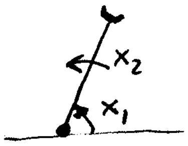
Regolazione della posizione dell'antenna



$\exists$ attrito viscoso

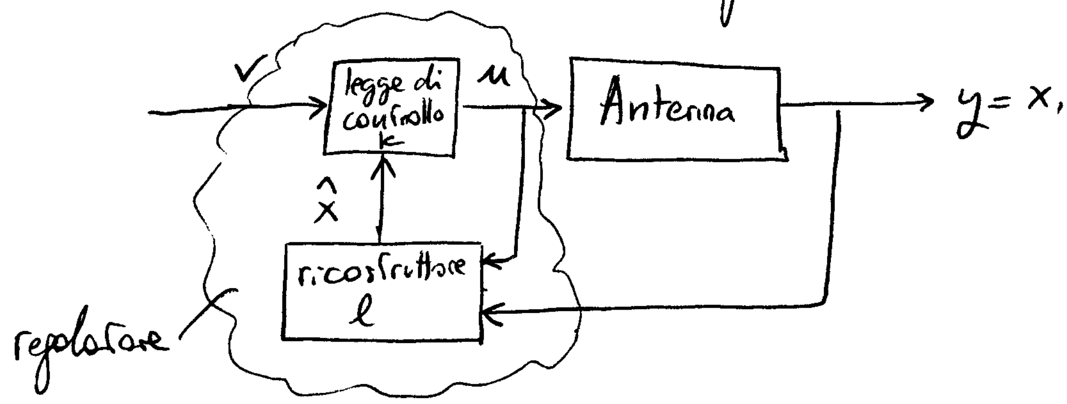
J = momento di inerzia

x_1 = posizione angolare

x_2 = velocità angolare

$y = x_1$

Misurando solo y voglio progettare un regolatore (legge di controllo k + ricostruttore ℓ), che porti l'antenna in una posizione desiderata $\bar{v}$ e velocità nulla (antenna ferma) in 5 unità di tempo.



Antenna:
$$\dot{x}_1 = x_2$$
$$\dot{x}_2 = \frac{1}{J}(u - h x_2)$$
$$y = x_1$$

$$A = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{h}{J} \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 0 \\ \frac{1}{J} \end{vmatrix} = b$$

$$c = \begin{vmatrix} 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\theta = \begin{vmatrix} c \\ cA \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$ $\det \theta \neq 0 \Rightarrow CO \Rightarrow$ a partire dalle misure di u e y posso ricostruire x con dinamica arbitraria

$$R = |b \;\; Ab| = \begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{J} \\ \frac{1}{J} & -\frac{h}{J^2} \end{vmatrix}$$ $\det R \neq 0 \Rightarrow CR \Rightarrow$ posso progettare una legge di controllo con dinamica arbitraria

OSSERVAZIONE

Legge di controllo $u = k\hat{x} + v$

$$\dot{x} = Ax + bu = Ax + bk\hat{x} + bv$$

A regime $\hat{x} = x$ (posso progettare l / $A+lc$ è asintoticam. stabile $\Rightarrow \hat{x} \to x$) e quindi, a regime,

$$\dot{x} = Ax + bkx + bv = (A+bk)x + bv$$

Potendo progettare k / $A+bk$ sia asint. stab, all'equilibrio sarà $\dot{x} = 0$ cioè

Noto k, dovrà essere $(A+bk)\begin{vmatrix}\bar{v}\\ 0\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}0\\ \frac{1}{J}\end{vmatrix} V = 0$ da cui ricaverò v!

