Si consideri il seguente sistema a tempo continuo:

$$\dot{x} = 2(x - y)$$
$$\dot{y} = x^2 - 4x - y$$

a) Determinare gli stati di equilibrio.
b) Studiarne la stabilità mediante linearizzazione, classificando inoltre il tipo di equilibrio.
c) Tracciare il quadro locale delle traiettorie nell'intorno degli stati di equilibrio. Proporre infine un quadro globale delle traiettorie coerente con tutti gli elementi fin qui determinati.

Soluzione [se necessario proseguire sul retro]:

a) $\begin{cases} 2(x-y) = 0 \\ y = x^2 - 4x \end{cases} \Rightarrow \bar{x}' = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \bar{x}'' = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \end{bmatrix}$

b) $J = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 2x-4 & -1 \end{bmatrix}$

$J(\bar{x}') = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -4 & -1 \end{bmatrix}$ $\quad \lambda^2 - \lambda - 10 = 0$

$\lambda = \dfrac{1 \pm \sqrt{41}}{2} \cong \begin{matrix} \nearrow 3.70 \\ \searrow -2.70 \end{matrix}$ INSTABILE (sella)

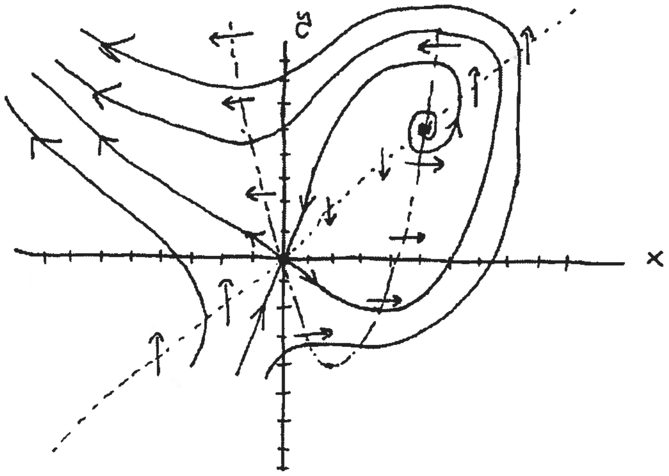
$J(\bar{x}'') = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 6 & -1 \end{bmatrix}$ $\quad \lambda^2 - \lambda + 10 = 0$

$\lambda = \dfrac{1 \pm \sqrt{1-40}}{2} = \dfrac{1}{2} \pm i\dfrac{\sqrt{39}}{2}$ INSTABILE (fuoco)

c) calcolo autovettori di $J(\bar{x}')$:

$\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -4 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 3.70 \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ $\quad 2x_1 - 2x_2 = 3.70\, x_1$, $\quad x_2 = -0.85\, x_1$ (varietà instabile)

$\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -4 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = -2.70 \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ $\quad 2x_1 - 2x_2 = -2.70\, x_1$, $\quad x_2 = 2.35\, x_1$ (varietà stabile)



Dato il sistema

$$\dot{x} = 2x(1-x) + y = f_1(x,y)$$
$$\dot{y} = -y = f_2(x,y)$$

a) determinarne gli equilibri e studiarne la stabilità con il metodo della linearizzazione;
b) tracciare il quadro delle traiettorie in piccolo;
c) attraverso il metodo delle isocline tracciare il quadro delle traiettorie globali (in grande).

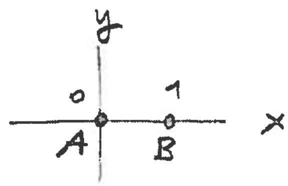
---

a) Equilibri

$$\dot{x} = 0 \rightarrow 2x(1-x) + y = 0$$
$$\dot{y} = 0 \rightarrow -y = 0$$

da cui $\bar{y} = 0$ e $2\bar{x}(1-\bar{x}) = 0$ $\left\langle \begin{array}{l} \bar{x} = 0 \\ \bar{x} = 1 \end{array} \right.$

$\Rightarrow A(0,0)$ e $B(1,0)$



stabilità

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2-4x & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}$$

$J_A = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}$ $\quad \lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -1$ $\Rightarrow$ INST (sella)

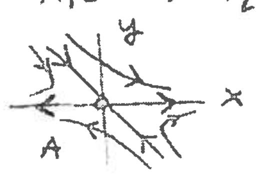
$J_B = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}$ $\quad \lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = -1$ $\Rightarrow$ AS. STAB (nodo stabile)

b) Autovettori in A

$J_A w = \lambda w \qquad \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} w_1 \\ w_2 \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} w_1 \\ w_2 \end{vmatrix}$

$\lambda_1 = 2 \rightarrow w_2 = 0$

$\lambda_1 = -1 \rightarrow w_2 = -3w_1$

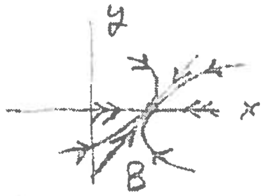


Autovettori in B

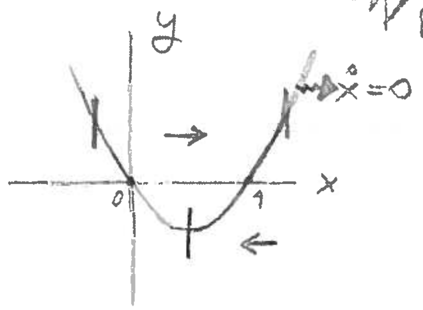
$$J_B w = \lambda w \qquad \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} w_1 \\ w_2 \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} w_1 \\ w_2 \end{vmatrix}$$

