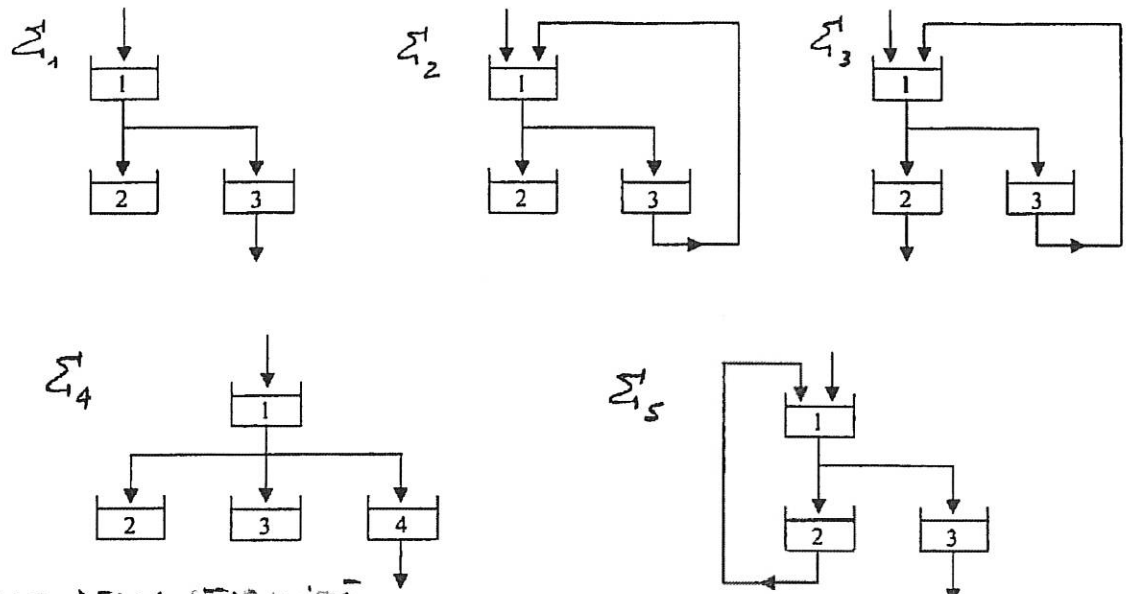
Si studi la stabilità dei seguenti sistemi idrici specificandone, dove esiste, il tempo di risposta. (Per semplicità, si supponga che la costante si deflusso di ciascun serbatoio sia pari a 1 e che, ad ogni suddivisione, la portata venga equi-ripartita tra i rami).



STUDIO DELLA STABILITÀ

x_i = volume di invaso del serbatoio i-esimo

$\boxed{\Sigma_1}$

$$\dot{x}_1 = u - x_1 \qquad \dot{x}_2 = \frac{1}{2}x_1 \qquad \dot{x}_3 = \frac{1}{2}x_1 - x_3$$

$$A = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & -1 \end{vmatrix} \rightsquigarrow \text{triangolare}$$

$$\{\lambda\}_A = \{-1, 0, -1\}$$

- $\mathrm{Re}(\lambda) \leq 0$
- $\lambda = 0$ è radice semplice di $\Delta_A(\lambda) \Rightarrow$ è radice semplice di $\psi_A(\lambda)$

$\Rightarrow$ semplice stabilità

$\boxed{\Sigma_2}$

$$\dot{x}_1 = u - x_1 + x_3 \qquad \dot{x}_2 = \frac{1}{2}x_1 \qquad \dot{x}_3 = \frac{1}{2}x_1 - x_3$$

$$A = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\det(\lambda I - A) = \det\begin{vmatrix} \lambda+1 & 0 & -1 \\ -1/2 & \lambda & 0 \\ -1/2 & 0 & \lambda+1 \end{vmatrix} = \Delta_A(\lambda)$$

$$\Delta_A(\lambda) = \lambda(\lambda+1)^2 - \frac{1}{2}\lambda = \lambda\left(\lambda^2 + 2\lambda + \frac{1}{2}\right) = 0 \quad \begin{cases} \lambda = 0 \\ \lambda = -1 \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

$$\{\lambda\}_A = \left\{ \underset{\ominus}{\frac{-\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}},\ \underset{\ominus}{\frac{-\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}}},\ 0 \right\}$$