Determiniamo, per esempio nel caso $J = 1$ $h = 1$, un regolatore che esaurisce i transitori in 5 unità di tempo

$$\Delta_{reg} = \Delta_{A+bk} \cdot \Delta_{A+lc} = (\lambda+1)^2(\lambda+1)^2$$

$\left(\begin{array}{c} 5T_d = 5 \\ T_d = 1 \\ -\mathrm{Re}(\lambda_d) = -1 \end{array}\right)$

$$A+bk = \begin{vmatrix}0 & 1\\ 0 & -1\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}0\\ 1\end{vmatrix}\begin{vmatrix}k_1 & k_2\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}0 & 1\\ k_1 & -1+k_2\end{vmatrix}$$

$tr = -1 + k_2 = -2$

$det = -k_1 = 1$

$$k = \begin{vmatrix}-1\\ -1\end{vmatrix}^T$$

$$A+lc = \begin{vmatrix}0 & 1\\ 0 & -1\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}l_1\\ l_2\end{vmatrix}\begin{vmatrix}1 & 0\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}l_1 & 1\\ l_2 & -1\end{vmatrix}$$

$tr = l_1 - 1 = -2$

$det = -l_1 - l_2 = 1$

$$l = \begin{vmatrix}-1\\ 0\end{vmatrix}$$

$$(A+bk)\begin{vmatrix}\bar{v}\\ 0\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}0\\ 1\end{vmatrix} v = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix}0 & 1\\ -1 & -2\end{vmatrix}\begin{vmatrix}\bar{v}\\ 0\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}0\\ 1\end{vmatrix} v = 0 \Rightarrow -\bar{v} + v = 0$$

$v = \bar{v}$

posizione desiderata

$$u = k\hat{x} + v = (\bar{v} - \hat{x}_1) + (0 - \hat{x}_2) \;!$$

Retroazione STATICA dall'uscita

$\underbrace{u = k y}_{\text{scalare}}$: misuro solo $y = x_1$, ma non ricostruisco x_2.

Cosa riesco a fare?

$$\dot{x} = Ax + bu = Ax + b(ky) = Ax + bkcx$$
$$= \underbrace{(A + bkc)}\, x$$

è la matrice di stato del sistema controllato.

Nell'esempio:

$$A + bkc = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{h}{J} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 \\ 1/J \end{vmatrix} k \begin{vmatrix} 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{h}{J} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ k/J & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ k/J & -h/J \end{vmatrix}$$

$$\mathrm{tr}(A + bkc) = -\frac{h}{J} < 0$$

$$\det(A + bkc) = -\frac{k}{J}, \quad > 0 \text{ purché } k < 0$$

E' possibile (IN QUESTO ESEMPIO) rendere il sistema controllato asintoticamente stabile; ma NON E' possibile assegnare arbitrariamente gli autovalori. Infatti:

$$\Delta_{A+bkc}(\lambda) = \lambda^2 + \frac{h}{J}\lambda - \frac{k}{J} = 0 \implies \lambda = \frac{-\frac{h}{J} \pm \sqrt{\frac{h^2}{J^2} + 4\frac{k}{J}}}{2}$$

Dato il sistema a tempo continuo

$$A = \begin{vmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} \qquad b = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix}$$

$$c = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

studiarne la stabilità asintotica e la stabilità esterna.

Stabilità asintotica: A è triangolare a blocchi:

$$A = \left|\begin{array}{c:cc} -2 & 0 & 1 \\ \hdashline 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{array}\right| \qquad \sigma(A) = \{-2\} \cup \sigma(A_2)$$

$$A_2 = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{tr}\, A_2 = -2 < 0 \\ \det A_2 = 2 > 0 \end{array}\right\} A_2 \text{ asint. stab.}$$

$\Longrightarrow$ A asintot. stabile

Ricavo la funzione di trasferimento:

$$sX_1 = -2X_1 + X_3$$
$$sX_2 = -X_2 + X_3$$
$$sX_3 = -X_2 - X_3 + u$$
$$y = X_1$$

