Dato il sistema $\dot{x} = Ax$ con $A = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ p & -2 \end{vmatrix}$ ($p \in \Re$), discutere, al variare di p

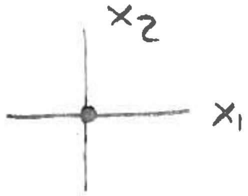
a) equilibrio (esistenza e unicità);
b) stabilità;
c) tempo per andare a regime;
d) esistenza di infinite oscillazioni.

Si determini inoltre il quadro delle traiettorie per i seguenti valori di p: -1; 0; 3.

---

a) $\det(A) = 2 - 2p = 2(1-p)$

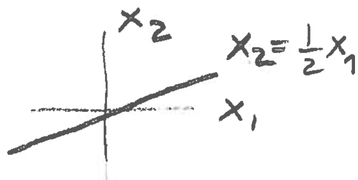
- $p \neq 1 \rightarrow \det(A) \neq 0 \rightarrow \exists!\ \bar{x} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix}$



- $p = 1 \rightarrow \det(A) = 0$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + 2x_2 \\ \dot{x}_2 = x_1 - 2x_2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -\bar{x}_1 + 2\bar{x}_2 = 0 \\ \bar{x}_1 - 2\bar{x}_2 = 0 \end{cases} \rightarrow \bar{x}_1 = 2\bar{x}_2$$

$\exists \infty\ \ \bar{x} = \begin{vmatrix} 2\bar{x}_2 \\ \bar{x}_2 \end{vmatrix}$ con $\bar{x}_2$ qualsiasi



b) $tr(A) = -3 < 0$

$\det(A) = 2(1-p) \rightarrow$ la stabilità dipende dal segno di $\det(A)$

- $p < 1 \rightarrow \det(A) > 0 \rightarrow$ Asint. Stabilità
- $p > 1 \rightarrow \det(A) < 0 \rightarrow$ Instabilità
- $p = 1 \rightarrow \det(A) = 0$ $\quad \lambda_1 + \lambda_2 = tr(A) = -3$

$\qquad\qquad\qquad\qquad \lambda_1 \lambda_2 = \det(A) = 0$

da cui $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 = -3 \rightarrow$ Semplice stabilità

$\swarrow$

radice semplice di Δ_A e Ψ_A

c) $p<1 \rightsquigarrow$ asintotica stabilità

$$\Delta_A(\lambda) = \lambda^2 + 3\lambda + 2(1-p) = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9-8(1-p)}}{2} = \frac{-3 \pm \sqrt{1+8p}}{2}$$

- $\begin{cases} 1+8p<0 \\ p<1 \end{cases} \rightsquigarrow p < -\frac{1}{8} \quad \lambda_{1,2} \in \mathbb{C}$ e $\mathrm{Re}(\lambda_{1,2}) = -3/2$

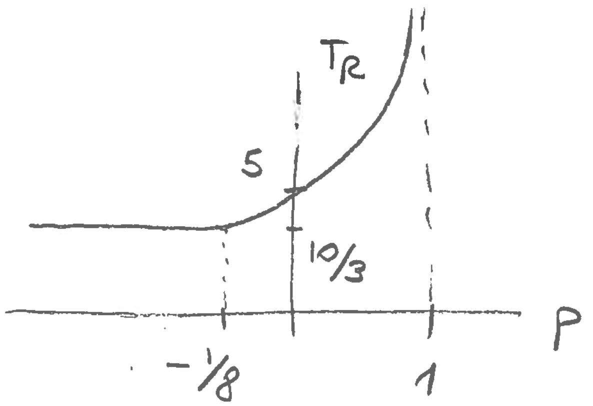
$T_D = 2/3$ e $T_R = 5T_D = 10/3$

- $\begin{cases} 1+8p \geq 0 \\ p<1 \end{cases} \quad -\frac{1}{8} \leq p < 1 \quad \lambda_{1,2} \in \mathbb{R}$

$$\lambda_D = \frac{-3+\sqrt{1+8p}}{2}, \quad T_D = \frac{2}{3-\sqrt{1+8p}} \quad \text{e} \quad T_R = \frac{10}{3-\sqrt{1+8p}}$$

$\Downarrow$

$T_R \xrightarrow[p \to 1]{} +\infty$

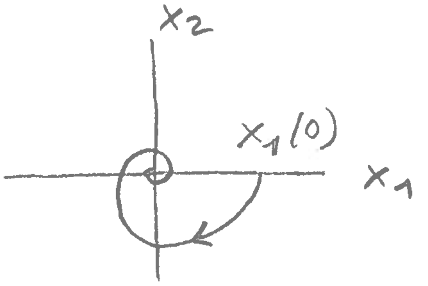


d) $\exists$ oscillazioni $\rightarrow \exists \lambda \in \mathbb{C} \rightarrow p < -1/8$