- $\mathrm{Re}(\lambda) \leq 0$
- $\lambda = 0$ è radice semplice di $\Delta_A(\lambda) \Rightarrow$ è " " di $\Psi_A(\lambda)$

$\Rightarrow$ semplice stabilità

$\boxed{\Sigma_3}$

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= u - x_1 + x_3 \\ \dot{x}_2 &= \frac{1}{2}x_1 - x_2 \\ \dot{x}_3 &= \frac{1}{2}x_1 - x_3 \end{aligned} \qquad A = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1/2 & -1 & 0 \\ 1/2 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\det(\lambda I - A) = \det\begin{vmatrix} \lambda+1 & 0 & -1 \\ -1/2 & \lambda+1 & 0 \\ -1/2 & 0 & \lambda+1 \end{vmatrix} = \Delta_A(\lambda)$$

$$\Delta_A(\lambda) = (\lambda+1)^3 - \frac{1}{2}(\lambda+1) = (\lambda+1)\left(\lambda^2 + 2\lambda + 1/2\right) = 0 \quad \begin{cases} \lambda = -1 \\ \lambda = -1 \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

$$\{\lambda\}_A = \left\{ -1,\ \frac{-\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}},\ \frac{-\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}} \right\}$$

$\mathrm{Re}(\lambda) < 0 \Rightarrow$ asintotica stabilità

$\boxed{\Sigma_4}$

$$\dot{x}_1 = u - x_1 \qquad A = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\dot{x}_2 = \frac{1}{3} x_1$$

$$\dot{x}_3 = \frac{1}{3} x_1$$

$$\dot{x}_4 = \frac{1}{3} x_1 - x_4$$

$\{\lambda\}_A = \{-1, 0, 0, -1\}$ $\rightsquigarrow$ $\lambda = 0$ è radice doppia di $\Delta_A(\lambda)$

∘ $\mathrm{Re}(\lambda) \leq 0$ $\rightarrow$ devo verificare se $\lambda = 0$ è radice semplice o multipla di $\Psi_A(\lambda)$ per capire la stabilità.

$$\theta(\lambda) = (\lambda+1)^2 \lambda$$

$$\Rightarrow \theta(A) = (A+I)^2 A = \overbrace{\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 1 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & 1 & 0 \\ 1/3 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}}^{A+I} \overbrace{\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & 1 & 0 \\ 1/3 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}}^{A+I} \overbrace{\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}}^{A} =$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$\Rightarrow \Psi_A(\lambda) = (\lambda+1)^2 \lambda$

↳ $\lambda = 0$ è radice semplice $\Rightarrow$ semplice stabilità

<u>NOTA</u>: Tutte le reti idriche mostrate nel testo, se non alimentate, hanno volumi di invaso che possono o tendere a 0 oppure rimanere su un valore limitato $\Rightarrow$ le reti possono solo essere o asintot. stabili o semplic stabili (mai instabili (fortemente) o debolmente instabili)

In Σ_4 pertanto, era già noto che $\lambda = 0$ fosse radice semplice di $\Psi_A(\lambda)$

$\boxed{\Sigma_5}$

$$\dot{x}_1 = u + x_2 - x_1$$
$$\dot{x}_2 = \frac{1}{2}x_1 - x_2$$
$$\dot{x}_3 = \frac{1}{2}x_1 - x_3$$

$$A = \left|\begin{array}{cc:c} -1 & 1 & 0 \\ 1/2 & -1 & 0 \\ \hdashline 1/2 & 0 & -1 \end{array}\right|$$

A_{11}, A_{22}

A è triangolare a blocchi

$$\{\lambda\}_A = \{\lambda\}_{A_{11}} \cup \underbrace{\{\lambda\}_{A_{22}}}_{\to -1}$$

$$\Delta_{A_{11}}(\lambda) = \det(\lambda I - A_{11}) = \det\begin{vmatrix} \lambda+1 & -1 \\ -1/2 & \lambda+1 \end{vmatrix} = (\lambda+1)^2 - 1/2 =$$

$$= \lambda^2 + 2\lambda + 1/2 = 0 \to \lambda = -1 \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\{\lambda\}_A = \left\{\frac{-\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}, \frac{-\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}}, -1\right\} \quad (*)$$