$\lambda_1 = -2 \to w_2 = 0$

$\lambda_2 = -1 \to w_1 = w_2 \to w^{(D)}$



c) $\dot{x} \geq 0 \to y \geq 2x^2 - 2x$

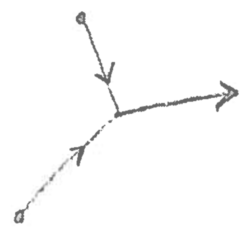


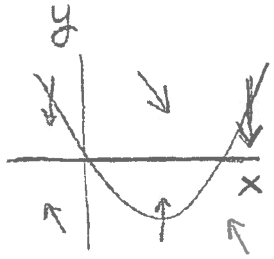
NOTA: pendenza della parabola in $x=0$

$$y' = 4x - 2\Big|_{x=0} = -2$$

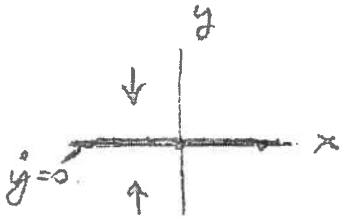
pendenza in $x = 1$

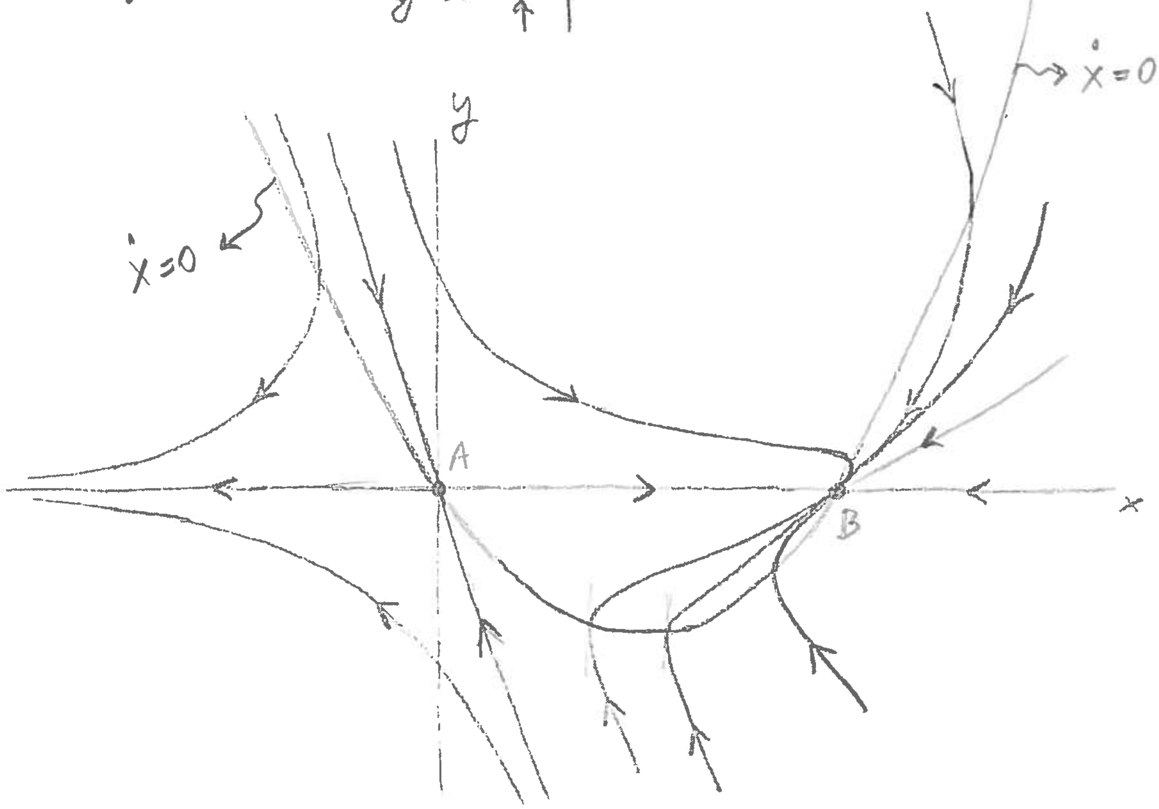
$$y' = 4x - 2\Big|_{x=1} = 2$$





$\dot{y} \geq 0 \to y \leq 0$





Studiare il modello di competizione tra specie animali

$$\dot{x}_1 = r_1 x_1\left(1-\frac{x_1}{k_1}\right) - a x_1 x_2$$
$$\dot{x}_2 = r_2 x_2\left(1-\frac{x_2}{k_2}\right) - a x_1 x_2$$

x_i = biomassa della i-esima specie (i = 1, 2)
r_i = tasso intrinseco di crescita della i-esima specie (i = 1, 2)
k_i = capacità portante della i-esima specie (i = 1, 2)
a = coefficiente di competizione interspecifica.

per i seguenti valori dei parametri: $r_1 = 1 \quad r_2 = 1 \quad k_1 = 1 \quad k_2 = 1 \quad a = 2$