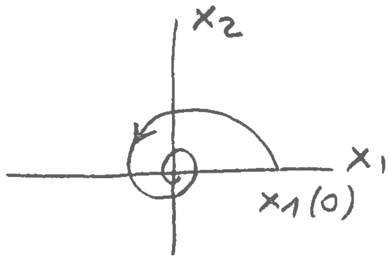
Quadro delle traiettorie

$\boxed{p=-1} \rightsquigarrow \left.\begin{array}{c} \lambda_{1,2} \in \mathbb{C} \\ + \\ \text{asintotica stabilità} \end{array}\right\} \Longrightarrow$ Fuoco stabile

$$\dot{x}_1 = -x_1 + 2x_2$$
$$\dot{x}_2 = -x_1 - 2x_2$$



oppure



?

$$x(0) = \begin{vmatrix} x_1(0) \\ 0 \end{vmatrix} \quad \text{con} \quad x_1(0) > 0$$

$$\dot{x}(0) = \begin{vmatrix} -x_1(0) \\ -x_1(0) \end{vmatrix} \rightarrow \dot{x}_2(0) < 0 \Rightarrow$$ il quadro esatto è quello di sinistra.

$\boxed{p=0}$ $\left.\begin{array}{c} \lambda_{1,2} \in \mathbb{R} \\ + \\ \text{asintotica stabilità} \end{array}\right\} \Rightarrow$ Nodo stabile

$$\dot{x}_1 = -x_1 + 2x_2$$
$$\dot{x}_2 = -2x_2$$

- $\lambda_1 = -1$ $\quad Aw = \lambda_1 w \quad \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} w_1 \\ w_2 \end{vmatrix} = -1 \begin{vmatrix} w_1 \\ w_2 \end{vmatrix}$

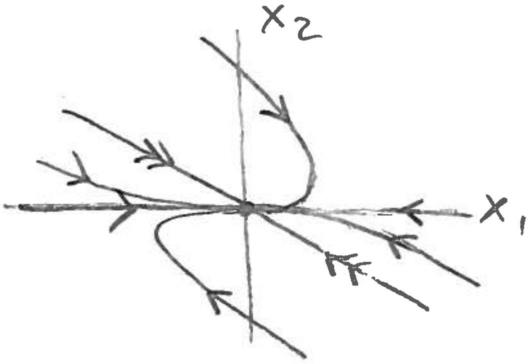
  $\downarrow$

  λ_D

$$\begin{cases} -w_1 + 2w_2 = -w_1 \\ -2w_2 = -w_2 \end{cases} \rightarrow w_2 = 0 \rightarrow w_D$$

- $\lambda_2 = -2$ $\quad Aw = \lambda_2 w \quad \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} w_1 \\ w_2 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} w_1 \\ w_2 \end{vmatrix}$

$$\begin{cases} -w_1 + 2w_2 = -2w_1 \\ -2w_2 = -2w_2 \end{cases} \rightarrow w_1 = -2w_2$$



$\boxed{p=3}$ Instabile

$$\lambda_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{1+24}}{2} = \frac{-3 \pm 5}{2} = \begin{cases} -4 \\ 1 \end{cases} \Rightarrow \text{sella}$$

$$\dot{x}_1 = -x_1 + 2x_2$$
$$\dot{x}_2 = 3x_1 - 2x_2$$
$$A = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}$$

- $\lambda_1 = -4$

$Aw = \lambda_1 w \qquad \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} w_1 \\ w_2 \end{vmatrix} = -4 \begin{vmatrix} w_1 \\ w_2 \end{vmatrix}$

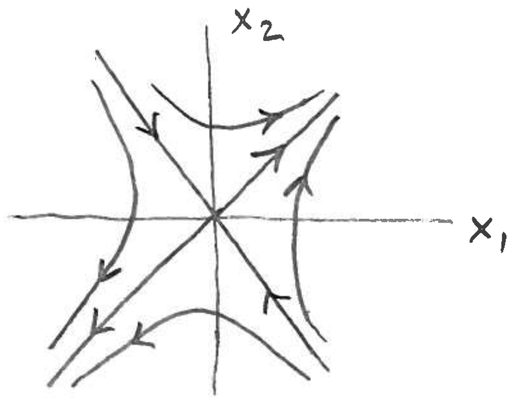
$$\begin{cases} -w_1 + 2w_2 = -4w_1 \\ 3w_1 - 2w_2 = -4w_2 \end{cases} \rightarrow \quad w_2 = -\frac{3}{2} w_1$$

- $\lambda_2 = 1$

$Aw = \lambda_2 w$

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} w_1 \\ w_2 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} w_1 \\ w_2 \end{vmatrix}$$

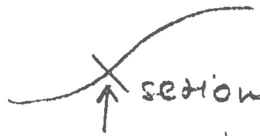
$$\begin{cases} -w_1 + 2w_2 = w_1 \\ 3w_1 - 2w_2 = w_2 \end{cases} \rightarrow \quad w_2 = w_1$$



Si determini, mediante il modello di qualità fluviale di Streeter & Phelps, l'andamento della concentrazione di ossigeno in una sezione di un fiume a seguito di uno scarico di inquinante biodegradabile concentrato in tale sezione.