$\mathrm{Re}(\lambda) < 0 \Rightarrow$ asintotica stabilità

(*) sono gli stessi autovalori di Σ_3
I due sistemi sono infatti equivalenti pur di scambiare tra loro i terbati 2 e 3

TEMPI DI RISPOSTA (solo per i sistemi asintot. stabili)

$\Sigma_3 = \Sigma_5$

$$\{\lambda\}_A = \left\{\frac{-\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}, \underbrace{\frac{-\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}}}_{\lambda_D}, -1\right\}$$

$$T_D = -\frac{1}{\mathrm{Re}(\lambda_D)} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1} \qquad T_R = 5T_D = \frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}$$

OSSERVAZIONE

Supponendo che in Σ_S il coefficiente di ripartizione delle portate non sia $\frac{1}{2}$ ma α (ramo destro), si avrebbe

$$\dot{x}_1 = u + x_2 - x_1$$
$$\dot{x}_2 = (1-\alpha)x_1 - x_2$$
$$\dot{x}_3 = \alpha x_1 - x_3$$

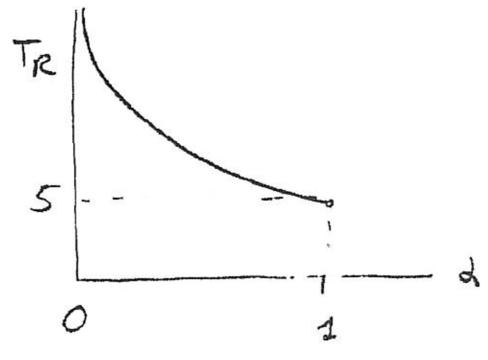
$$A = \left|\begin{array}{cc:c} -1 & 1 & 0 \\ 1-\alpha & -1 & 0 \\ \hdashline \alpha & 0 & -1 \end{array}\right| \qquad A_{11},\ A_{22}$$

$$\det(\lambda I - A_{11}) = \det\begin{vmatrix} \lambda+1 & -1 \\ \alpha-1 & \lambda+1 \end{vmatrix} = (\lambda+1)^2 + (\alpha-1) =$$

$$= \lambda^2 + 2\lambda + \alpha = 0 \qquad \lambda = -1 \pm \sqrt{1-\alpha} \qquad \alpha \in [0,1]$$

$$\{\lambda\}_A = \{\underbrace{-1+\sqrt{1-\alpha}}_{\lambda_D},\ -1-\sqrt{1-\alpha},\ -1\}$$

$$T_D = -\frac{1}{\mathrm{Re}(\lambda_D)} = \frac{1}{1-\sqrt{1-\alpha}} \qquad T_R = 5T_D = \frac{5}{1-\sqrt{1-\alpha}}$$



$\Rightarrow \min\limits_{\alpha}(T_R) = 5$ per $\alpha = 1$

(T_R del singolo serbatoio $= 5$)

NOTA: Più in generale, se la costante di deflusso è k si ha:

$$T_R = \frac{5}{k(1-\sqrt{1-\alpha})} \quad \text{e} \quad \min_{\alpha}(T_R) = 5/k \text{ per } \alpha = 1$$

(T_R del singolo serbatoio $5/k$)

