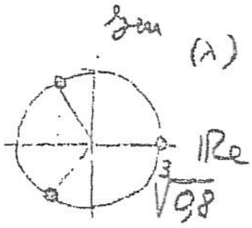
Il ciclo di vita delle meduse può essere suddiviso in tre fasi: fase larvoidale, fase polipoidale e fase medusoidale. La riproduzione è possibile solo nella fase medusoidale; tuttavia, per deporre le uova, le meduse sono costrette a lacerare esombrella ed ectoderma, causando così la morte dell'individuo (le meduse sono animali sempelpari).
La probabilità di sopravvivenza alla predazione allo stato larvoidale è del 10% mentre allo stato polipoidale è dell'8%
stima inoltre che nell'atto riproduttivo la medusa rilasci circa 1000 uova di cui ne vengono fecondate il 10% (sopravvivenza delle uova alla predazione).
Si proponga un modello dinamico per studiare il ciclo di vita delle meduse e si dica se, con i dati forniti, la popolazione di meduse è destinata all'estinzione o all'invasione.
Nel caso di estinzione, si valuti il livello di sopravvivenza delle uova alla predazione che porta all'invasione della specie.

$x_1(t) = \#$ meduse in fase larvoidale
$x_2(t) = \#$ meduse in fase polipoidale
$x_3(t) = \#$ meduse in fase medusoidale

$$x_1(t+1) = 0{,}1 \cdot 1000\, x_3(t) \qquad A = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 100 \\ 0{,}1 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}08 & 0 \end{vmatrix}$$
$$x_2(t+1) = 0{,}1\, x_1(t)$$
$$x_3(t+1) = 0{,}08\, x_2(t)$$
$\hookrightarrow$ solo movimento libero poiché $\nexists\, u(t)$

$$\det(\lambda I - A) = \det \begin{vmatrix} \lambda & 0 & -100 \\ -0{,}1 & \lambda & 0 \\ 0 & -0{,}08 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^3 - 0{,}8 = 0$$



$$\{\lambda\}_A = \left\{ \sqrt[3]{0{,}8}\ ;\ \sqrt[3]{0{,}8}\left[-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right];\ \sqrt[3]{0{,}8}\left[-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right] \right\}$$

$$|\lambda_i| = \sqrt[3]{0{,}8} < 1 \quad \forall i \implies \text{As. stabilità} \implies x(t) \to 0 \quad \forall x(0)$$

cioè la specie è destinata all'estinzione

$p =$ sopravvivenza delle uova alla predazione

$$\implies A = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1000p \\ 0{,}1 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}08 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\det(\lambda I - A) = 0 \to \lambda^3 = 8p \to |\lambda| = \sqrt[3]{8p}$$

Invasione $\implies$ instabilità $\implies |\lambda| > 1 \implies 8p > 1 \implies p > \frac{1}{8}$.
$\Updownarrow$
$(x(0) \neq 0$ piccolo $\implies x(t) \to \infty)$

1) Una società di noleggio auto affitta vetture alle aziende con le formule del Noleggio di durata Mensile (NM) o Bimestrale (NB). All'inizio di ciascun mese t vengono date in affitto $u(t)$ vetture, di cui 2/3 con la formula NM e 1/3 con la formula NB. L'importo dell'affitto è riscosso posticipatamente: α euro al termine del noleggio NM, e β euro al termine di ciascun mese del noleggio NB.

a) Si descriva l'evoluzione nel tempo delle auto affittate mediante un sistema dinamico a tempo discreto, definendo come variabile di uscita $y(t)$ l'affitto complessivo riscosso all'istante t.
b) Studiare la stabilità del sistema, discutendo anche il tempo di risposta e l'eventuale presenza di oscillazioni nel movimento libero.

