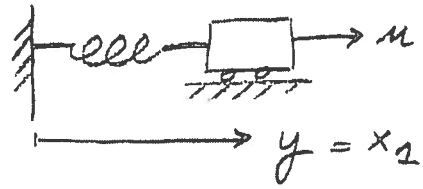


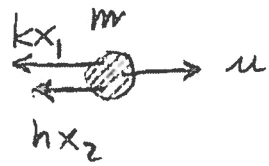
Determinare il modello ingresso/uscita del sistema meccanico rappresentato in figura esprimendolo come equazione differenziale e come funzione di trasferimento.
Calcolare infine l'equilibrio, gli zeri, i poli e il guadagno del sistema.

m = massa del carrello
k = costante elastica della molla lineare
h = coefficiente di attrito viscoso

x_1 = posizione

x_2 = velocità

y = posizione



$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \frac{1}{m}\left[u - kx_1 - hx_2\right] \\ y = x_1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} s x_1 = x_2 \\ s x_2 = \frac{1}{m}\left[u - kx_1 - hx_2\right] \\ y = x_1 \end{cases}$$

$$s^2 x_1 = \frac{1}{m}\left[u - kx_1 - s h x_1\right]$$

$$(ms^2 + hs + k)\, y = u \qquad N(s) = 1 \quad D(s) = ms^2 + hs + k$$

$$m\ddot{y} + h\dot{y} + ky = u$$

$$G(s) = \frac{1}{ms^2 + hs + k}$$

<u>Equilibrio</u>

$$\dot{x}_1 = 0 \rightarrow \bar{x}_2 = 0$$

$$\dot{x}_2 = 0 \rightarrow \bar{x}_1 = \bar{u}/k$$

$$\bar{y} = \bar{u}/k \Rightarrow \bar{y} = G(0)\,\bar{u} = \frac{1}{k}\bar{u}$$

<u>zeri</u> $\nexists$ <u>poli</u> $ms^2 + hs + k = 0 \rightarrow p_{1,2} = \dfrac{-h \pm \sqrt{h^2 - 4mk}}{2m}$

$\{poli\} \equiv \{\lambda\}$ essendo

il grado $(D) = n = 2$

<u>guadagno</u> $\mu = G(0) = 1/k$

Osservazione 1

Cambiando variabile di uscita cambia il modello I/O.

Se, ad esempio, $y = x_2 \rightarrow$ con calcoli analoghi si ottiene

$$(ms^2 + hs + k)y = su \qquad N(s) = s$$
$$D(s) = ms^2 + hs + k$$

$$m\ddot{y} + h\dot{y} + ky = \dot{u}$$

$$G(s) = \frac{s}{ms^2 + hs + k} \qquad \text{zero in } s = 0 \text{ e } \mu = G(0) = 0$$

Osservazione 2

In questo esempio è possibile ottenere il modello I/O senza passare attraverso il modello interno del sistema meccanico.

$$m \cdot (\text{accel}) = \sum (\text{forze applicate})$$

y = posizione $\rightarrow \dot{y}$ = velocità $\rightarrow \ddot{y}$ = accelerazione

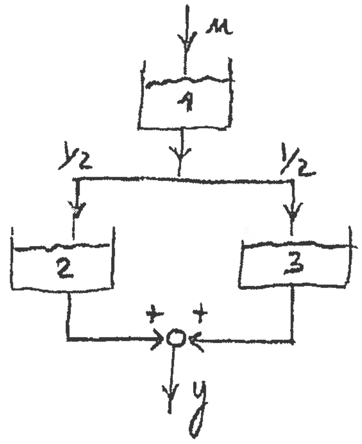
forze applicate:
- u
- forza di attrito $= h(\text{velocità}) = h\dot{y}$
- forza elastica $= k(\text{allungamento}) = ky$

Da cui $$m\ddot{y} = u - h\dot{y} - ky$$

$$\Rightarrow m\ddot{y} + h\dot{y} + ky = u$$

Determinare il modello ingresso/uscita della rete idrica rappresentata in figura (k_i = costante di deflusso del serbatoio i-esimo (i =1, 2, 3)) nell'ipotesi che i serbatoi 2 e 3 siano differenti ($k_2 \neq k_3$).
Si esprima tale modello come equazione differenziale e come funzione di trasferimento.