Si studi la stabilità dei seguenti sistemi a tempo continuo specificandone, dove esiste, il tempo di risposta.
(NOTA: per i modelli dati in forma I/O si supponga che {poli} = {autovalori})

$$\Sigma_1 \quad A = \overset{A_{11}}{\underset{A_{22}}{\left|\begin{array}{ccc:cc} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & -2 & 0 & 3 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right|}} \qquad \Sigma_2 \quad A = \overset{A_{11}}{\underset{A_{22}}{\left|\begin{array}{cc:ccc} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & 1 & 1 & 2 \\ \hdashline 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right|}} \qquad \Sigma_3 \quad A = \left|\begin{array}{ccccc} 2 & 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 4 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right|$$

$$\Sigma_4 \quad \begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_1 + k_1x_2 + k_2x_3 \\ \dot{x}_2 &= k_1x_1 - 2x_2 - k_2x_3 \\ \dot{x}_3 &= -k_1x3 \end{aligned} \qquad \Sigma_5 \quad G(s) = \frac{3s+3}{3s^2+7s+2}$$

$$\underset{\Sigma_6}{\dot{y} + 10y = 3u} \qquad \underset{\Sigma_7}{\ddot{y} + 5\dot{y} + 4y = 3\dot{u} + u} \qquad \underset{\Sigma_8}{\dddot{y} - 7\dot{y} - 6y = \ddot{u} + 2\dot{u} - 15u}$$

$\boxed{\Sigma_1}$ A è triangolare a blocchi $\Rightarrow \{\lambda\}_A = \{\lambda\}_{A_{11}} \cup \{\lambda\}_{A_{22}}$

$$A_{11} \to \det(\lambda I - A_{11}) = \det \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ 2 & 1 & \lambda+2 \end{vmatrix} = \lambda^2(\lambda+2) + \lambda + 2 =$$

$$= (\lambda^2+1)(\lambda+2) = 0 \quad \begin{cases} \lambda = -2 \\ \lambda = \pm i \end{cases}$$

[In alternativa: A_{11} è in forma canonica di controllo
$\Rightarrow \Delta_{A_{11}}(\lambda) = \lambda^3 + 2\lambda^2 + \lambda + 2 = (\lambda+2)\lambda^2 + (\lambda+2) = (\lambda+2)(\lambda^2+1)$]

$$A_{22} \to \det(\lambda I - A_{22}) = \begin{vmatrix} \lambda-1 & 5 \\ -1 & \lambda+1 \end{vmatrix} = (\lambda-1)(\lambda+1) + 5 = \lambda^2 + 4 = 0 \;\Downarrow\; \lambda = \pm 2i$$

$$\{\lambda\}_A = \{-2, +i, -i, -2i, +2i\}$$

- $\mathrm{Re}(\lambda) \leq 0$
- Autovalori a $\mathrm{Re} = 0$ sono radici semplici di $\Delta_A(\lambda) \Rightarrow$ lo sono anche di $\psi_A(\lambda)$

$\Rightarrow$ semplice stabilità

$\nexists\, T_R$

$\boxed{\Sigma_2}$ A è triangolare a blocchi $\Rightarrow \{\lambda\}_A = \{\lambda\}_{A_{11}} \cup \{\lambda\}_{A_{22}}$

$$A_{11} \rightarrow \quad \det(\lambda I - A_{11}) = \det\begin{vmatrix} \lambda-1 & 1 \\ -3 & \lambda+2 \end{vmatrix} = (\lambda-1)(\lambda+2)+3 =$$

$$= \lambda^2+\lambda+1 = 0 \rightarrow \lambda = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$$

$$A_{22} \rightarrow \quad \det(\lambda I - A_{22}) = \det\begin{vmatrix} \lambda+1 & -1 & 0 \\ 0 & \lambda+2 & -1 \\ -1 & -1 & \lambda \end{vmatrix} =$$

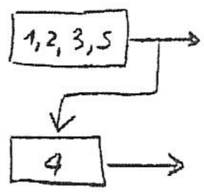
$$= \lambda(\lambda+1)(\lambda+2) - 1 - (\lambda+1) = \lambda(\lambda+1)(\lambda+2) - (\lambda+2) =$$

$$= (\lambda+2)(\lambda^2+\lambda-1) = 0 \begin{cases} \lambda = -2 \\ \lambda = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4}}{2} \begin{cases} \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \\ \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \end{cases} \end{cases}$$

$$\{\lambda\}_A = \Big\{ \underset{\mathbb{R}e\,\ominus}{\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}}, \underset{\mathbb{R}e\,\ominus}{\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}}, \underset{\ominus}{-2}, \underset{\ominus}{\frac{-1-\sqrt{5}}{2}}, \underset{\oplus}{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}} \Big\}$$

