Risposte Canoniche

Ingredienti

Teorema del valore iniziale e finale (e corollari)

$$\lim_{t \to 0} y(t) = \lim_{s \to \infty} sY(s) \qquad \lim_{t \to \infty} y(t) = \lim_{s \to 0} sY(s)$$

Da questo teorema deriva direttamente che la prima derivata non nulla all'istante iniziale della risposta allo scalino del sistema è r, il grado relativo del sistema stesso.

Risposta allo scalino, zeri superiori e mal inquadrati

Sia dato un sistema proprio con tutti i poli reali negativi. Siano:

- m_s: numero di zeri superiori
- δ: numero di zeri malinquadrati
- N: numero di estremanti (massimi e minimi) della risposta allo scalino

Allora:

$$m_s \leq N \leq m_s + \delta$$

e inoltre N è dispari [pari] se m_s è dispari [pari].

Antitrasformata di Laplace e sviluppo di Heaviside

$$sca(t) \stackrel{\mathcal{L}}{\Rightarrow} \frac{1}{s} \qquad \delta(t) \stackrel{\mathcal{L}}{\Rightarrow} 1 \qquad e^{-t/\tau} \stackrel{\mathcal{L}}{\Rightarrow} \frac{\tau}{1 + s\tau}$$

Esercizio 1

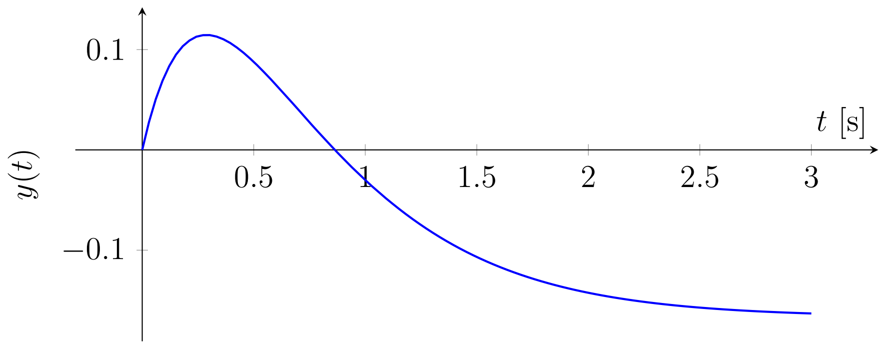
Tracciare qualitativamente la risposta allo scalino dei seguenti sistemi

$$G_1(s) = \frac{s-1}{(s+3)(s+2)} \qquad G_2(s) = \frac{s-1}{(s+2)}$$

$$G_1(s) = \frac{s-1}{(s+3)(s+2)}$$

1. I poli sono stabili $\Rightarrow$ Il sistema non diverge.
2. $\lambda_D = -2 \Rightarrow T_D = \frac{1}{2} \Rightarrow T_R = 2.5s$.
3. $r = 1 \Rightarrow y(0) = 0, \dot{y}(0) = 1$.
4. $G(0) = -\frac{1}{6}$.
5. $m_s = 1, \delta = 0 \Rightarrow N = 1$.

La soluzione è quindi:



$$G_2(s) = \frac{s-1}{(s+2)}$$

1. I poli sono stabili $\Rightarrow$ Il sistema non diverge.
2. $\lambda_D = -2 \Rightarrow T_D = \frac{1}{2} \Rightarrow T_R = 2.5s$.
3. $r = 0 \Rightarrow y(0) = 1$.
4. $G(0) = -\frac{1}{2}$.
5. Il sistema è improprio, quindi non si può applicare la regola degli zeri superiori.