Supponendo ora che i serbatoi 2 e 3 siano identici ($k_2 = k_3$), valutare la funzione di trasferimento e commentare.



x_i = volume di invaso del serbatoio i-esimo

$$\dot{x}_1 = u - k_1 x_1$$
$$\dot{x}_2 = \frac{1}{2} k_1 x_1 - k_2 x_2$$
$$\dot{x}_3 = \frac{1}{2} k_1 x_1 - k_3 x_3$$
$$y = k_2 x_2 + k_3 x_3$$

$$A = \begin{vmatrix} -k_1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} k_1 & -k_2 & 0 \\ \frac{1}{2} k_1 & 0 & -k_3 \end{vmatrix}$$

$$\{\lambda\}_A = \{-k_1, -k_2, -k_3\}$$

$$\downarrow$$

$$s x_1 = u - k_1 x_1$$
$$s x_2 = \frac{1}{2} k_1 x_1 - k_2 x_2$$
$$s x_3 = \frac{1}{2} k_1 x_1 - k_3 x_3$$
$$y = k_2 x_2 + k_3 x_3$$

$$\rightarrow$$

$$(s+k_1) x_1 = u$$
$$(s+k_2) x_2 = \frac{1}{2} k_1 x_1$$
$$(s+k_3) x_3 = \frac{1}{2} k_1 x_1$$

$$\Rightarrow \quad x_2 = \frac{1}{2} \frac{k_1}{(s+k_1)(s+k_2)} u \qquad x_3 = \frac{1}{2} \frac{k_1}{(s+k_1)(s+k_3)} u$$

$$y = \frac{1}{2} \left[\frac{k_1 k_2}{(s+k_1)(s+k_2)} + \frac{k_1 k_3}{(s+k_1)(s+k_3)} \right] u$$

$$y = \frac{1}{2} k_1 \frac{(k_2+k_3)s + 2 k_2 k_3}{(s+k_1)(s+k_2)(s+k_3)} u$$

$$\underbrace{(s+k_1)(s+k_2)(s+k_3)}_{D(s)}\, y = \underbrace{\frac{1}{2} k_1 \left[(k_2+k_3)s + 2k_2k_3\right]}_{N(s)} u$$

$$\dddot{y} + (k_1+k_2+k_3)\ddot{y} + (k_1k_2 + k_1k_3 + k_2k_3)\dot{y} + k_1k_2k_3 y =$$

$$= \frac{1}{2}k_1(k_2+k_3)\dot{u} + k_1k_2k_3 u$$

$$G(s) = \frac{1}{2}k_1 \frac{(k_2+k_3)s + 2k_2k_3}{(s+k_1)(s+k_2)(s+k_3)} \qquad (\square)$$

NOTA poli in $-k_1, -k_2, -k_3 \Rightarrow \{poli\} \equiv \{\lambda\}$

$k_2 = k_3 = k \rightsquigarrow \exists$ simmetria nella rete idrica

Ponendo $k_2 = k_3 = k$ nella $(\square)$ si ottiene:

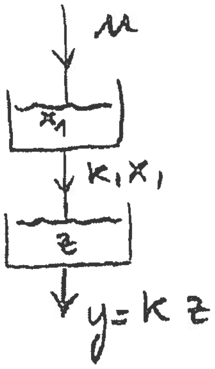
$$G(s) = \frac{1}{2}k_1 \frac{2ks + 2k^2}{(s+k_1)(s+k)^2} = \frac{1}{\cancel{2}}k_1 \frac{\cancel{2}k\cancel{(s+k)}}{(s+k_1)(s+k)^{\cancel{2}}}$$

$$G(s) = \frac{k_1 k}{(s+k_1)(s+k)}$$

Il grado(denominatore di $G(s)$) $= 2 < n = 3$
a causa della simmetria della rete idrica