Modello di Streeter & Phelps

$b(t)$ = concentrazione di inquinante biodegradabile



$c(t)$ = concentrazione di ossigeno disciolto nel fiume

- I batteri degradano l'inquinante proporzionalmente alla quantità di inquinante
- La degradazione comporta un consumo di ossigeno (deossigenazione) da parte dei batteri

NOTA

Supponendo deossigenazione ≡ degradazione
⇒ b viene misurata in unità di ossigeno necessarie per degradare l'inquinante

- Lo scambio di ossigeno aria-acqua genera un termine di riossigenazione proporzionale alla differenza tra la concentrazione max di ossigeno che può trovarsi disciolto nel fiume in assenza di inquinante (c_s = concentrazione di saturazione) e la concentrazione di ossigeno effettivamente disciolto nel fiume (c)

Sotto queste ipotesi si ha:

$\dot{b} = -k_1 b \rightarrow$ degradazione

$\dot{c} = -k_1 b + k_2 (c_s - c) \rightarrow$ riossigenazione

deossigenazione

$\equiv$

degradazione

$k_1 =$ costante di degradazione / deossigenazione

$k_2 =$ costante di riossigenazione

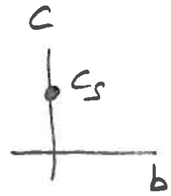
$c_s =$ concentrazione di saturazione dell'ossigeno

Stabilità

$$A = \begin{vmatrix} -k_1 & 0 \\ -k_1 & -k_2 \end{vmatrix} \qquad \begin{aligned} \lambda_1 &= -k_1 \\ \lambda_2 &= -k_2 \end{aligned} \implies \text{Asintotica stabilità}$$

Equilibrio

$$\begin{aligned} -k_1 \bar{b} &= 0 \\ -k_1 \bar{b} + k_2 (c_s - \bar{c}) &= 0 \end{aligned} \implies \begin{aligned} \bar{b} &= 0 \\ \bar{c} &= c_s \end{aligned} \rightarrow \text{fiume pulito}$$



Scarico di inquinante concentrato in una sezione

$$\implies \begin{aligned} b &= b_0 \neq 0 \\ c &= c_0 \neq c_s \end{aligned}$$

Come evolvono le traiettorie, a partire da tale condizione iniziale?

Autovettori: $\quad Aw = \lambda w$

$$\begin{vmatrix} -k_1 & 0 \\ -k_1 & -k_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} w_1 \\ w_2 \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} w_1 \\ w_2 \end{vmatrix}$$

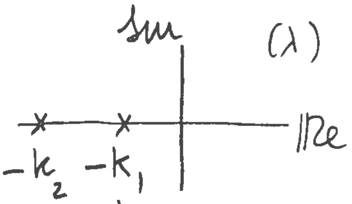
$$\begin{cases} -k_1 w_1 = \lambda w_1 \\ -k_1 w_1 - k_2 w_2 = \lambda w_2 \end{cases}$$

- $\lambda_1 = -k_1 \rightsquigarrow \quad -k_1 w_1 - k_2 w_2 = -k_1 w_2$

$$w_2 = \frac{k_1}{k_1 - k_2} w_1 \rightsquigarrow w^{(1)}$$

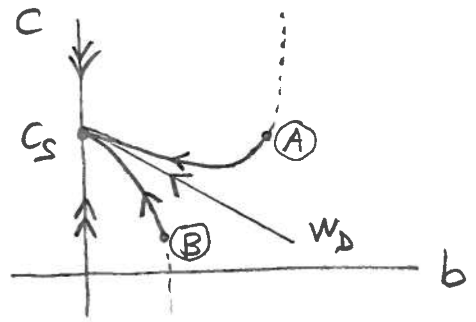
- $\lambda_2 = -k_2 \rightsquigarrow \quad -k_1 w_1 = -k_2 w_1 \longrightarrow w_1 = 0 \rightsquigarrow w^{(2)}$