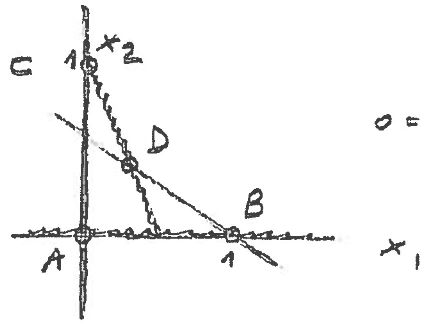
$$\dot{x}_1 = x_1(1-x_1) - 2x_1x_2$$
$$\dot{x}_2 = x_2(1-x_2) - 2x_1x_2$$

$$J = \begin{vmatrix} 1-2x_1-2x_2 & -2x_1 \\ -2x_2 & 1-2x_2-2x_1 \end{vmatrix}$$

Equilibri → ∩ isocline

$$\dot{x}_1 = 0 \quad \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}x_1 \end{cases}$$

$$\dot{x}_2 = 0 \quad \begin{cases} x_2 = 0 \\ x_2 = 1 - 2x_1 \end{cases}$$



o = equilibri

$A(0,0) \quad B(1,0) \quad C(0\ 1) \quad D(1/3, 1/3)$

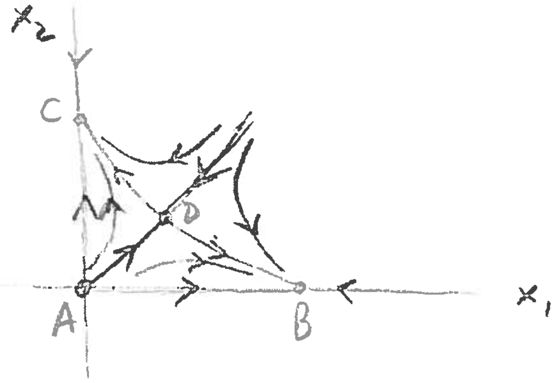
Stabilità

$$J_A = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$ Nodo instabile

$$J_B = \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}$$ Nodo stabile

$$J_C = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -2 & -1 \end{vmatrix}$$ Nodo stabile

$$J_D = \begin{vmatrix} -1/3 & -2/3 \\ -2/3 & -1/3 \end{vmatrix}$$ tr < 0, det = $-1/3$ → Sella



- sugli assi la dinamica è logistica
- a regime uno dei due competitori scompare (mutua esclusione)
- ruolo dello stato iniziale sull'esito della competizione

Dato il sistema

$$\dot{x} = -y - 2x + x^3$$
$$\dot{y} = y - px$$

determinarne gli equilibri e studiarne la stabilità al variare di p con il metodo della linearizzazione.

Equilibri:

$\dot{x} = 0 \rightarrow -y - 2x + x^3 = 0 \rightarrow -px - 2x + x^3 = 0$

$\dot{y} = 0 \rightarrow y = px$

$x(-p - 2 + x^2) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{2+p} \quad \in \mathbb{R} \iff p \geq -2 \end{cases}$

- $p \leq -2 \qquad A(0,0)$
- $p > -2 \qquad A(0,0) \quad B(\sqrt{2+p},\ p\sqrt{2+p}) \quad C(-\sqrt{2+p},\ -p\sqrt{2+p})$

stabilità

$$J = \begin{vmatrix} -2+3x^2 & -1 \\ -p & 1 \end{vmatrix}$$

$J_A = \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -p & 1 \end{vmatrix}$ $\quad tr = -1 < 0$, $\quad det = -(2+p)$

- $p > -2 \quad det < 0 \quad$ sella (instab.)
- $p < -2 \quad det > 0 \quad$ stabile
- $p = -2 \quad det = 0 \quad \exists \lambda = 0 \quad ?$

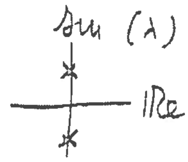
$$J_{B,C} = \begin{vmatrix} 4+3p & -1 \\ -p & 1 \end{vmatrix}$$

$tr = 5 + 3p$

$det = 2(2+p) > 0$ essendo $p > -2$ in B e C

$-2 < p < -5/3 \rightarrow tr < 0 \rightarrow$ stabile

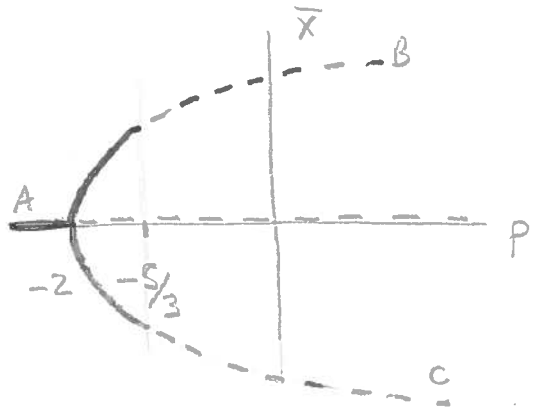
$p > -5/3 \rightarrow tr > 0 \rightarrow$ instabile

$p = -5/3 \rightarrow tr = 0$ e $det > 0 \Rightarrow$  $\mathbb{R}e(\lambda) = 0\ ?$

Complessivamente si ha:

	A	B	C
$p<-2$	Asint. stabile	/	/
$-2<p<-5/3$	Instab.	Asint. stab.	Asint stab.
$p>-5/3$	Instab	Instab	Instab

Graficamente



— = EQ. STABILE

- - - = EQ. INSTABILE

$p=-2$ e $p=-5/3$ sono punti di biforcazione

Coppie di individui sicuri e non sinergici: coppie robuste, coppie fragili, [redacted] rotture di coppia e uso di social networks.