Infatti questa è la stessa $G(s)$ che si otterrebbe sostituendo i due serbatoi in parallelo con un unico serbatoio di volume

$$z = x_1 + x_2$$



$$z = x_1 + x_2$$

$$\dot{x}_1 = u - k_1 x_1$$

$$\dot{z} = k_1 x_1 - k z$$

$$y = k z$$

$$\begin{aligned} (s+k_1)\, x_1 &= u \\ (s+k)\, z &= k_1 x_1 \end{aligned} \;\longrightarrow\; \begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{s+k_1}\, u \\ z &= \frac{k_1}{(s+k)(s+k_1)}\, u \end{aligned}$$

$$y = k z = \frac{k k_1}{(s+k)(s+k_1)}\, u$$

da cui $\quad G(s) = \dfrac{k k_1}{(s+k)(s+k_1)}$

I finanziamenti concessi da una certa banca alle imprese sono classificati in tre categorie:

1 = elevata affidabilità 2 = media affidabilità 3 = scarsa affidabilità

Ogni anno, in base alle informazioni sulla solidità delle imprese, una frazione α_{ij} dei finanziamenti di categoria i viene classificata in categoria j, mentre un'ulteriore frazione β_i diviene parte delle "sofferenze" (finanziamenti non più riscuotibili). Infine, ogni anno t la banca concede nuovi prestiti per un ammontare $u(t)$, esclusivamente di categoria 1.

I valori dei coefficienti sono i seguenti:

$\alpha_{11} = 0.8$, $\alpha_{12} = 0.1$, $\alpha_{22} = 0.7$, $\alpha_{23} = 0.2$, $\alpha_{33} = 0.9$, $\alpha_{13} = \alpha_{21} = \alpha_{31} = \alpha_{32} = 0$

$\beta_1 = 0$, $\beta_2 = 0.05$, $\beta_3 = 0.1$

a) Descrivere il fenomeno in esame mediante un sistema dinamico a tempo discreto, in cui $y(t)$ rappresenti l'ammontare delle nuove sofferenze nell'anno t.

b) Determinare il modello I/O del sistema.

c) Determinare (utilizzando il modello I/O) l'ammontare delle nuove sofferenze annue all'equilibrio se $u(t) = 100$.

a) $x_i(t)$ = ammontare dei prestiti in categoria i nell'anno t

$i = 1, 2, 3$

$$x_1(t+1) = \alpha_{11} x_1(t) + \alpha_{21} x_2(t) + \alpha_{31} x_3(t) + u(t)$$
$$x_2(t+1) = \alpha_{12} x_1(t) + \alpha_{22} x_2(t) + \alpha_{32} x_3(t)$$
$$x_3(t+1) = \alpha_{13} x_1(t) + \alpha_{23} x_2(t) + \alpha_{33} x_3(t)$$
$$y(t) = \beta_1 x_1(t) + \beta_2 x_2(t) + \beta_3 x_3(t)$$

$$\Rightarrow \quad x_1(t+1) = 0{,}8\, x_1(t) + u(t)$$
$$x_2(t+1) = 0{,}1\, x_1(t) + 0{,}7\, x_2(t)$$
$$x_3(t+1) = 0{,}2\, x_2(t) + 0{,}9\, x_3(t)$$
$$y(t) = 0{,}05\, x_2(t) + 0{,}1\, x_3(t)$$

$$A = \begin{vmatrix} 0{,}8 & 0 & 0 \\ 0{,}1 & 0{,}7 & 0 \\ 0 & 0{,}2 & 0{,}9 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} = b$$

$$c = \begin{vmatrix} 0 & 0{,}05 & 0{,}1 \end{vmatrix} \quad d = 0$$

b) $z x_1 = 0{,}8\, x_1 + u$ $\qquad (z-0{,}8)\, x_1 = u$

$z x_2 = 0{,}1\, x_1 + 0{,}7 x_2 \qquad \rightarrow (z-0{,}7)\, x_2 = 0{,}1\, x_1$