Poichè $\exists\, \lambda$ con $\mathbb{R}e > 0 \Rightarrow$ Instabilità (forte) del sistema e $\nexists\, T_R$

$\boxed{\Sigma_3}$ x_4 non influenza la dinamica di x_1, x_2, x_3 e x_5 (vedi 4^a colonna) $\Rightarrow$



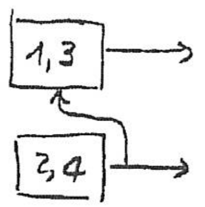
Pertanto, rinominando le variabili di stato posso ottenere una matrice di stato nella forma

$$\left|\begin{array}{cc} & 0 \\ 4,4 & 0 \\ & 0 \\ - & 0 \\ & 1,1 \end{array}\right.$$

Provo, per esempio, a scambiare x_4 con x_5 (scambio tra loro la 4ª e la 5ª colonna e la 4ª e la 5ª riga) ottenendo

$$A = \left|\begin{array}{cccc:c} 2 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hdashline 3 & 1 & 4 & 2 & -1 \end{array}\right| \qquad A_{11} \text{ (blocco } 4\times 4\text{)}, \quad A_{22} = -1$$

Per quanto riguarda A_{11}, le variabili x_2 e x_4 non sono influenzate da x_1, x_3 (seconda e quarta riga):



Se scambio tra loro x_2 e x_3 ottengo

$$A_{11} = \left|\begin{array}{cc:cc} 2 & -2 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 1 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right| \qquad \tilde{A}_{11},\ \tilde{A}_{22}$$

$$\Rightarrow \{\lambda\}_A = \{\lambda\}_{\tilde{A}_{11}} \cup \{\lambda\}_{\tilde{A}_{22}} \cup \underbrace{\{\lambda\}_{A_{22}}}_{\to -1}$$

$\tilde{A}_{11} \to \lambda^2 = 0$, $\lambda_{1,2} = 0 \rightsquigarrow$ radice doppia in A

$\tilde{A}_{22} \to \lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$, $(\lambda+1)^2 = 0$, $\lambda_{1,2} = -1$

$\{\lambda\}_A = \{0, 0, -1, -1, -1\}$

$\Delta_A(\lambda) = \lambda^2(\lambda+1)^3$

- $\mathrm{Re}(\lambda) \leq 0$
- $\lambda = 0$ è radice doppia in ψ_A (*)

$\Downarrow$

debolmente instabile

(*) Con l'uso di Matlab si nota che, posto
$\theta(\lambda) = \lambda(\lambda+1)^3 \Rightarrow \theta(A) \neq 0 \Rightarrow \theta(\lambda) \neq \psi_A(\lambda) = \Delta_A(\lambda)$

$\boxed{\Sigma_4}$ $\quad A = \left|\begin{array}{cc:c} -1 & k_1 & k_2 \\ k_1 & -2 & -k_2 \\ \hdashline 0 & 0 & -k_1 \end{array}\right|$

A_{11}, A_{22}

$$\{\lambda\}_A = \{\lambda\}_{A_{11}} \cup \underbrace{\{\lambda\}_{A_{22}}}_{-k_1}$$

$$A_{11} \to \det(\lambda I - A_{11}) = \det \begin{vmatrix} \lambda+1 & -k_1 \\ -k_1 & 2+\lambda \end{vmatrix} = (\lambda+1)(\lambda+2) - k_1^2 =$$

$$= \lambda^2 + 3\lambda + (2 - k_1^2) = 0$$

$$\lambda = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 4(2-k_1^2)}}{2} = \frac{-3 \pm \sqrt{4k_1^2+1}}{2} = \begin{cases} \dfrac{-3-\sqrt{1+4k_1^2}}{2} & \ominus \\[2ex] \dfrac{-3+\sqrt{1+4k_1^2}}{2} \end{cases}$$

