Dato il sistema $\dot{x} = Ax + bu$ $A = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \end{vmatrix} = b$

) Studiare la stabilità

) Studiarne la raggiungibilità

) è possibile con una legge di controllo $u = kx + v$ stabilizzare il sistema?

d) è possibile avere una durata dei transitori inferiore o uguale a 10 unità di tempo? In caso affermativo, determinare una possibile legge di controllo k.

---

a) $tr(A) = 0$ $\det(A) = -1 - 2 = -3 \Rightarrow \lambda^2 - 3 = 0$ $\lambda = \pm\sqrt{3}$ INST.

b) $R = |b \; Ab| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$ $\det R \neq 0 \Rightarrow$ CR

c) sì perché il sistema è CR

$(A,b)$ CR $\Leftrightarrow \forall \Delta^* \; \exists k \,/\, \Delta_{A+bk} = \Delta^* \rightsquigarrow$ asintoticamente stabile in particolare

d) sì perché il sistema è CR

$T = 10 \Rightarrow T_d = 2 \Rightarrow \mathrm{Re}(\lambda_d) = -\frac{1}{2}$

$\lambda_1 = -\frac{1}{2}$ $\lambda_2 = -\frac{1}{2}$ $\lambda_1 + \lambda_2 = -1$ $\lambda_1 \lambda_2 = \frac{1}{4}$

$$A + bk = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} k_1 & k_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1+k_1 & 1+k_2 \\ 2+k_1 & -1+k_2 \end{vmatrix}$$

$$\begin{cases} k_1 + k_2 = -1 \\ (1+k_1)(-1+k_2) - (2+k_1)(1+k_2) = \frac{1}{4} \end{cases} \qquad \begin{cases} k_1 + k_2 = -1 \\ +2k_1 + k_2 = -\frac{13}{4} \end{cases}$$

$k_1 = -\frac{9}{4} \rightsquigarrow$ (seconda eq. − prima eq.)

$k_2 = 5/4$

Dato il sistema $x(t+1) = Ax(t) + bu(t)$

$$A = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \end{vmatrix} = b$$

1) Studiare la stabilità del sistema
2) Dire se è possibile stabilizzare il sistema con una retroazione lineare dello stato
3) Determinare k che annulli i transitori in tempo finito

---

a) $|tr(A)| = |2+3| = 5 > n = 2 \Rightarrow$ INST.

b) $R = |b \; Ab| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}$ $\det R \neq 0 \Rightarrow$ ST

c) $\lambda_1 = \lambda_2 = 0 \qquad \Delta_{A+bk} = \lambda^2$

$$A+bk = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \end{vmatrix} |k_1 \quad k_2| = \begin{vmatrix} 2+k_1 & -1+k_2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}$$

$tr(A+bk) = 5 + k_1 = 0$

$\det(A+bk) = 6 + 3k_1 - 1 + k_2 = 0$

$k = |-5 \quad 10|$

2008 5/12

Dato il sistema a tempo continuo $\Sigma(A, -, c, -)$ dire se è possibile ricostruire asintoticamente il suo stato a partire dalle rilevazioni di u e y. In caso affermativo, si determini un possibile ricostruttore asintotico.

$$A = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \qquad c = \begin{vmatrix} 1 & 1 \end{vmatrix}$$

---

$$\Theta = \begin{vmatrix} c \\ cA \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} \qquad \det \Theta \neq 0 \Rightarrow C.O. \Longrightarrow \text{sì!}$$