$z x_3 = 0{,}2\, x_2 + 0{,}9\, x_3 \qquad (z-0{,}9)\, x_3 = 0{,}2\, x_2$

$y = 0{,}05\, x_2 + 0{,}1\, x_3$

$$x_1 = \frac{1}{z-0{,}8}\, u$$

$$x_2 = \frac{0{,}1}{z-0{,}7}\, x_1 = \frac{0{,}1}{(z-0{,}8)(z-0{,}7)}\, u$$

$$x_3 = \frac{0{,}2}{z-0{,}9}\, x_2 = \frac{0{,}02}{(z-0{,}7)(z-0{,}8)(z-0{,}9)}\, u$$

$$y = \underbrace{\frac{0{,}005\,(z-0{,}9) + 0{,}002}{(z-0{,}7)(z-0{,}8)(z-0{,}9)}}_{G(z)}\, u$$

c) $\bar{y} = G(1)\, \bar{u}$

$$G(1) = \frac{0{,}005 \cdot 0{,}1 + 0{,}002}{0{,}3 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}1} \simeq 0{,}4167$$

$\bar{u} = 100$

$\Rightarrow \bar{y} \cong 41{,}67$

Una società finanziaria, all'inizio di ogni mese eroga nuovi prestiti di durata quadrimestrale, riscuote l'interesse su prestiti esistenti nella misura dell'1 % dell'ammontare del prestito, incassa il rimborso dei prestiti giunti a scadenza, classifica come "persi" in media il 2% dei prestiti esistenti. Questi non daranno più luogo a interessi e non saranno riscuotibili alla scadenza.
Descrivere tale attività mediante un modello matematico (interno ed esterno), in cui l'ingresso rappresenta l'ammontare dei nuovi prestiti erogati all'inizio del mese e l'uscita l'ammontare degli interessi riscossi.
Se, a partire da t=0, ogni mese i nuovi prestiti erogati ammontano a 100000 €, calcolare l'ammontare mensile degli interessi riscossi a regime.

$x_i(t)$ = ammontare dei prestiti erogati da i mesi all'inizio del mese t $\quad (i = 1, 2, 3, 4)$

$$x_1(t+1) = 0{,}98\, u(t)$$
$$x_2(t+1) = 0{,}98\, x_1(t)$$
$$x_3(t+1) = 0{,}98\, x_2(t)$$
$$x_4(t+1) = 0{,}98\, x_3(t)$$
$$y(t) = 0{,}01\left[x_1(t) + x_2(t) + x_3(t) + x_4(t)\right]$$

modello interno

$$z x_1 = 0{,}98\, u \qquad z x_2 = 0{,}98\, x_1 \qquad z x_3 = 0{,}98\, x_2 \qquad z x_4 = 0{,}98\, x_3$$

$$\rightarrow \quad x_1 = \frac{0{,}98}{z} u \qquad x_2 = \frac{0{,}98^2}{z^2} u \qquad x_3 = \frac{0{,}98^3}{z^3} u \qquad x_4 = \frac{0{,}98^4}{z^4} u$$

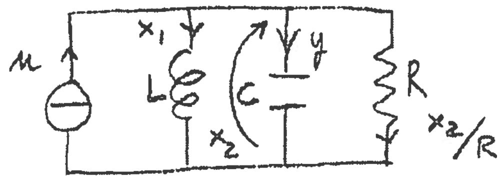
$$y = 0{,}01\left[\frac{0{,}98}{z} + \left(\frac{0{,}98}{z}\right)^2 + \left(\frac{0{,}98}{z}\right)^3 + \left(\frac{0{,}98}{z}\right)^4\right] u$$

$$y = \underbrace{0{,}0098\, \frac{z^3 + 0{,}98 z^2 + 0{,}98^2 z + 0{,}98^3}{z^4}}_{G(z)} u$$

modello esterno

$$\bar{y} = G(1)\,\bar{u} \simeq 3804 \text{ €}$$

Descrivere la rete elettrica in figura mediante un modello interno (vedi prima esercitazione) e un modello esterno.



$$\dot{x}_1 = \frac{1}{L} x_2$$

$$\dot{x}_2 = \frac{1}{C}\left[u - x_1 - \frac{x_2}{R}\right]$$

$$y = u - x_1 - \frac{x_2}{R}$$ ⇝ sistema improprio (d = 1)