In questo caso per il calcolo della risposta allo scalino dobbiamo utilizzare l'antitrasformata:

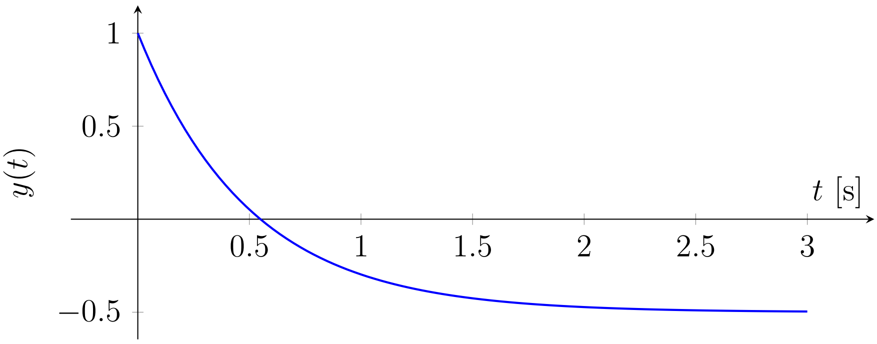
$$Y(s) = G(s)U(s) = \frac{s-1}{s+2} \cdot \frac{1}{s}$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}(Y(s)) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s-1}{s+2} \cdot \frac{1}{s}\right) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{A}{s+2} + \frac{B}{s}\right)$$

$$\begin{cases} A + B &= 1 \\ 2B &= -1 \end{cases} \qquad \begin{cases} A &= \frac{3}{2} \\ B &= -\frac{1}{2} \end{cases}$$

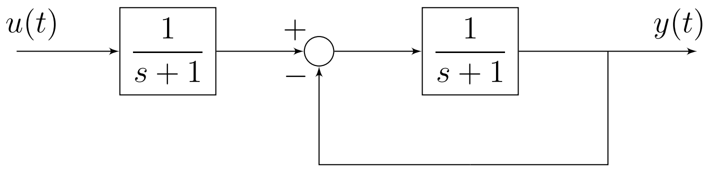
$$y(t) = \frac{3}{2}e^{-2t} - \frac{1}{2}$$

Ottenendo quindi:



Esercizio 2

Tracciare qualitativamente la risposta allo scalino e all'impulso del seguente sistema



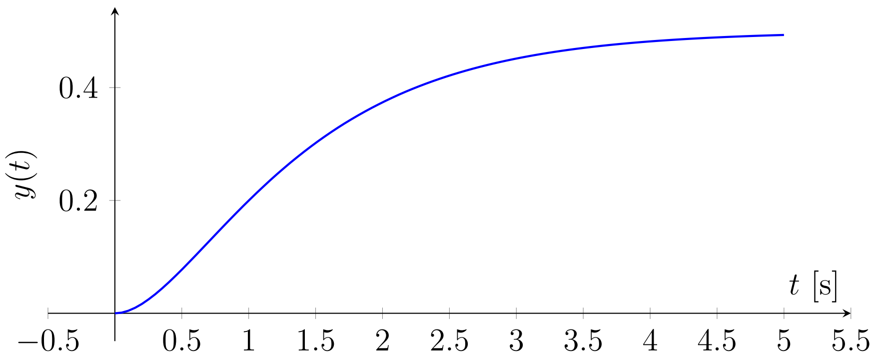
Calcoliamo la funzione di trasferimento del sistema:

$$G(s) = \frac{1}{s+1} \cdot \frac{\frac{1}{s+1}}{1 + \frac{1}{s+1}} = \frac{1}{(s+1)(s+2)}$$

A questo punto possiamo tracciare la risposta allo scalino con le solite regole:

1. I poli sono stabili $\Rightarrow$ Il sistema non diverge.
2. $\lambda_D = -1 \Rightarrow T_D = 1 \Rightarrow T_R = 5s$.
3. $r = 2 \Rightarrow y(0) = 0$, $\dot{y}(0) = 0$, $\ddot{y}(0) = 1$.
4. $G(0) = \frac{1}{2}$.
5. $m_s = 0, \delta = 0 \Rightarrow N = 0$.