Soluzione [se necessario proseguire sul retro]:

a) $x_1(t)$ = n. auto in NM da 1 mese
$x_2(t)$ = " " NB da 1 mese
$x_3(t)$ = " " NB da 2 mesi

$$\begin{cases} x_1(t+1) = \frac{2}{3}u(t) \\ x_2(t+1) = \frac{1}{3}u(t) \\ x_3(t+1) = x_2(t) \end{cases} \qquad A = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \quad b = \begin{vmatrix} 2/3 \\ 1/3 \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$C = \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \beta \end{vmatrix}$$

$$y(t) = \alpha x_1(t) + \beta x_2(t) + \beta x_3(t)$$

b) $\lambda_i = 0 \; , \; i = 1, 2, 3$
$|\lambda_i| < 1 \;\; \forall i \Rightarrow$ A asintoticamente stabile
sistema a memoria finita (FIR) : $T_R \leq n = 3$
non vi sono aut. complessi o reali negativi
$\Rightarrow$ no oscillazioni

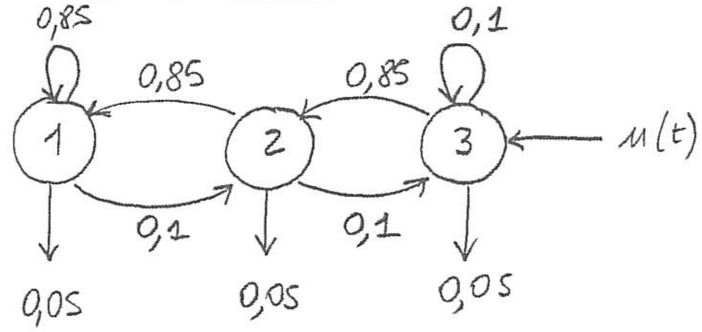
1) Gli abbonati a un servizio di "car sharing" sono suddivisi in tre categorie a cui corrispondono diverse tariffe di abbonamento, crescenti dalla cat. 1 alla cat. 3. Il gestore vuole incentivare l'uso moderato dei veicoli, per cui a fine anno promuove alla categoria inferiore (da 3 a 2, o da 2 a 1) l'utente che nell'anno non abbia superato una certa soglia di utilizzo, mentre declassa alla categoria superiore (da 1 a 2, o da 2 a 3) l'utente sopra soglia. Tutti i nuovi abbonati sono comunque inseriti in cat. 3.

In base alle statistiche di utilizzo degli ultimi anni, è noto che il 10% degli utenti di ogni categoria ha un utilizzo sopra soglia. Inoltre, un ulteriore 5% non rinnova l'abbonamento a fine anno e lascia il servizio.

a) Descrivere il fenomeno in esame mediante un sistema dinamico, nel quale l'ingresso rappresenti il numero di nuovi abbonati e l'uscita il numero di abbonati di cat. 1.
b) Studiare la stabilità del sistema, discutendo anche il tempo di risposta.
c) Determinare lo stato di equilibrio corrispondente a 1000 nuovi abbonati all'anno.

Soluzione [se necessario proseguire <u>sul retro</u>]:

a)



$x_i(t)$ = # abbonati in categoria i ($i = 1,2,3$) nell'anno t

$$x_1(t+1) = 0{,}85\, x_1(t) + 0{,}85\, x_2(t)$$
$$x_2(t+1) = 0{,}1\, x_1(t) + 0{,}85\, x_3(t)$$
$$x_3(t+1) = 0{,}1\, x_2(t) + 0{,}1\, x_3(t) + u(t)$$
$$y(t) = x_1(t)$$

b) $A = \begin{vmatrix} 0{,}85 & 0{,}85 & 0 \\ 0{,}1 & 0 & 0{,}85 \\ 0 & 0{,}1 & 0{,}1 \end{vmatrix}$ Il sistema è positivo

Tutte le colonne sommano a $0{,}95 \Rightarrow \lambda_D = 0{,}95$ e il sistema è A. S.

$$T_R = -\frac{5}{\ln(0,95)} \simeq 95,5 \text{ anni}$$

c) $x_1 = 0,85\, x_1 + 0,85\, x_2 \rightarrow x_1 = 5,67\, x_2$

$x_2 = 0,1\, x_1 + 0,85\, x_3 \longrightarrow x_2 = 0,567\, x_2 + 0,85\, x_3 \rightarrow x_2 = 1,96\, x_3$