$\ominus$ se $1+4k_1^2 < 9 \to k_1^2 < 2$

$\oplus$ se $1+4k_1^2 > 9 \to k_1^2 > 2$

Pertanto $\{\lambda\}_A = \left\{ \underset{\ominus}{\dfrac{-3-\sqrt{1+4k_1^2}}{2}},\ -k_1,\ \dfrac{-3+\sqrt{1+4k_1^2}}{2} \right\}$

cambia di segno

$$\lambda_1 = \frac{-3-\sqrt{1+4k_1^2}}{2} < 0 \ \forall k_1$$

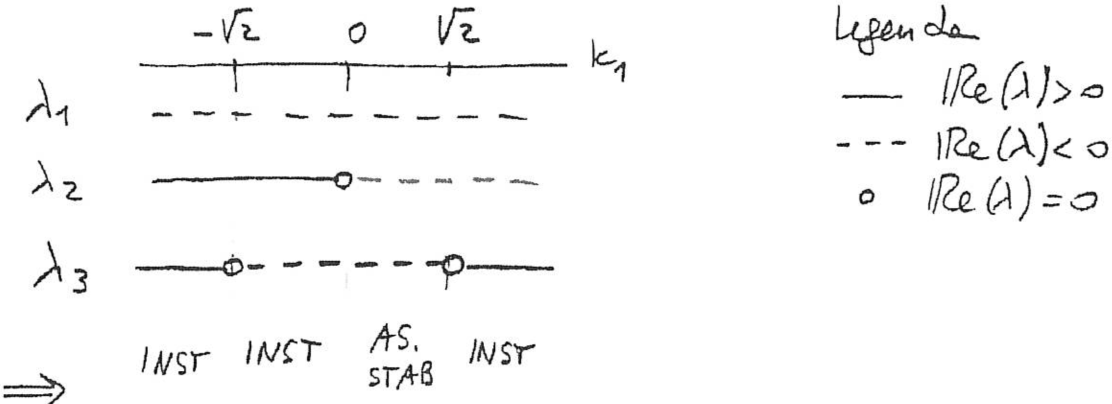
$$\lambda_2 = -k_1 < 0 \text{ se } k_1 > 0$$

$$\lambda_3 = \frac{-3+\sqrt{1+4k_1^2}}{2} < 0 \text{ se } k_1^2 < 2$$

$$\Downarrow$$

$$-\sqrt{2} < k_1 < \sqrt{2}$$

Studio il segno di $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ al variare di k_1 e deduco la stabilità del sistema



$\Longrightarrow$

semplice stabilità (come $k_1=0$)

INST (forte)

$\mathrm{Re}(\lambda_2)>0$

semplice stabilità perché $\mathrm{Re}(\lambda)\le 0$ ed $\exists!\,\lambda$ con Re nulla : $\mathrm{Re}(\lambda_2)=0$
[λ_2 è radice semplice di Δ e di ψ]

Infine, solo per $0<k_1<\sqrt{2}$ (asint stab), si calcola T_R

$\lambda_1<\lambda_3 \Rightarrow$ devo confrontare λ_2 e λ_3

$$-k_1=\frac{-3+\sqrt{1+4k_1^2}}{2} \longrightarrow \underset{+}{3-2k_1}=\sqrt{1+4k_1^2}$$

$$(3-2k_1)^2=1+4k_1^2$$

$$9+\cancel{4k_1^2}-12k_1=1+\cancel{4k_1^2} \qquad 12k_1=8 \qquad k_1=\frac{2}{3}$$

$$0<k_1<2/3 \qquad \lambda_D=\lambda_2=-k_1 \qquad T_D=\frac{1}{k_1} \qquad T_R=\frac{5}{k_1}$$

$$\frac{2}{3}\le k_1<\sqrt{2} \qquad \lambda_D=\lambda_3=\frac{-3+\sqrt{1+4k_1^2}}{2}$$

$$T_D=\frac{2}{3-\sqrt{1+4k_1^2}} \qquad T_R=\frac{10}{3-\sqrt{1+4k_1^2}}$$

$\boxed{\Sigma_5}$ $G(s) = \dfrac{3(s+1)}{3(s+2)(s+\frac{1}{3})}$

$3s^2+7s+2=0$

$s = \dfrac{-7 \pm \sqrt{49-24}}{6} = \begin{cases} -2 \\ -1/3 \end{cases}$

$\lambda_1 = -2$

$\lambda_2 = -\frac{1}{3}$ $\quad \mathrm{Re}(\lambda) < 0 \Rightarrow$ asint. stabilità