$\boxed{k_1 < k_2}$



$$\frac{k_1}{k_1 - k_2} < 0$$

$\lambda_2 \qquad \lambda_1 = \lambda_D \quad e \quad w^{(1)} = w_D$

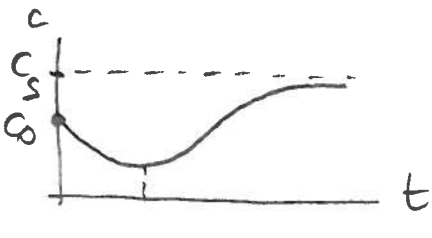


Sia in A che in B

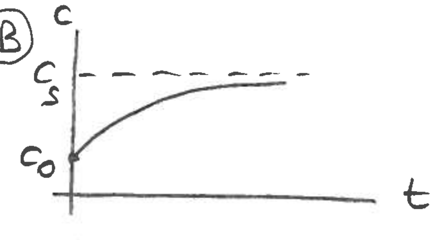
b migliora

Per quanto riguarda c si ha

A



B

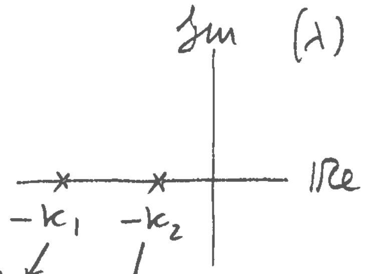


CURVA A SACCO
(possibile anossia)

c migliora

Inizialmente c peggiora
per poi migliorare

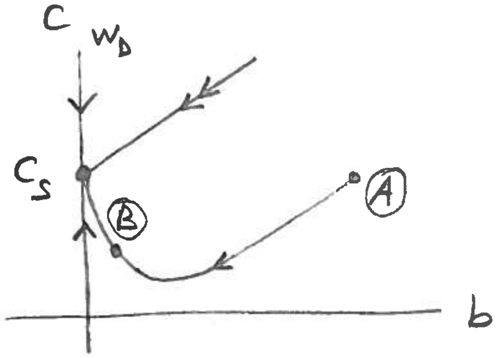
$\boxed{k_1 > k_2}$



$\dfrac{k_1}{k_1 - k_2} > 0$

λ_1

$\lambda_2 = \lambda_D$ e $w^{(2)} = w_D$

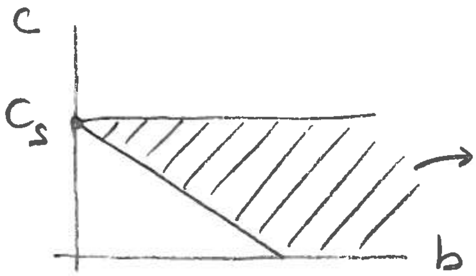


come prima in A e B sia per b che per c

Sotto quali condizioni $\exists$ la curva a sacco?

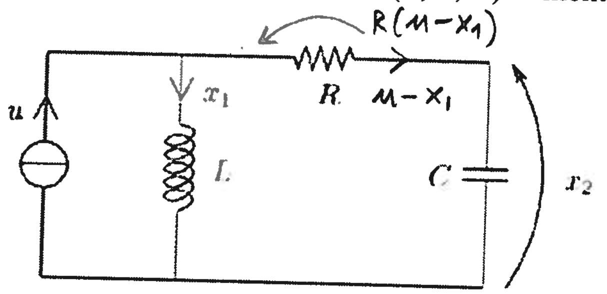
$(b_0, c_0) \;/\; \dot{c}(0) < 0 \Rightarrow -k_1 b_0 + k_2 (c_s - c_0) < 0$

$c_0 > -\dfrac{k_1}{k_2} b_0 + c_s$ (plausibilmente $c_0 < c_s$)



tutte le c.i. $\in$ //// $\Rightarrow$ curva a sacco

Si consideri il circuito elettrico (R, L, C) alimentato in corrente rappresentato in figura.



Qualora al circuito inizialmente a riposo venga applicata una corrente costante $\bar{u}$, si dimostri che la corrente x_1 nell'induttore può tendere verso il suo valore di equilibrio $\bar{u}$ con infinite oscillazioni smorzate oppure con una singola sovraelongazione.

Infine, si mostri che l'andamento caratterizzato da oscillazioni smorzate si verifica quando la resistenza R è minore del valore critico $R^* = 2\sqrt{L/C}$ e che l'andamento caratterizzato da una sovraelongazione, si verifica quando $R > R^*$.

$$\dot{x}_1 = \frac{1}{L}\left(x_2 + R(u - x_1)\right) = -\frac{R}{L}x_1 + \frac{1}{L}x_2 + \frac{R}{L}u$$

$$\dot{x}_2 = \frac{1}{C}(u - x_1) = -\frac{1}{C}x_1 + \frac{1}{C}u$$

$$A = \begin{vmatrix} -R/L & 1/L \\ -1/C & 0 \end{vmatrix}$$

Equilibrio $\quad \bar{x}_2 + R\bar{u} - R\bar{x}_1 = 0 \quad \rightarrow \quad \bar{x}_2 = 0$

$\bar{x}_1 = \bar{u}$ $\qquad \bar{x} = \begin{vmatrix} \bar{u} \\ 0 \end{vmatrix}$