x_i = sentimento partner i per partner j

$i, j = 1, 2$ con $i \neq j$

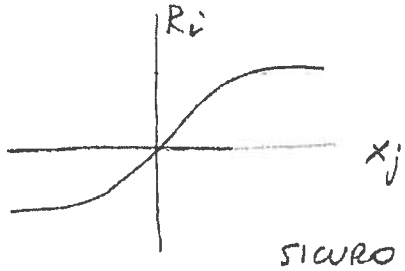
ODIO — INDIFFERENZA — AMORE x_i

ANTIPATIA — 0 — SIMPATIA

$$\dot{x}_1 = -\alpha_1 x_1 + R_1(x_2) + A_2$$

OBLIO RICAMBIO FASCINO

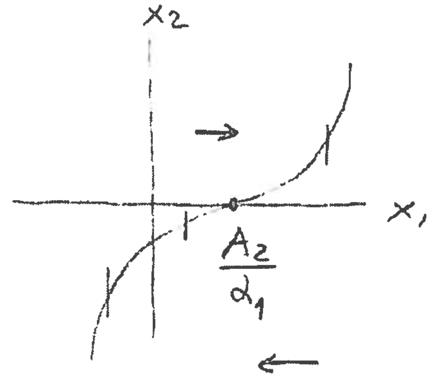
$$\dot{x}_2 = -\alpha_2 x_2 + R_2(x_1) + A_1$$



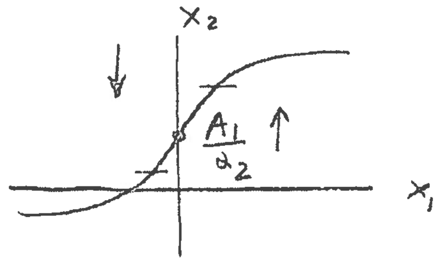
SICURO

Isocline

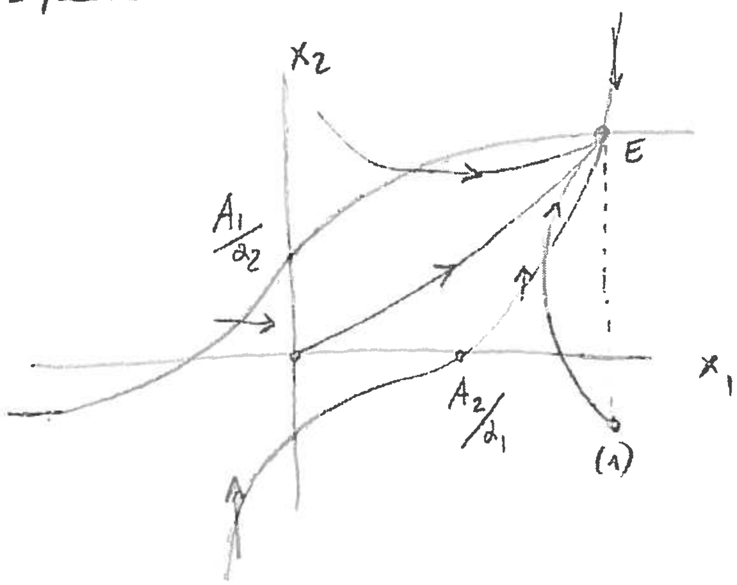
$$\dot{x}_1 = 0 \qquad x_1 = \frac{1}{\alpha_1}\left[R_1(x_2) + A_2\right]$$