$\lambda_D = -\frac{1}{3} \quad T_D = 3 \quad T_R = 15$

$\boxed{\Sigma_6}$ $(s+10)y = 3u$

$\downarrow$

$\lambda + 10 = 0 \quad \lambda = -10 \rightarrow$ Asint. stabile

$T_D = \frac{1}{10} \quad T_R = 5/10 = 1/2$

$\boxed{\Sigma_7}$ $(s^2+5s+4)y = (3s+1)u$

$\lambda^2 + 5\lambda + 4 = (\lambda+4)(\lambda+1) = 0 \begin{cases} \lambda = -4 \\ \lambda = -1 \end{cases} \Rightarrow$ Asint. stab.

$\lambda_D = -1 \quad T_D = 1 \quad T_R = 5$

$\boxed{\Sigma_8}$ $(s^3 - 7s - 6)y = (s^2+2s-15)u$

$\qquad (s+5)(s-3)$

$s^3 - 7s - 6$	$s+1$
$s^3 + s^2$	$s^2 - s - 6$
$-s^2 - 7s - 6$	
$-s^2 - s$	
$-6s - 6$	
$-6s - 6$	
$/$	

$\lambda^3 - 7\lambda - 6 = (\lambda+1)(\lambda^2 - \lambda - 6) = 0$

$\Rightarrow \begin{cases} \lambda = -1 \\ \lambda = \dfrac{1 \pm \sqrt{1+24}}{2} = \begin{cases} \frac{1+5}{2} = 3 \ (+) \\ \frac{1-5}{2} = -2 \ (-) \end{cases} \end{cases}$

$\exists \lambda$ con $\mathrm{Re}(\lambda) > 0 \Rightarrow$ instabile e $\nexists T_R$

Verificare l'asintotica stabilità dei seguenti sistemi. Quale dei due tende più rapidamente a regime? (NOTA: per la funzione di trasferimento si supponga che {poli} ≡ {autovalori}).

A_{11}

$\Sigma_1 \qquad A = \left|\begin{array}{cc:c} -3 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ \hdashline 1 & 0 & -3 \end{array}\right| \qquad\qquad \Sigma_2 \qquad G(s) = \dfrac{s^2+4s+4}{s^3+14s^2+43s+30}$

A_{22}

$$\Sigma_1: \quad A_{11} \to \det(\lambda I - A_{11}) = \det\begin{vmatrix} \lambda+3 & 1 \\ -2 & \lambda+1 \end{vmatrix} = (\lambda+3)(\lambda+1)+2 =$$

$$= \lambda^2+4\lambda+5 = 0 \Rightarrow \lambda = -2 \pm \sqrt{4-5} = -2 \pm i$$

$$\{\lambda\}_A = \{-2-i, -2-i, -3\} \quad \mathrm{Re}(\lambda)<0 \Rightarrow \text{Asint. stab.}$$

$$\lambda_D = -2 \pm i \quad T_D = -\frac{1}{\mathrm{Re}(\lambda_D)} = \frac{1}{2} \quad T_R = 5T_D = 5/2$$

$$\Sigma_2: \quad G(s) = \frac{(s+2)^2}{(s+1)(s+3)(s+10)}$$

$$\begin{array}{l|l} s^3+14s^2+43s+30 & s+1 \\ \hline s^3+s^2 & s^2+13s+30 \\ \quad 13s^2+43s+30 & \\ \quad 13s^2+13s & \\ \quad\quad 30s+30 & \\ \quad\quad 30s+30 & \\ \quad\quad\quad / & \end{array}$$