La risposta allo scalino del sistema è quindi



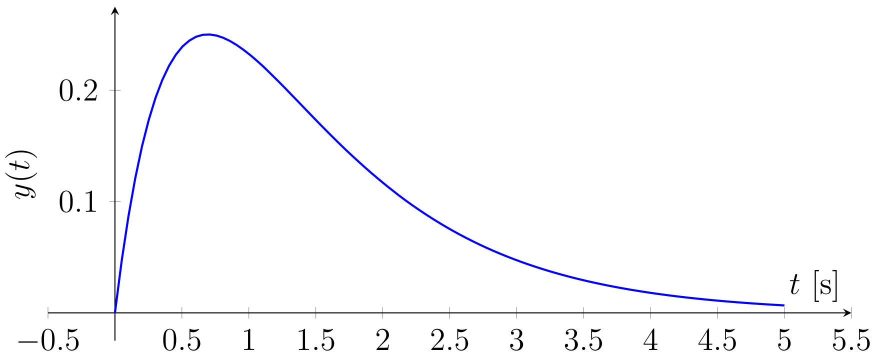
Per la risposta all'impulso non abbiamo criteri definiti. Utilizziamo quindi il teorema del valore iniziale e finale

$$y(0) = \lim_{s\to\infty} sY(s) = \lim_{s\to\infty} sG(s)U(s) = \lim_{s\to\infty} s \cdot \frac{1}{(s+1)(s+2)} = 0$$

$$\dot{y}(0) = \lim_{s\to\infty} s\mathcal{L}(\dot{y}) = \lim_{s\to\infty} s(sY(s) - y(0)) = \lim_{s\to\infty} s^2 \cdot \frac{1}{(s+1)(s+2)} = 1$$

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{s\to 0} sY(s) \lim_{s\to 0} sG(s)U(s) = \lim_{s\to 0} s \cdot \frac{1}{(s+1)(s+2)} = 0$$

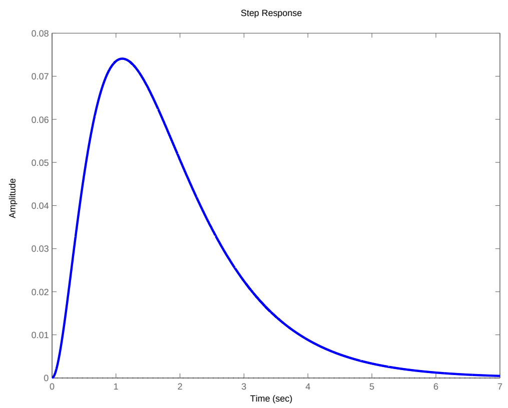
La risposta all'impulso del sistema è quindi

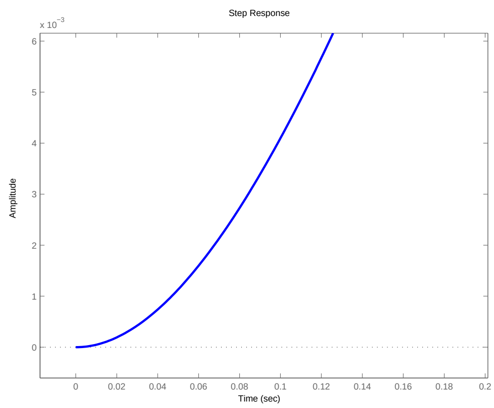


Si noti che era possibile, essendo il sistema proprio, ricavare la risposta all'impulso come la derivata della risposta allo scalino.

Esercizio 3

Qual'è la più semplice funzione di trasferimento che abbia come risposta allo scalino unitario quello rappresentato in figura? Si noti che $\dot{y}(0) = 0$, $\ddot{y}(0) > 0$.





Utilizziamo le solite regole della risposta allo scalino, in maniera inversa:

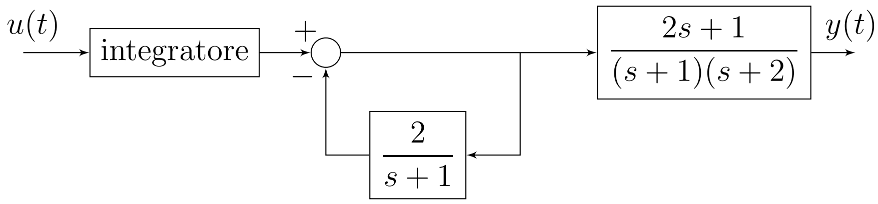
1. Il sistema non diverge $\Rightarrow$ I poli sono stabili.
2. $T_R \sim 5s \Rightarrow T_D = 1 \Rightarrow \lambda_D = -1$.
3. $y(0) = 0$, $\dot{y}(0) = 0$, $\ddot{y}(0) > 0 \Rightarrow r = 2$.
4. $\lim_{t\to\infty} y(t) = 0 \Rightarrow G(0) = 0$, c'è uno zero nell'origine.
5. $N = 1, m_s \geq 1 \Rightarrow m_s = 1, \delta = 0$.