Stabilità

$tr(A) = -R/L < 0$

$det(A) = \frac{1}{LC} > 0$ $\quad \rightarrow \quad$ Asintotica stabilità $\forall R, L, C$

$$\Rightarrow \forall x(0) \quad x(t) \xrightarrow[t \to \infty]{} \bar{x}$$

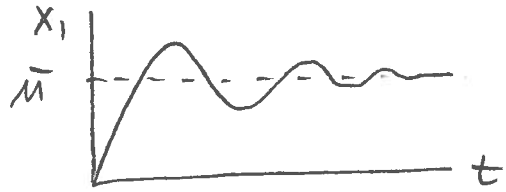
Traiettorie

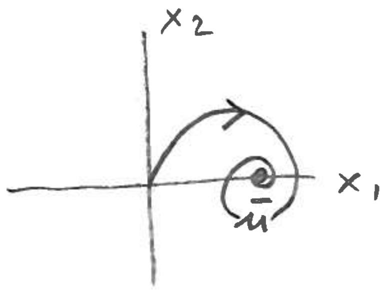
$$\lambda^2 + \frac{R}{L}\lambda + \frac{1}{LC} = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-R/L \pm \sqrt{\frac{R^2}{L^2} - \frac{4}{LC}}}{2}$$

- $\frac{R^2}{L^2} - \frac{4}{LC} < 0 \rightarrow R^2 < \frac{4L}{C} \rightarrow R < 2\sqrt{L/C} = R^* \Rightarrow$

$\lambda_{1,2} \in \mathbb{C} \Rightarrow$ fuoco stabile con infinite oscillazioni





$$x(0) = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix} \rightarrow \dot{x}(0) = \begin{vmatrix} \frac{R}{L}\bar{u} \\ \frac{1}{C}\bar{u} \end{vmatrix} \begin{matrix} \oplus \\ \oplus \end{matrix}$$

- $R > R^* = 2\sqrt{L/C} \Rightarrow \lambda_{1,2} \in \mathbb{R}$ e $\mathrm{Re}(\lambda_{1,2}) < 0$ per l'asintotica stabilità

Nodo stabile

$$Aw = \lambda w \qquad \begin{vmatrix} -R/L & 1/L \\ -1/C & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} w_1 \\ w_2 \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} w_1 \\ w_2 \end{vmatrix}$$

$\Rightarrow -\frac{1}{C} w_1 = \lambda w_2 \rightarrow w_1 = -C\lambda w_2 \rightsquigarrow$ pendenza $= -\frac{1}{C\lambda}$

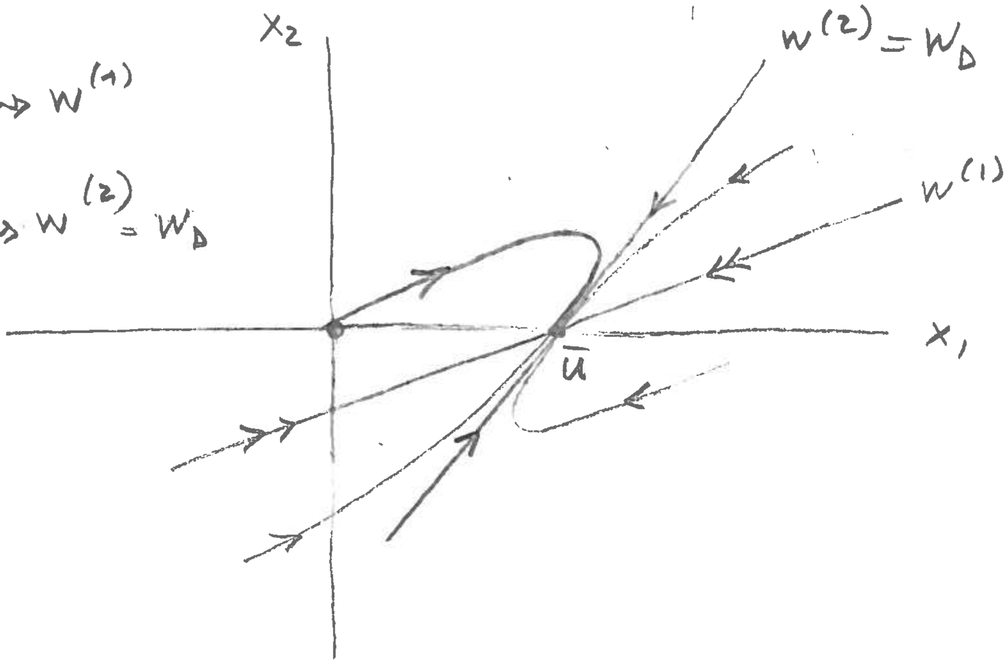
Poiché $\lambda < 0 \Rightarrow w_1$ e w_2 hanno lo stesso segno, cioè gli autovettori hanno pendenza positiva