$$\dot{x}_2 = 0 \qquad x_2 = \frac{1}{\alpha_2}\left[R_2(x_1) + A_1\right]$$



Equilibri = $\cap$ isocline



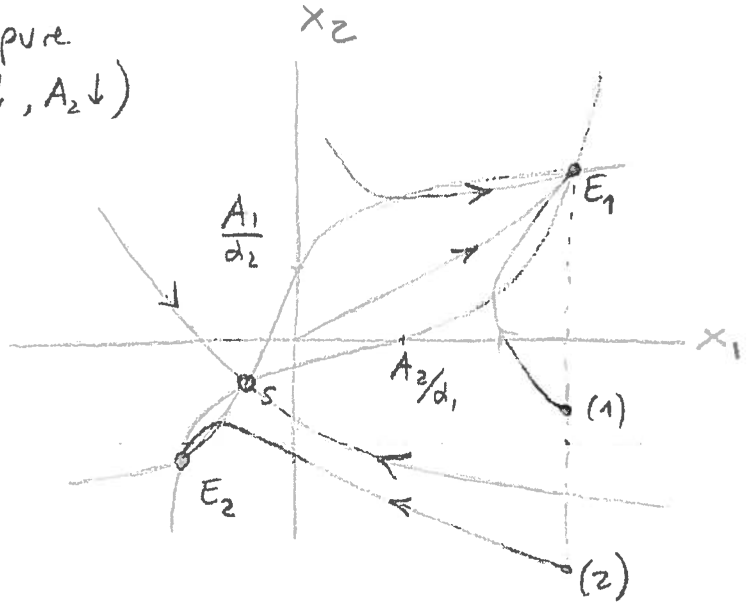
COPPIE ROBUSTE

$\exists!$ equilibrio

$\forall$ perturbazione(*) sullo stato, la coppia tende verso E

(*) p.e. calo di interesse del partner 2: $E \to (1)$

oppure
$(A_1\downarrow, A_2\downarrow)$



COPPIE FRAGILI

$\exists$ 2 equilibri localmente asintotic. stabili: E_1, E_2

S = sella

A seconda delle c.i. tendo verso E_1 o E_2

$\Downarrow$

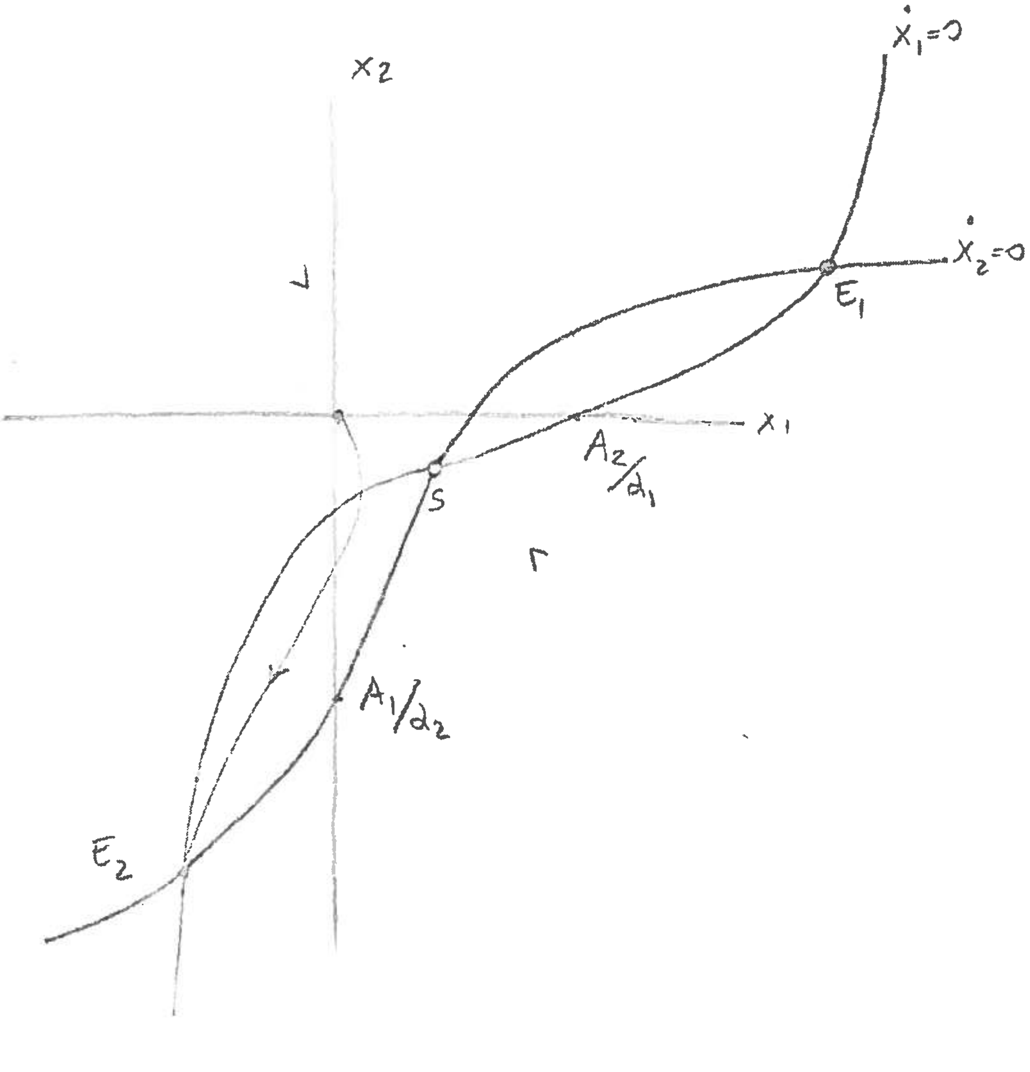
se 2 ha un calo di interesse contenuto (1) si tende verso E_1
se è elevato (2), la coppia tende verso una situazione di antagonismo E_2

con conseguente ROTTURA DI COPPIA

NOTA: $(0,0)$ = indifferenza = incontro

Qui $(0,0) \in \mathcal{B}(E_1) \Rightarrow$ partendo da $(0,0)$ la coppia $\to E_1$
↳ bacino di attrazione