$x_3 = 0,1\, x_2 + 0,1\, x_3 + u \rightarrow x_3 = 0,196\, x_3 + 0,1\, x_3 + u$

$\hookrightarrow x_3 = 1,42\, u$

$\bar{u} = 1000$

$$\bar{X} = \begin{vmatrix} 15\,781 \\ 2783 \\ 1420 \end{vmatrix}$$

Sul pianeta Terno ogni individuo muore subito dopo avere compiuto tre anni di vita. Nel primo anno di vita ogni individuo lavora e versa un contributo di α euro alla cassa previdenziale; inoltre genera (mediamente) 0.5 figli subito dopo aver compiuto un anno. Nel secondo anno di vita ciascun individuo lavora e versa un contributo di 2α euro alla cassa previdenziale. Infine, nel terzo anno di vita, ogni individuo gode di una pensione di β euro. Ogni anno, inoltre, immigrano su Terno 200 neonati, che vengono quindi messi subito al lavoro.

a) Descrivere con un modello matematico l'evoluzione della popolazione, indicando con $x_1(t)$, $x_2(t)$ e $x_3(t)$ il numero di individui che, all'inizio dell'anno t, compiono 1, 2 e 3 anni.

b) Determinare l'equilibrio del sistema dinamico ottenuto al punto a) e studiarne la stabilità.

c) Sia $x_4(t)$ il livello della cassa previdenziale all'inizio dell'anno t. Scrivere l'equazione che regola la dinamica di $x_4(t)$ (cioè $x_4(t+1) = \ldots$) ipotizzando che il tasso di interesse sia pari al 10%.

d) Determinare il valore di equilibrio di $x_4(t)$.

a) $x_1(t+1) = 0{,}5\, x_1(t) + \bar{u}$ $\quad (\bar{u} = 200)$

$x_2(t+1) = x_1(t)$

$x_3(t+1) = x_2(t)$

$$A = \begin{vmatrix} 0{,}5 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} = b$$

b) $\bar{x}_1 = 0{,}5\,\bar{x}_1 + \bar{u} \rightarrow \bar{x}_1 = \frac{u}{0{,}5} = 400$

$\bar{x}_2 = \bar{x}_1 \rightarrow \bar{x}_2 = 400$

$\bar{x}_3 = \bar{x}_2 \rightarrow \bar{x}_3 = 400$

$$\bar{x} = \begin{vmatrix} 400 \\ 400 \\ 400 \end{vmatrix}$$

$\{\lambda\}_A = \{0{,}5; 0; 0\}$ $\quad \forall i\, |\lambda_i| < 1 \Rightarrow$ As. stabilità

$\lambda_D = 0{,}5 \Rightarrow T_D = -\frac{1}{\ln 0{,}5}$ e $T_R = 5 T_D \simeq 7{,}21$

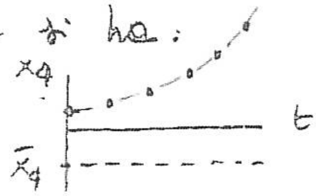
c) $x_4(t+1) = 1{,}1\, x_4(t) + \alpha x_1(t+1) + 2\alpha x_2(t+1) - \beta x_3(t+1)$ $\quad (*)$

$\Rightarrow x_4(t+1) = 1{,}1\, x_4(t) + 2{,}5\alpha\, x_1(t) - \beta x_2(t) + \alpha u(t)$

d) $(*) \rightarrow \bar{x}_4 = 1{,}1\, \bar{x}_4 + \alpha \bar{x}_1 + 2\alpha \bar{x}_2 - \beta \bar{x}_3 \rightarrow \bar{x}_4 = 4000(\beta - 3\alpha)$

NOTA: Per $n = 4$ il sistema è instabile ($\exists\, \lambda = 1{,}1$). In particolare, se x_1, x_2 e x_3 sono all'equilibrio, la cassa x_4 è instabile e si ha:

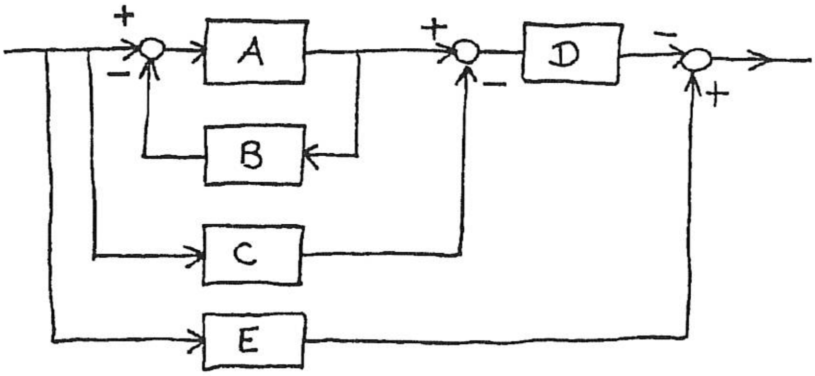
- $\beta < 3\alpha \rightarrow \bar{x}_4 < 0$



- $\beta > 3\alpha \rightarrow \bar{x}_4 > 0$

Pensioni troppo alte $\Rightarrow$ la cassa può fallire

Si consideri il sistema *__a tempo continuo__* rappresentato in figura.



I blocchi A e B sono descritti dalle funzioni di trasferimento $G_A(s)=\dfrac{10}{s-1}$, $G_B(s)=\dfrac{s}{s-2}$, il blocco C è descritto dal modello ingresso/uscita $\ddot{y}_C+\dot{y}_C+4y_C=-4\dot{u}_C+2u_C$, il blocco E è descritto dal modello di stato

$$A=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0 & 0\\ 2 & -2 & -1 & -2\\ 3 & 0 & -1 & 1\\ 4 & 0 & 0 & -2\end{bmatrix}\qquad b=\begin{bmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{bmatrix}$$

$$c=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

a) Proporre arbitrariamente un blocco D di ordine 2 tale che il sistema aggregato sia asintoticamente stabile.
b) Utilizzando il blocco D proposto, determinare il tempo di risposta del sistema aggregato, discutendo anche l'eventuale presenza di oscillazioni nelle risposte ad ingresso costante.
c) Utilizzando il blocco D proposto, discutere la stabilità del sistema aggregato nel caso il modello ingresso/uscita del blocco C venga sostituito dal seguente:

$$\dddot{y}_C+\ddot{y}_C+\dot{y}_C+4y_C=-4\dot{u}_C+2u_C$$

NOTA : $\{\text{poli}\}\equiv\{\lambda\}$ qui

a)

F = retroazione A–B

F, C, E, D sono aggregati con connessioni cascata/parallelo

$\Longrightarrow$ il sistema è asint. stabile $\Longleftrightarrow$ F, C, D ed E sono asintoticamente stabili

(F) $\quad G_F=\dfrac{G_A}{1+G_AG_B}=\dfrac{\frac{10}{s-1}}{1+\frac{10}{s-1}\,\frac{s}{s-2}}=\dfrac{10(s-2)}{s^2+7s+2}$

poli in $\dfrac{-7\pm\sqrt{49-8}}{2}=\begin{cases}\dfrac{-7+\sqrt{41}}{2} & \ominus\\[2mm] \dfrac{-7-\sqrt{41}}{2} & \ominus\end{cases}$ $\quad$ F Asint. stab.

Ⓒ $\Delta_C(s) = s^2 + s + 4$

poli in $\dfrac{-1 \pm \sqrt{1-16}}{2} = \begin{cases} \dfrac{-1+i\sqrt{15}}{2} & \mathrm{Re}(-) \\ \dfrac{-1-i\sqrt{15}}{2} & \mathrm{Re}(-) \end{cases}$ C Asint. stab.