$$\lambda_1 = \frac{-R/L - \sqrt{\ }}{2} \rightsquigarrow w^{(1)}$$

$$\lambda_2 = \frac{-R/L + \sqrt{\ }}{2} \rightsquigarrow w^{(2)} = w_D$$

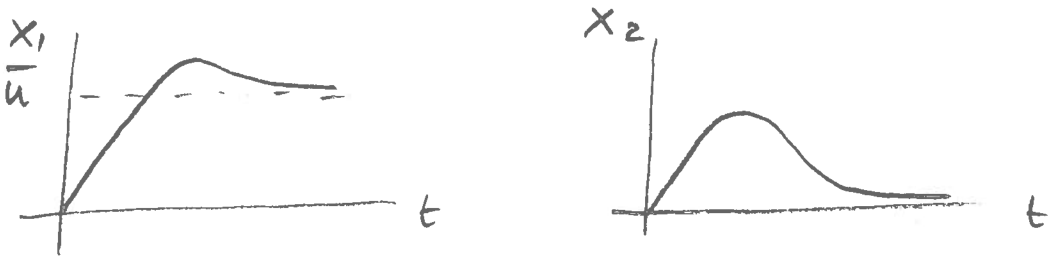
$$\Downarrow$$

$$\lambda_D$$



$$\text{pendenza } w^{(1)} = \frac{2}{c\left(\frac{R}{L} + \sqrt{\ }\right)} < \frac{2}{c\left(\frac{R}{L} - \sqrt{\ }\right)} = \text{pendenza } w^{(2)} = w_D$$

Partendo da $x(0) = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix}$ si ha



! sovraelongazione in $x_1(t)$

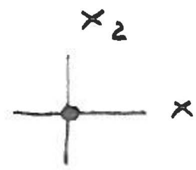
Dato il sistema $\dot{x} = Ax$ con $A = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ p & -2 \end{vmatrix}$ ($p \in \Re$), discutere, al variare di p

a) Equilibrio (esistenza e unicità).
b) Stabilità.
c) Tempo per andare a regime.
d) Quadro delle traiettorie.
e) Esistenza di infinite oscillazioni.

f) Condizioni su p affinché non esistano sovraelongazioni per x_1 e x_2 con condizione iniziale $x(0) = \begin{vmatrix} -2 \\ 3 \end{vmatrix}$

---

a) $\det(A) = -p$

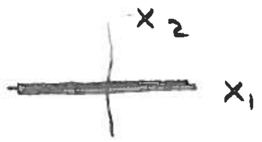


- $\det(A) \neq 0 \rightarrow p \neq 0 \rightarrow \exists!\ \bar{x} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix}$
- $\det(A) = 0 \rightarrow p = 0$ si ha

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -2x_2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \bar{x}_2 = 0 \\ -2\bar{x}_2 = 0 \end{cases} \rightarrow \bar{x} = \begin{vmatrix} \bar{x}_1 \\ 0 \end{vmatrix}$$

qualsiasi

$\Rightarrow \exists \infty$ equilibri



b) $\mathrm{tr}(A) = -2 < 0 \quad \forall p$
$\det(A) = -p$

- $p < 0 \rightarrow \det(A) > 0 \rightarrow$ Asint. stab.
- $p > 0 \rightarrow \det(A) < 0 \rightarrow$ Instab
  $\hookrightarrow \lambda_1 \lambda_2 < 0 \Rightarrow$

cioè $\exists \lambda$ con $\mathrm{Re} >$

- $p = 0 \rightarrow \det(A) = 0$

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = -2 \\ \lambda_1 \cdot \lambda_2 = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = -2 \end{cases} \rightarrow \text{Semplice stabilità}$$

c) T_R è definito solo per $p<0$ (asint. stabilità)

$$\Delta_A(\lambda) = \lambda^2 - tr(A)\lambda + det(A) = \lambda^2 + 2\lambda - p = 0$$

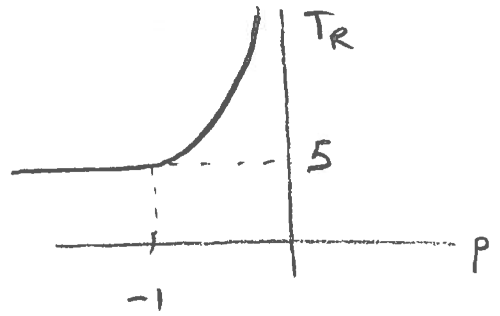
$$\lambda_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1+p}$$

- $p < -1 \rightarrow \lambda_{1,2} \in \mathbb{C}$

  $\mathbb{R}e(\lambda_{1,2}) = -1 \quad T_D = 1 \quad T_R = 5$

- $-1 \leq p < 0 \rightarrow \lambda_{1,2} \in \mathbb{R} \qquad \lambda_D = -1 + \sqrt{1+p}$