Una possibile soluzione è quindi

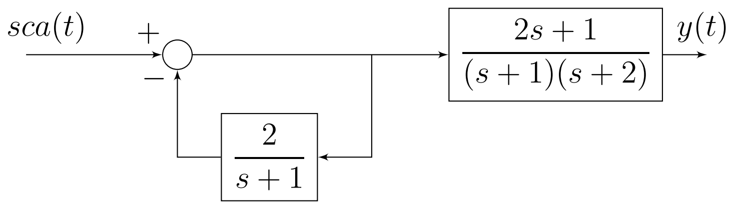
$$G(s) = \frac{s}{(s+1)(s+2)(s+3)}$$

Esercizio 4

Indicare l'andamento qualitativo della risposta all'impulso del sistema



La risposta all'impulso del sistema proposto è la risposta allo scalino del sistema



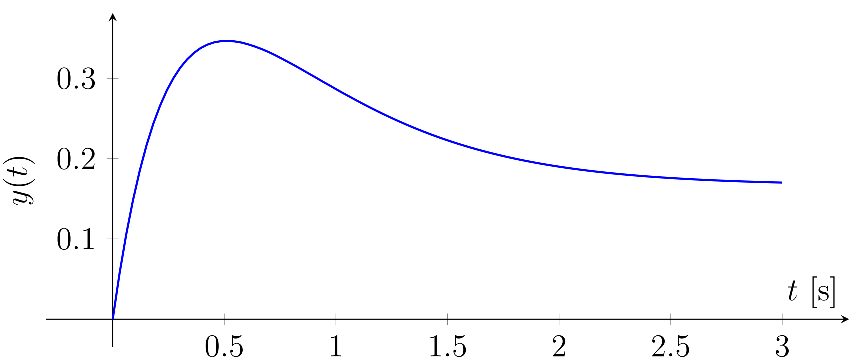
Calcoliamo la sua funzione di trasferimento:

$$\tilde{G}(s) = \frac{1}{1 + \dfrac{2}{s+1}} \cdot \frac{2s+1}{(s+1)(s+2)} = \frac{2s+1}{(s+2)(s+3)}$$

A questo punto utilizziamo le solite regole:

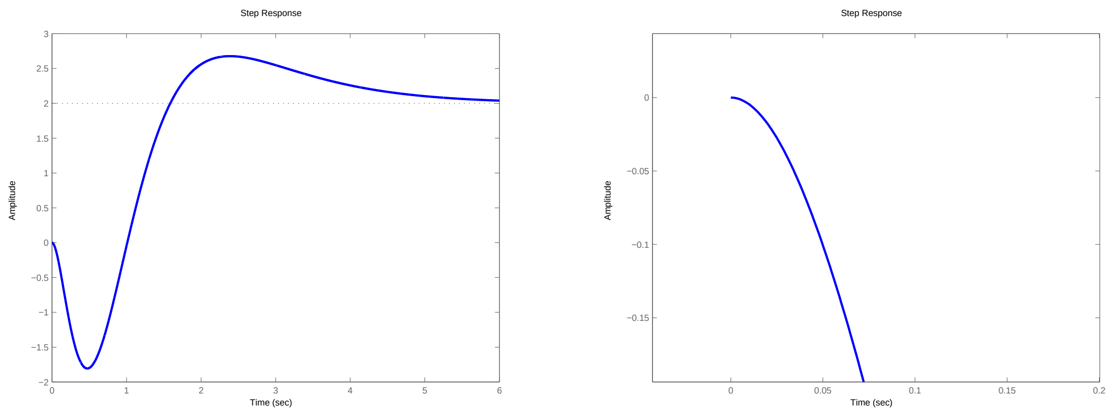
1. I poli sono stabili $\Rightarrow$ Il sistema non diverge.
2. $\lambda_D = -2 \Rightarrow T_D = \frac{1}{2} \Rightarrow T_R = 2.5s$.
3. $r = 1 \Rightarrow y(0) = 0,\ \dot{y}(0) = 2$.
4. $G(0) = \dfrac{1}{6}$.
5. $m_s = 1, \delta = 0 \Rightarrow N = 1$.