USO DI SOCIAL NETWORKS



A_1 non è affascinante
$A_1 < 0$

$(0,0) \in \mathcal{B}(E_2)$

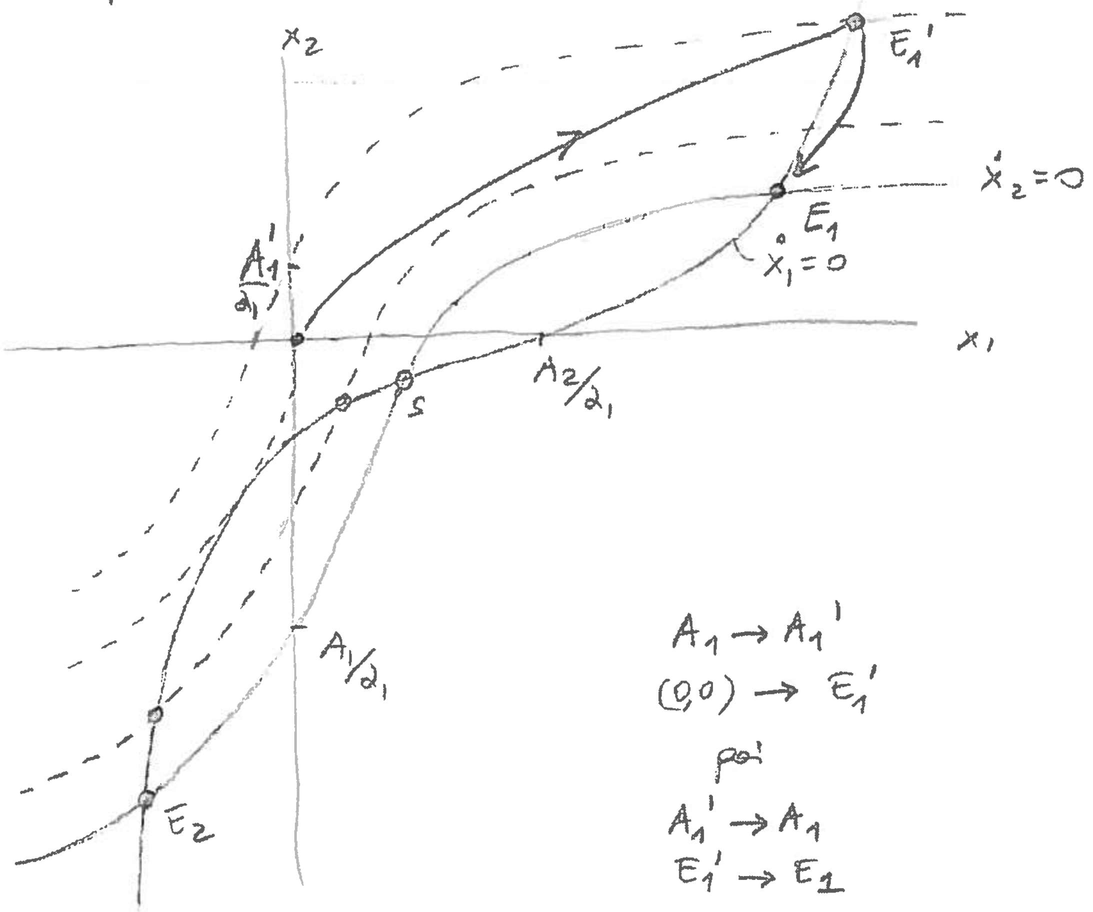
la coppia $\to E_2$ (antagonismo)

Cosa può fare il partner 1

Può "nascondersi" (dietro uso di social networks) per sembrare più bello di quello che è : $A_1 \uparrow$ finché E_2 ed S collidono e scompaiono.

Così facendo $\exists !$ equilibrio : $(0,0) \to E_1$

Ora 1 può mostrarsi ma oramai è in un equilibrio positivo



$A_1 \to A_1'$

$(0,0) \to E_1'$

poi

$A_1' \to A_1$

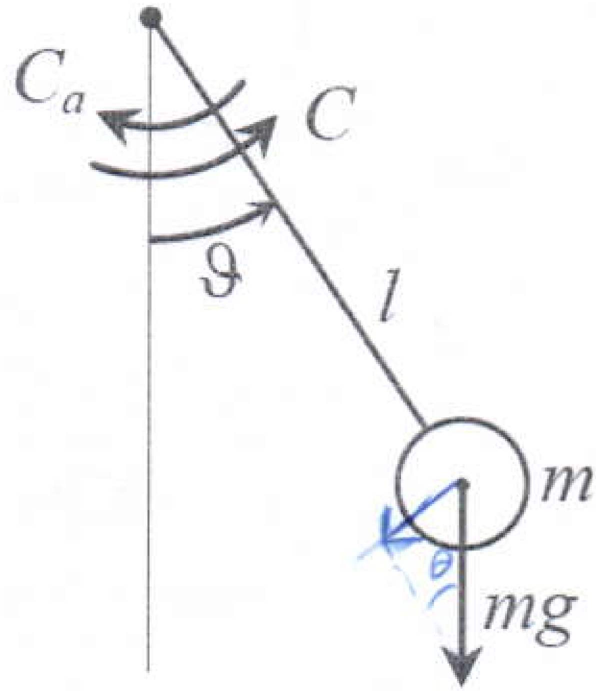
$E_1' \to E_1$

Si studi, mediante un modello dinamico, il comportamento del pendolo in figura. Si noti che il pendolo può essere controllato applicando in ingresso una coppia *C*, e che il pendolo è immerso in un fluido con attrito viscoso *h*. In particolare:

a) Si studino gli equilibri del sistema al variare di C

Consideriamo ora il caso in cui m=1 kg, l=1m, h=1 Ns e u=0 oppure u=g.

b) Si valuti la stabilità di ciascuno degli equilibri trovati
c) Si disegni il quadro delle traiettorie nell'intorno degli equilibri
d) Si disegni un possibile quadro delle traiettorie



• MODELLO

$$J\ddot{\theta} = -mg\sin\theta \cdot l - C_a + C \qquad J = ml^2 \quad C_a = h\dot{\theta}$$

$x_1 = \theta$ $\quad \dot{x}_1 = x_2$

$x_2 = \dot{\theta}$ $\quad \dot{x}_2 = \frac{1}{ml^2}\left(-mg\sin x_1 l - h x_2 + C\right) = -\frac{g}{l}\sin x_1 - \frac{h}{ml^2}x_2 + \frac{C}{m}$

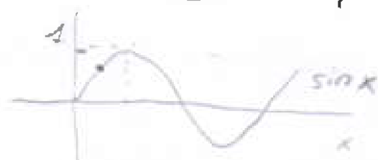
• EQUILIBRI

$\dot{x}_1 = 0 \Rightarrow x_2 = 0$

$\dot{x}_2 = 0 \Rightarrow -\frac{g}{l}\sin x_1 + \frac{C}{ml^2} = 0 \Rightarrow \bar{x} = \left(\arcsin\frac{C}{mgl}, 0\right)$

se $|C| > mgl \Rightarrow \nexists$ equilibri

se $|C| = mgl$ equilibri in $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$



se $|C| < mgl$ equilibri in $x_1 = \arcsin\frac{C}{mgl} + 2k\pi$ e $x_1 = \frac{\pi}{2} - \arcsin\frac{C}{mgl} + 2k\pi$