Ⓔ $\{\lambda\}_E = \{-1, -2, -1, -2\}$ E Asint. stabile

$\swarrow$

partizionata a blocchi

Quindi il sistema è asint. stab. $\Leftrightarrow$ D è asint. stabile

Per esempio $G_D = \dfrac{1}{(s+1)^2}$ ha poli in -1 e -1 ed è

asint. stabile.

b) $\{\lambda\}_\Sigma = \sigma(\Sigma) = \sigma(F) \cup \sigma(C) \cup \sigma(D) \cup \sigma(E)$

$\downarrow$

sistema aggregato

$\sigma(F) = \Big\{ \underbrace{\dfrac{-7+\sqrt{41}}{2}, \dfrac{-7-\sqrt{41}}{2}}_{F}, \underbrace{\dfrac{-1+i\sqrt{15}}{2}, \dfrac{-1-i\sqrt{15}}{2}}_{C}, \underbrace{-1, -1}_{D}, \underbrace{-1, -1, -2, -2}_{E} \Big\}$

$\lambda_D = \dfrac{-7+\sqrt{41}}{2} \longrightarrow T_D = -\dfrac{1}{\mathrm{Re}(\lambda_D)}$ e $T_R = 5T_D \simeq 16,7$

Poiché $\exists\, \lambda \in \mathbb{C} \Rightarrow \exists\, \infty$ oscillazioni

c) $\Delta_C(s) = s^3 + s^2 + s + 4$ $\quad \alpha_1 = 1 \quad \alpha_2 = 1 \quad \alpha_3 = 4$

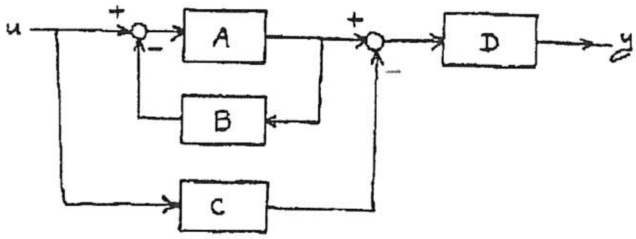
Hurwitz $\quad H = \begin{vmatrix} \alpha_1 & 1 & 0 \\ \alpha_3 & \alpha_2 & \alpha_1 \\ 0 & 0 & \alpha_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}$

$D_1 = 2 > 0$

$D_2 = -3 < 0 \rightarrow$ C non As. stab $\Rightarrow \Sigma$ non è As. stab

(Hurwitz $n=3$: As. stab. $\Leftrightarrow \alpha_i > 0 \ \forall i$ e $\alpha_1 \alpha_2 > \alpha_3$)

Si consideri il sistema a tempo continuo rappresentato in figura.



Il blocco A ha funzione di trasferimento $G_A(s) = \frac{1}{s-1}$, il blocco D è descritto dal modello I/O $\dot{y}_D + 2y_D = -\dot{u}_D$, il blocco C dal modello di stato seguente:

$$A_C = \left|\begin{array}{c|cc} -1 & 2 & 3 \\ \hline 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{array}\right| \qquad b_C = \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix} \qquad c_C = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

A_{11} A_{22}

a) Proporre, per il blocco B, una qualunque funzione di trasferimento di ordine 1 che renda il sistema aggregato asintoticamente stabile (spiegando con cura perché l'aggregato risulta asintoticamente stabile).
c) Con il blocco B prima proposto, determinare TUTTE le costanti di tempo del sistema aggregato e quindi il suo tempo di risposta.

a) R = retroazione A - B
R, C e D sono connessi in cascata/parallelo.
Pertanto Σ è asint. stabile $\Leftrightarrow$ R, C e D sono asint. stab.

C $\quad \det(\lambda I - A_{22}) = \det\begin{vmatrix} \lambda+1 & -1 \\ 1 & \lambda+1 \end{vmatrix} = (\lambda+1)^2 + 1 = \lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0$

$\lambda = -1 \pm \sqrt{1-2} = -1 \pm i$

$\{\lambda\}_{A_C} = \{\lambda\}_{A_{11}} \cup \{\lambda\}_{A_{22}} = \{-1, -1+i, -1-i\} \Rightarrow$ C è asintot. stabile

D $\quad \Delta_D(s) = s+2$ polo in $-2 \Rightarrow$ D è asint. stab.