$$\Longrightarrow \quad G(s) = \frac{(s+1)}{(s+2)(s^2+2s+2)}$$

$\{\text{poli}\} = \{-2, -1 \pm i\}$

$\mathrm{Re}(p_i) < 0 \ \forall i$

$\Downarrow$

sistema esternamente stabile

$\text{grado}\big[\text{den}[G(s)]\big] = 3 = n$

$\Updownarrow$

Σ compl. raggiung. & compl. osservabile

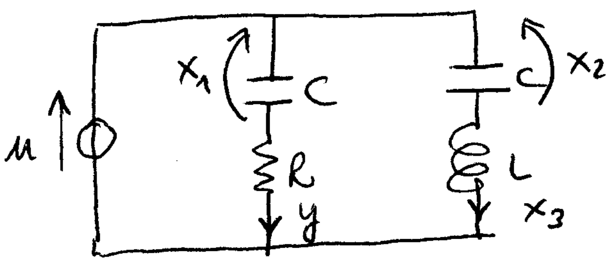
$\Updownarrow$

$\{\text{poli}\} = \{\text{autovalori}\} = \sigma(A)$

$\Updownarrow$

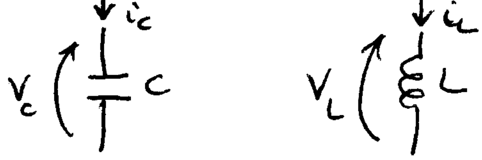
Σ ASINT. STAB. $\Longleftrightarrow$ Σ ESTERN. STAB.

Si dimostri che la rete elettrica in figura non è asintoticamente stabile ma è esternamente stabile



y forz limitata per u limitata
$\Updownarrow$
$\mathrm{Re}(\text{poli}) < 0$
$\Downarrow$
A.S $\Rightarrow$ E.S. $(\{\lambda\} \supseteq \{\text{poli}\})$
$\nLeftarrow$

$i_c = C\dot{V}_c \qquad V_L = L\dot{i}_L$



$$\dot{x}_1 = \frac{1}{C}\left[\frac{u - x_1}{R}\right]$$

$$\dot{x}_2 = \frac{1}{C}\left[x_3\right]$$

$$\dot{x}_3 = \frac{1}{L}\left[u - x_2\right]$$

$$y = \frac{u - x_1}{R}$$

$$A = \begin{array}{c} \mathrm{Re}<0 \\ \left|\begin{array}{c|cc} -\frac{1}{RC} & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \frac{1}{C} \\ 0 & -\frac{1}{L} & 0 \end{array}\right| \end{array}$$

$\hookrightarrow tr = 0$

$\det = \frac{1}{LC}$

$$\lambda = \pm \frac{i}{\sqrt{LC}}$$

$\Rightarrow$ A è semplicemente stabile

Calcolo f.d.t

$Ry = u - x_1 \longrightarrow Ry = u - \frac{u}{sRC+1}$

$sRCx_1 = u - x_1 \rightarrow x_1 = \frac{u}{sRC+1}$

$$R(sRC+1)y = sRCu \Rightarrow G(s) = \frac{s\cancel{R}C}{\cancel{R}(sRC+1)}$$

polo in $-\frac{1}{RC} \longrightarrow$ stabilità esterna

(NB) La stabilità esterna dipende dalla scelta di y!

Esempio: $y = x_3$

$$\Rightarrow \quad \mathring{x}_1 = \frac{1}{C}\left[\frac{u - x_1}{R}\right]$$

$$\mathring{x}_2 = \frac{1}{C}\left[x_3\right] \longrightarrow sCx_2 = x_3 \rightarrow x_2 = \frac{x_3}{sC}$$

$$\mathring{x}_3 = \frac{1}{L}\left[u - x_2\right] \longrightarrow Lsx_3 = u - x_2 \rightarrow Lsx_3 = u - \frac{x_3}{sC}$$

$$y = x_3$$

$$x_3 = \frac{u\,sC}{s^2LC+1} \Rightarrow y = \frac{sC}{s^2LC+1}\,u$$

$$\tilde{G}(s) = \frac{sC}{s^2LC+1} \longrightarrow \text{poli in } \pm\frac{i}{\sqrt{LC}} \Rightarrow \text{non è esternamente stabile}$$