• JACOBIANO

$$J(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{l}\cos(x_1) & -\frac{h}{ml^2} \end{bmatrix}$$

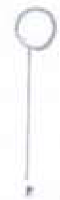
· STABILITA' e QUADRO TRAIETTORIE

$m = 1\,kg \qquad h = 1\,Nms \qquad \ell = 1\,m \qquad u = 0$

$\bar{x}_1 = (2k\pi, 0) \qquad\qquad \bar{x}_2 = (\pi + 2k\pi, 0)$

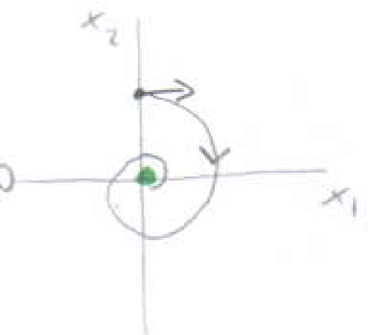
$J = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -g & -1 \end{bmatrix}$ $tr = -1 < 0$ $det = g > 0$

AS. STABILE



$J = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ g & -1 \end{bmatrix}$ $det = -g < 0$

SELLA



$2k\pi$

$\lambda(\lambda+1) + g = 0$

$\lambda_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4g}}{2}$

FUOCO STABILE

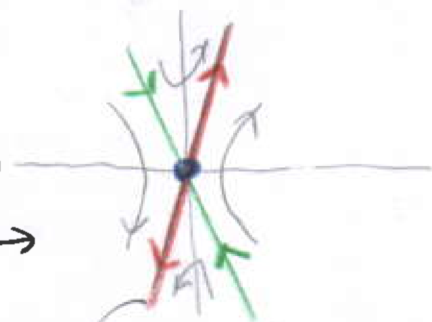
$\lambda_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{4g-1}}{2}$

AUTOVETTORI

$Jv = \lambda v$

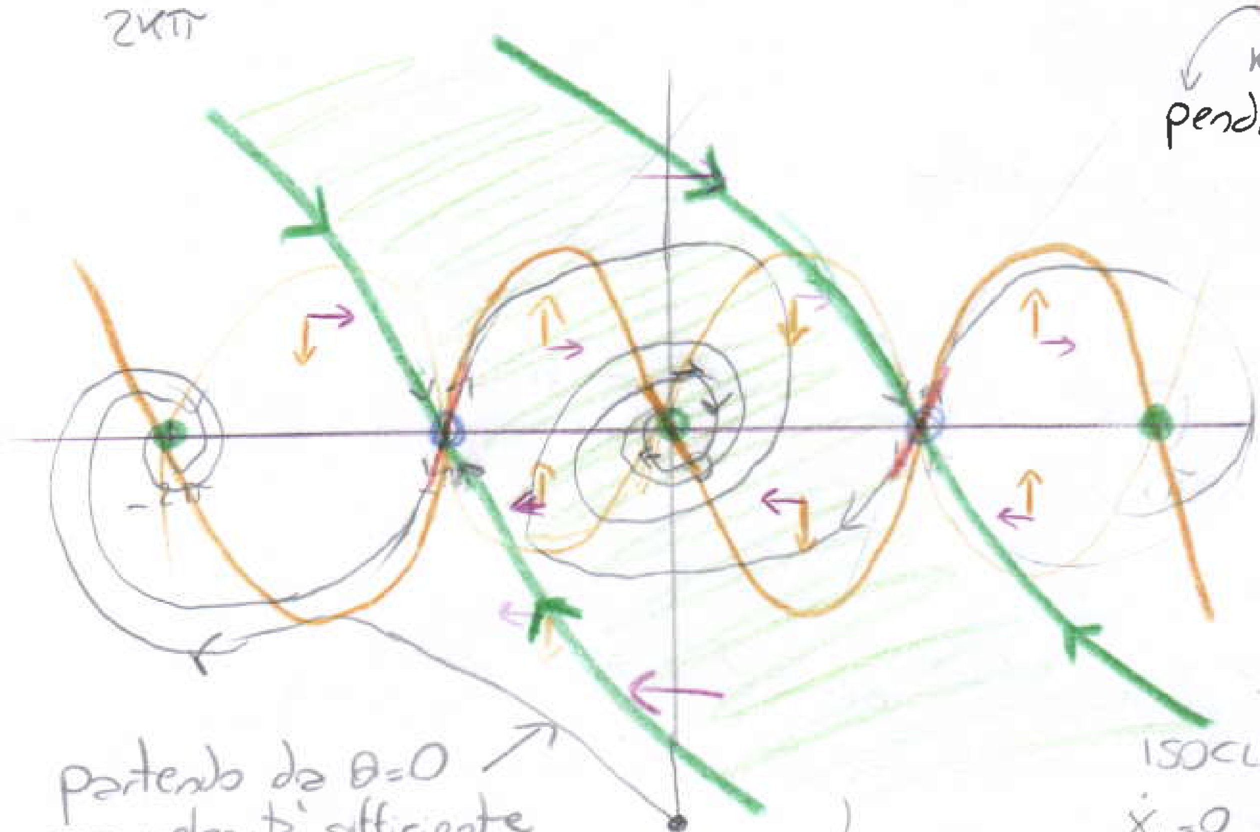
1° EQUAZIONE

$v_2 = \lambda v_1 \longrightarrow$



$k\pi$

pendenza < 0



partendo da $\theta = 0$ con velocità sufficiente vado a finire in un altro equilibrio (faccio un giro)