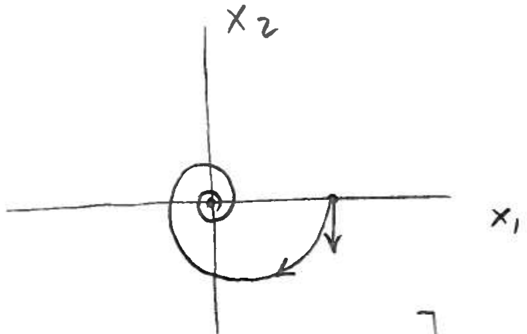
  $T_D = \dfrac{1}{1-\sqrt{1+p}}$ e $T_R = \dfrac{5}{1-\sqrt{1+p}}$



$\min\limits_{p} T_R = 5$

d) $\boxed{p < -1}$ (As. stabile)

$\lambda_{1,2} = -1 \pm i\sqrt{-1-p} \quad \in \mathbb{C}$ e $\mathbb{R}e(\lambda_i) < 0 \Rightarrow$ Fuoco stabile in $\begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix}$



$$\left[\begin{array}{l} x(0) = \begin{vmatrix} x_1^0 \\ 0 \end{vmatrix} \rightarrow \dot{x}(0) = \begin{vmatrix} 0 \\ p\, x_1^0 \end{vmatrix} \\ \text{e se } x_1^0 > 0 \Rightarrow \dot{x}_2(0) < 0 \end{array}\right]$$

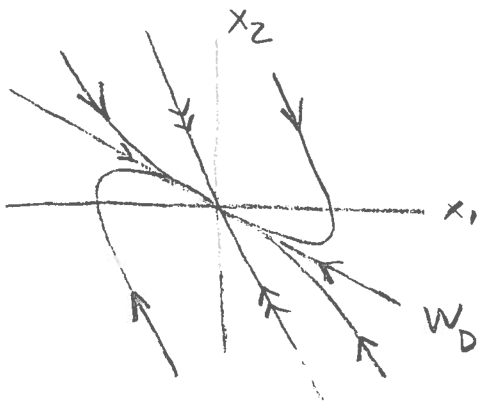
$\boxed{-1 < p < 0}$ (As. stabile)

$$\lambda_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1+p} \in \mathbb{R}e^- \Rightarrow \text{Nodo stabile in} \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

Autovettori w / $Aw = \lambda w$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ p & -2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} w_1 \\ w_2 \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} w_1 \\ w_2 \end{vmatrix} \rightsquigarrow w_2 = \overset{\lambda_1 \text{ o } \lambda_2}{\lambda} w_1 \rightsquigarrow w_2 = \left(-1 \pm \sqrt{1+p}\right) w_1$$

I 2 autovettori hanno pendenze negative (meno negativa quello associato all'autovalore dominante $\lambda_D = -1 + \sqrt{1+p}$)



$\boxed{p > 0}$ (instabile)

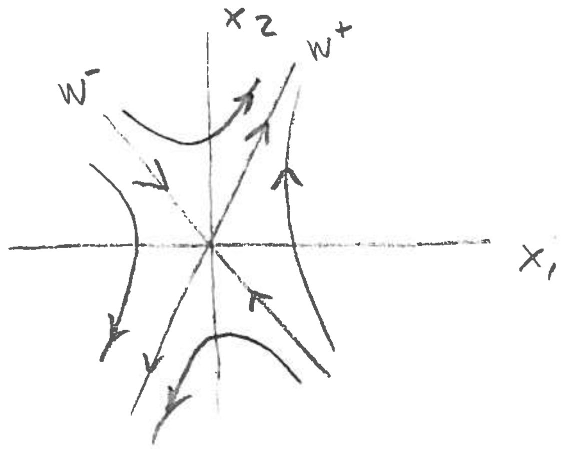
$$\lambda^+ = -1 + \sqrt{1+p} > 0 \qquad \lambda^- = -1 - \sqrt{1-p} < 0 \Rightarrow \text{Sella in} \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

$w_2 = \lambda w_1$

λ^+ o λ^-

pendenza positiva

pendenza negativa



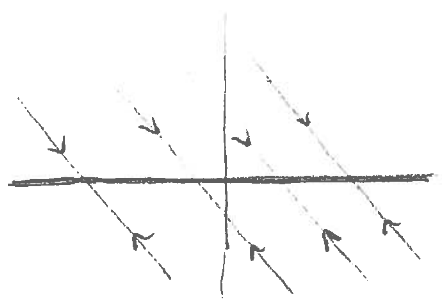
$\boxed{p = 0}$ (Semplice stabilità)