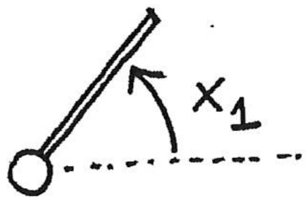
$$\{\lambda\} = \{-1, -3, -10\}$$

$$\mathrm{Re}(\lambda)<0 \Rightarrow \text{Asint. stab.}$$

$$\lambda_D = -1 \quad T_D = 1 \quad T_R = 5$$

Σ_1 tende più rapidamente a regime

Un braccio meccanico ruota nel piano orizzontale sotto l'azione di una coppia C proporzionale allo scostamento tra posizione angolare desiderata u ed effettiva x_1:



$$C(t) = k(u(t) - x_1(t))$$

Il braccio ha momento d'inerzia M ed è inoltre soggetto ad attrito viscoso con coefficiente d'attrito h.

a) Scrivere le equazioni di stato e di uscita, considerando come variabile di uscita la posizione angolare del braccio meccanico.

Si pongano, da qui in avanti, $M = 1$, $h = 4$.

b) Discutere la stabilità del sistema per ogni valore di k $(-\infty < k < +\infty)$.

a) x_1 = posizione angolare
x_2 = velocità angolare

$$\mathring{x}_1 = x_2 \qquad A = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{M} & -\frac{h}{M} \end{vmatrix}$$

$$\mathring{x}_2 = \frac{1}{M}\left(k(u - x_1) - h x_2\right)$$

$$y = x_1$$

b) $M = 1 \quad h = 4 \longrightarrow A = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -k & -4 \end{vmatrix} \qquad \begin{matrix} tr(A) = -4 \\ det(A) = k \end{matrix}$

$$\Delta_A(\lambda) = \lambda^2 - tr(A)\lambda + det(A) = \lambda^2 + 4\lambda + k = 0$$

$$\lambda_{1,2} = -2 \pm \sqrt{4-k}$$

- $k > 0 \Rightarrow \mathbb{R}e(\lambda_{1,2}) < 0 \Rightarrow$ A.S.
- $k = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -4 \quad \lambda_2 = 0 \Rightarrow$ S.S.
  ↳ Radice semplice di $\Delta_A \Rightarrow$ radice semplice di φ_A
- $k < 0 \Rightarrow \underbrace{det(A)}_{\lambda_1 \cdot \lambda_2} = k < 0 \Rightarrow \exists\, \lambda_i > 0 \Rightarrow$ INST

Matrici a blocchi

* Diagonale a blocchi

$$\underset{n,n}{A} = \begin{array}{cc} \begin{array}{cc} n_1 & \quad n_2 \end{array} & \\ \left|\begin{array}{c:c} A_{11} & 0 \\ \hdashline 0 & A_{22} \end{array}\right| & \begin{array}{c} n_1 \\ n_2 \end{array} \end{array}$$

costruisco sulla diagonale principale due matrici quadrate. Le matrici (quadrate o rettangolari) costruite sull'antidiagona hanno tutti elementi nulli

$n_1 + n_2 = n$

$$\{\lambda\}_A = \{\lambda\}_{A_{11}} \cup \{\lambda\}_{A_{22}}$$

* Triangolare a blocchi

sulla diagonale principale: 2 matrici quadrate
sulla anti-diagonale: almeno una matrice (quadrata o rettangolare) di elementi nulli

$$\underset{n,n}{A} = \begin{array}{cc} \left|\begin{array}{c:c} A_{11} & * \\ \hdashline 0 & A_{22} \end{array}\right| & \begin{array}{c} n_1 \\ n_2 \end{array} \\ \begin{array}{cc} n_1 & \quad n_2 \end{array} & \end{array} \quad \text{oppure} \quad \begin{array}{cc} \left|\begin{array}{c:c} A_{11} & 0 \\ \hdashline * & A_{22} \end{array}\right| & \begin{array}{c} n_1 \\ n_2 \end{array} \\ \begin{array}{cc} n_1 & \quad n_2 \end{array} & \end{array}$$

$n_1 + n_2 = n$

$$\{\lambda\}_A = \{\lambda\}_{A_{11}} \cup \{\lambda\}_{A_{22}}$$

NOTA il tutto si può iterare

$$A = \left|\begin{array}{c:cc:c} -2 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ \hdashline 1 & 0 & 0 & -3 \end{array}\right|$$

$$\{\lambda\} = \{-3, -2, 4, 1\}$$