$l \,/\, A+lc$ ha autovalori con $\mathrm{Re}<0$, p.e. $\lambda_{1,2} = -1 \Rightarrow \Delta_{A+lc} = (\lambda+1)^2$

$$A + lc = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} l_1 \\ l_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1+l_1 & 2+l_1 \\ l_2 & 1+l_2 \end{vmatrix}$$

$$\mathrm{tr}(A+lc) = l_1 + l_2$$

$$\det(A+lc) = -1 - l_2 + l_1 + \cancel{l_1 l_2} - 2l_2 - \cancel{l_1 l_2} = l_1 - 3l_2 - 1$$

$$\Delta_{A+lc} = (\lambda+1)^2 = \lambda^2 + 2\lambda + 1 \longrightarrow \begin{array}{l} \mathrm{tr}(A+lc) = -2 \\ \det(A+lc) = 1 \end{array}$$

$$\begin{cases} l_1 + l_2 = -2 \\ l_1 - 3l_2 = 2 \end{cases} \longrightarrow \begin{array}{l} l_2 = -1 \\ l_1 = -1 \end{array} \Longrightarrow l = \begin{vmatrix} -1 \\ -1 \end{vmatrix}$$

Dato il sistema $\begin{aligned} x(t+1) &= A\,x(t) \\ y(t) &= c\,x(t) \end{aligned}$ , dire se è possibile progettare un ricostruttore asintotico dello stato che esaurisca i transitori in tempo finito. In caso affermativo determinarlo. $A = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}$ $c = \begin{vmatrix} 0 & 1 \end{vmatrix}$

---

$$\vartheta = \begin{vmatrix} c \\ cA \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \quad \det \vartheta \neq 0 \Rightarrow \text{sì}$$

$$\Delta_{A+lc} = \lambda^2$$

$$A + lc = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} l_1 \\ l_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1+l_1 \\ -1 & 1+l_2 \end{vmatrix}$$

$$\mathrm{tr}(A+lc) = 3 + l_2 = 0 \longrightarrow l_2 = -3$$

$$\det(A+lc) = 2 + 2l_2 + 1 + l_1 = 0 \longrightarrow l_1 = 3$$

$$l = \begin{vmatrix} 3 \\ -3 \end{vmatrix}$$

Dato il sistema $\dot{x} = Ax + bu$, $y = cx$

$$A = \begin{vmatrix} -4 & -2 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix} = b$$

$$c = \begin{vmatrix} 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Studiarne la stabilità
Dire se esiste un regolatore stabilizzante. In caso affermativo determinare quello che esaurisce i transitori in 5 unità di tempo.

---

$$tr(A) = -3 < 0$$
$$\det(A) = -10 < 0 \Rightarrow \text{INSTAB.}$$

$$R = \begin{vmatrix} b & Ab \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \quad \det R \neq 0 \Rightarrow \text{CR.}$$ (⇒ ∃ legge di controllo stabilizzante)

$$\mathcal{O} = \begin{vmatrix} c \\ cA \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} \quad \det \mathcal{O} \neq 0 \Rightarrow \text{CO}$$ (⇒ ∃ ricostruttore asintotico dello stato)

$$5T_d = \quad T = 5 \Rightarrow T_d = 1 \Rightarrow -\frac{1}{\mathrm{Re}(\lambda_d)} = 1 \Rightarrow \mathrm{Re}(\lambda_d) = -1$$

Scelgo $k, l$ / $\Delta_{Reg} = \Delta_{A+bk} \cdot \Delta_{A+lc} = (\lambda+1)^2(\lambda+1)^2 = (\lambda+1)^4$

$$A + bk = \begin{vmatrix} -4 & -2 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} k_1 & k_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -4 & -2 \\ -3+k_1 & 1+k_2 \end{vmatrix}$$

$tr = -3 + k_2 = -2$
$\det = -4 - 4k_2 + 6 + 2k_1 = 1$

$$k = \begin{vmatrix} \frac{15}{2} & 1 \end{vmatrix}$$

$$A + lc = \begin{vmatrix} -4 & -2 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} l_1 \\ l_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -4 & -2+l_1 \\ -3 & 1+l_2 \end{vmatrix}$$

$tr = -3 + l_2 = -2$
$\det = -4 - 4l_2 - 6 + 3l_1 = 1$

$$l = \begin{vmatrix} 5 \\ 1 \end{vmatrix}$$

ES10