$\exists\, \infty$ equilibri $\begin{vmatrix} \bar{x}_1 \\ 0 \end{vmatrix}$

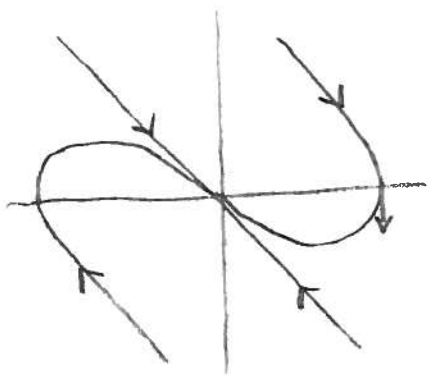
$$\overset{\circ}{x}_1 = x_2 \qquad \frac{dx_2}{dx_1} = -2$$
$$\overset{\circ}{x}_2 = -2x_2$$

$$\int_{x_2(0)}^{x_2} dx_2 = \int_{x_1(0)}^{x_1} -2\,dx_1 \rightarrow x_2 = x_2(0) - 2(x_1 - x_1(0))$$

le traiettorie sono rette
con pendenza -2
percorse verso uno degli ∞ equilibri



$\boxed{p=-1}$ $\lambda_1 = \lambda_2 = -1 \rightarrow$ 2 autovettori coincidenti in $w_2 = -w_1$



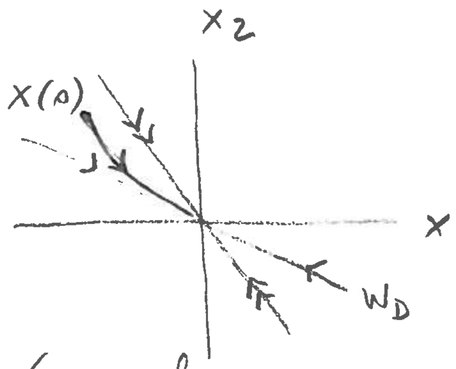
$$\left(x(0) = \begin{vmatrix} x_1^{\circ} \\ 0 \end{vmatrix} \rightarrow \overset{\circ}{x}(0) = \begin{vmatrix} 0 \\ -x_1^{\circ} \end{vmatrix} \right.$$
$$\left. x_1^{\circ} > 0 \Rightarrow \overset{\circ}{x}_2(0) < 0 \right)$$

e) $\exists$ oo oscillazioni $\Rightarrow \exists \lambda \in \mathbb{C} \Rightarrow p < -1$

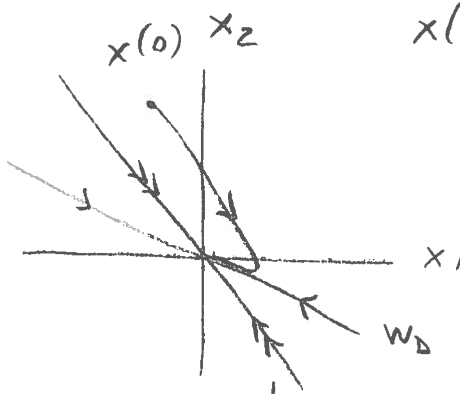
f) Devo trovarmi nell'ipotesi

$$\left.\begin{array}{l} \text{asint. stabilità} \\ \lambda \in \mathbb{R} \end{array}\right\} \Rightarrow -1 \leq p < 0$$

e determinare p in tale intervallo in modo tale che si verifichi solo il caso di sinistra



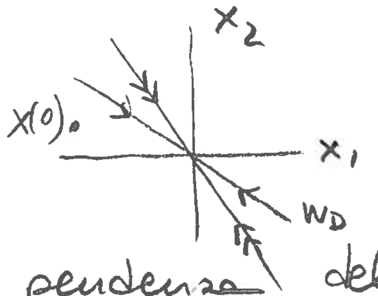
$\nexists$ sovraelongazione



$x(0) = \begin{vmatrix} -2 \\ 3 \end{vmatrix}$

$\exists$ sovraelongazione sia in x_1 che in x_2

NOTA: il caso



non è realizzabile perché la pendenza dell'autovettore dominante w_D è $-1+\sqrt{1+p} \geq -1 \rightsquigarrow$ mentre $\dfrac{x_2(0)}{x_1(0)} = -\frac{3}{2}$

Pertanto deve essere (caso di sinistra)

$$\begin{cases} -1-\sqrt{1+p} \leq -\frac{3}{2} \\ \quad \hookrightarrow \text{pendenza dell'autovettore non dominante} \\ -1 \leq p < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\sqrt{1+p} \leq -\frac{1}{2} \\ -1 \leq p < 0 \end{cases} \qquad \sqrt{1+p} \geq \frac{1}{2} \qquad 1+p \geq \frac{1}{4} \qquad p \geq -\frac{3}{4}$$

da cui $\quad -\frac{3}{4} \leq p < 0.$