$B(s) = \frac{\alpha}{\beta + s}$ con α e β / R sia asint. stab.

$$G_R(s) = \frac{G_A(s)}{1 + G_A(s)G_B(s)} = \frac{\frac{1}{s-1}}{1 + \frac{1}{s-1}\,\frac{\alpha}{s+\beta}} = \frac{s+\beta}{s^2 + (\beta-1)s + (\alpha-\beta)}$$

$\Rightarrow$ deve essere $\beta - 1 > 0 \quad \Rightarrow \quad \beta > 1$
$\alpha - \beta > 0 \quad\quad \alpha > \beta$

Ad esempio $\begin{array}{l}\alpha = 9 \\ \beta = 5\end{array} \quad \rightarrow G_R(s) = \dfrac{s+5}{s^2+4s+4} = \dfrac{s+5}{(s+2)^2}$

che ha poli in $-2, -2$.

b) $\sigma(\Sigma) = \sigma(R) \cup \sigma(C) \cup \sigma(D)$

$$\sigma(\Sigma) = \{\underbrace{-2, -2}_{R}, \underbrace{-1, -1+i, -1-i}_{C}, \underset{\downarrow}{-2}\}$$

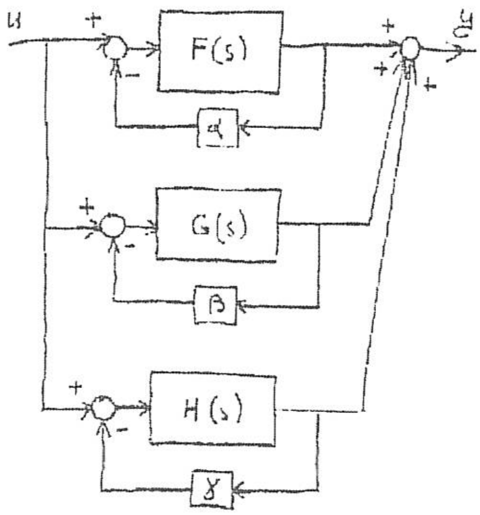
$$T = \{\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, 1, 1, 1, \tfrac{1}{2}\}$$

$T_D = 1$ e $T_R = 5T_D = 5$

Si consideri il sistema a tempo continuo rappresentato in figura, in cui

$$F(s)=\frac{1}{s-1}$$
$$G(s)=\frac{1}{s^2+2s-2}$$
$$H(s)=\frac{1}{s^3+2s^2+2s-1}$$

mentre α, β, γ sono coefficienti reali.



a) Determinare, motivando adeguatamente la risposta, per quali valori della terna (α, β, γ) il sistema in figura è asintoticamente stabile.

b) Determinare la funzione di trasferimento complessiva del sistema, esprimendola in funzione di F, G, H, α, β, γ.

a) R_F = retroazione $F-\alpha$

R_G = " $G-\beta$

R_H = " $H-\gamma$

R_F, R_G e R_H sono connessi in parallelo

Pertanto Σ è asint. stab. $\Leftrightarrow$ lo sono R_F, R_G e R_H

$$R_F=\frac{F}{1+\alpha F}=\frac{\frac{1}{s-1}}{1+\frac{\alpha}{s-1}}=\frac{1}{s-1+\alpha} \quad \text{as. stab} \Leftrightarrow \alpha>1$$

$$R_G=\frac{G}{1+\beta G}=\frac{1}{s^2+2s-2+\beta} \quad \text{as. stab} \Leftrightarrow \beta>2$$

$$R_H=\frac{H}{1+\gamma H}=\frac{1}{s^3+2s^2+2s-1+\gamma} \quad \text{as stab.} \underset{\text{HURWITZ}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} -1+\gamma>0 \\ 4>-1+\gamma \end{cases}$$

cioè $1<\gamma<5$

Pertanto Σ è as. stab $\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha>1 \\ \beta>2 \\ 1<\gamma<5 \end{cases}$

b) $R_{TOT}=R_F+R_G+R_H=\dfrac{F}{1+\alpha F}+\dfrac{G}{1+\beta G}+\dfrac{H}{1+\gamma H}$