigma = \mu^o(1 - e_{m\%})$
(μ varia del 10%), ma $\bar{e}_{\%} \simeq 1/\mu \simeq 1/\mu^o + e_{m\%}/\mu^o(1 - e_{m\%}) = 1/\mu^o + e_{m\%}/\mu$
quindi l'errore di controllo peggiora in % di ($e_{m\%}/\mu$)%! ($\simeq$1 per mille nell'esempio).

permette di alterare la dinamica caratteristica del processo (la costante di tempo)!

OBIETTIVO DEL CORSO



Progettare il controllore
(C_{cl} , C_{ol} , *Comp*)
per assegnati
P, *A*, *T* e riferimento *y°*

Progettare significa formulare una descrizione matematica per la legge (algoritmo) di controllo.

Per farlo, dobbiamo partire da una descrizione matematica di *P*, *A*, *T*
(in contrapposizione alla descrizione verbale utilizzata dal controllore umano "esperto")

Dobbiamo saper 1) formulare e 2) analizzare un modello matematico di un singolo sistema, per poi interconnettere più sistemi.

Dobbiamo occuparci di
1) Modellistica
2) Teoria dei sistemi.

Nota: L'automatica è solo una delle tante discipline basate sulla Teoria dei sistemi.
Altre importanti applicazioni sono la simulazione, la generazione di previsioni, la stima di variabili non direttamente misurabili e l'identificazione del modello matematico a partire da dati
(fino alle moderne tecniche di AI).