La risposta all'impulso del sistema è quindi



Esercizio 5

Qual'è la più semplice funzione di trasferimento che abbia come risposta allo scalino unitario quello rappresentato in figura? Si noti che $\dot{y}(0) = 0$, $\ddot{y}(0) < 0$.



Utilizziamo le solite regole della risposta allo scalino, in maniera inversa:

1. Il sistema non diverge $\Rightarrow$ I poli sono stabili.
2. $T_R \sim 5s \Rightarrow T_D = 1 \Rightarrow \lambda_D = -1$.
3. $y(0) = 0$, $\dot{y}(0) = 0$, $\ddot{y}(0) < 0 \Rightarrow r = 2$.
4. $\lim_{t\to\infty} y(t) = 2 \Rightarrow G(0) = 2$.
5. $N = 2, \Rightarrow m_s = 2$, $\delta = 0$ oppure $m_s = 0$, $\delta = 2$.

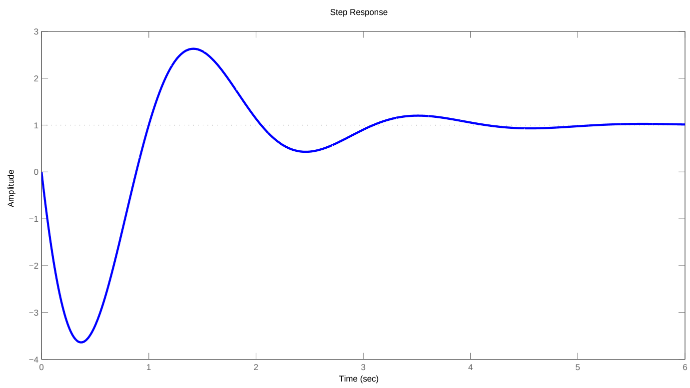
Per decidere tra le due possibilità bisogna notare che $\ddot{y}(0) < 0$, mentre $G(0) > 0$. Ho quindi bisogno di avere uno zero instabile, per cui $m_s \geq 1$.

Una possibile soluzione è quindi

$$G(s) = 96 \cdot \frac{(s + 0.5)(-s + 1)}{(s + 1)(s + 2)(s + 3)(s + 4)}$$

Esercizio 6

Qual'è la più semplice funzione di trasferimento che abbia come risposta allo scalino unitario quello rappresentato in figura? Si noti che $\dot{y}(0) = -20$ e che il sistema si assesta dopo circa 5 secondi di tempo.



Utilizziamo le solite regole della risposta allo scalino, in maniera inversa:

1. Il sistema non diverge $\Rightarrow$ I poli sono stabili.
2. $T_R \sim 5s \Rightarrow T_D = 1 \Rightarrow \lambda_D = -1$.
3. $y(0) = 0$, $\dot{y}(0) = -20 \Rightarrow r = 1$.
4. $\lim_{t\to\infty} y(t) = 1 \Rightarrow G(0) = 1$.
5. Ci sono oscillazioni persistenti $\Rightarrow$ Poli complessi. $T \sim 2s \Rightarrow \omega_0 = \dfrac{2\pi}{T} \sim 3$

Come prima, $\dot{y}(0) < 0$, mentre $G(0) > 0$. Lo zero presente è quindi instabile.

Una possibile soluzione è perciò

$$G(s) = \alpha \frac{-20/\alpha s + 1}{(s - (-1 + 3i))(s - (-1 - 3i))} = 10 \frac{(-2s + 1)}{(s^2 + 2s + 10)}$$

dove $\alpha = 10$ è stato ottenuto imponendo $G(0) = 1$.