ISOCLINE

$\dot{x}_1 = 0 \Rightarrow x_2 = 0$

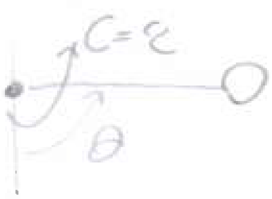
$\dot{x}_2 = 0 \Rightarrow x_2 = -g \sin x_1$

Le manifold stabili delle selle delimitano i bacini d'attrazione di ciascun equilibrio stabile

• STABILITÀ E QUADRO TRAIETTORIE

$m = 1\ Kg \qquad h = 1\ Nms \qquad \ell = 1\ m \qquad C = g$

$\bar{x} = \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi ,\ 0 \right)$

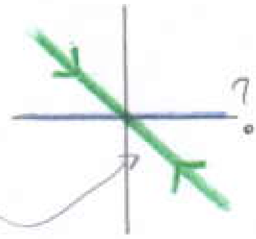


$J = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

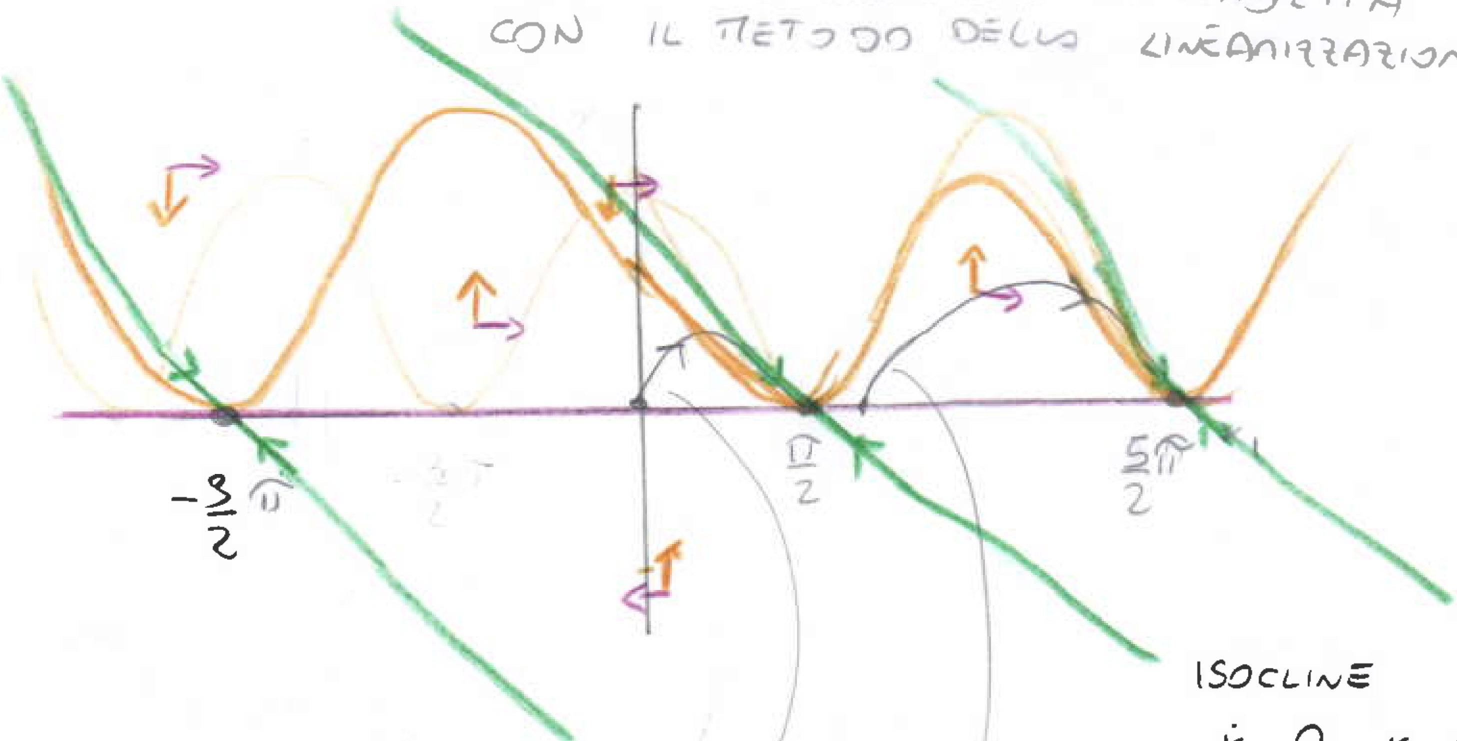
$v_2 = \lambda v_1$

$\lambda_1 = 0$

$\lambda_2 = -1$



NON POSSO DISCUTERE LA STABILITÀ CON IL METODO DELLA LINEARIZZAZIONE



ISOCLINE

$\dot{x}_1 = 0 \qquad x_2 = 0$

$\dot{x}_2 = 0 \qquad x_2 = g(1 - \sin x_1)$

se parto da fermo vado a convergere all'equilibrio

ma appena lo supero faccio un giro e vado a convergere al successivo

GLI EQUILIBRI SONO INSTABILI