NOTA

$$A = \begin{vmatrix} 0 & 1/L \\ -1/C & -1/RC \end{vmatrix}$$

$$\Delta_A(\lambda) = \lambda^2 + \frac{1}{RC}\lambda + \frac{1}{LC}$$

↓

$$s x_1 = \frac{1}{L} x_2 \qquad s x_2 = \frac{1}{C} y$$

$$\longrightarrow \quad x_1 = \frac{1}{sL} x_2 = \frac{1}{s^2 LC} y \qquad x_2 = \frac{1}{sC} y$$

$$y = u - \frac{1}{s^2 LC} y - \frac{1}{sRC} y$$

$$\left(1 + \frac{1}{s^2 LC} + \frac{1}{sRC}\right) y = u$$

$$\Rightarrow (s^2 LRC + sL + R)\, y = s^2 LRC\, u$$

$$\ddot{y} LRC + \dot{y} L + R y = LRC\, \ddot{u}$$

$$N(s) = s^2 LRC$$

$$D(s) = s^2 LRC + sL + R$$

$$G(s) = \frac{s^2 LRC}{s^2 LRC + sL + R} = \frac{s^2}{s^2 + \frac{1}{RC} s + \frac{1}{LC}}$$

↳ $\{\text{poli}\} \equiv \{\lambda\}$ vedi $\Delta_A(\lambda)$

NOTA Essendo il sistema improprio il grado(N) = grado(D)

Sia dato un sistema dinamico lineare a tempo continuo definito dalle matrici

$$A = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & -3 \end{vmatrix} \qquad b = \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix} \qquad c = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} \qquad d = 0$$

NOTA

$\{\lambda\}_A = \{-1, -2, -3\}$

Determinare la funzione di trasferimento del sistema commentando il risultato ottenuto.
Valutare equilibrio, zeri, poli e guadagno del sistema.

$$\dot{x}_1 = -x_1 + x_2 + u \qquad (s+1)\,x_1 = +x_2 + u$$

$$\dot{x}_2 = -2x_2 + u \;\rightarrow\; (s+2)\,x_2 = +u \;\rightarrow\; x_2 = +\frac{1}{s+2}u$$

$$\dot{x}_3 = -x_2 - 3x_3 + u \qquad (s+3)\,x_3 = -x_2 + u$$

$$y = x_1 - x_2$$

$$x_1 = +\frac{1}{s+1}x_2 + \frac{1}{s+1}u = +\frac{1}{(s+1)(s+2)}u + \frac{1}{s+1}u$$

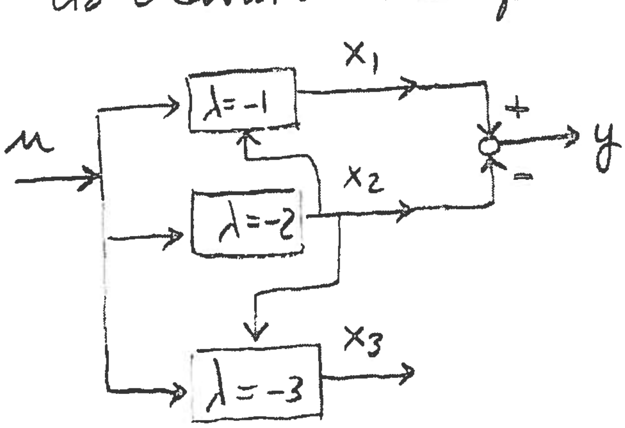
$$x_1 = \frac{+1+s+2}{(s+1)(s+2)}u \;\rightarrow\; x_1 = \frac{s+3}{(s+1)(s+2)}u$$

$$y = \frac{s+3}{(s+1)(s+2)}u - \frac{1}{s+2}u = \frac{s+3-s-1}{(s+1)(s+2)}u = \frac{2}{(s+1)(s+2)}u$$

$$G(s) = \frac{2}{(s+1)(s+2)} \rightarrow \text{poli in } -1 \text{ e } -2$$

↳ ha grado 2 < n = 3

Ciò è dovuto alla "forma" del sistema



La variabile x_3, pur essendo influenzata da u, non influenza né direttamente né indirettamente la variabile di uscita y

⇒ grado (D) < n = 3

Tra tutti gli autovalori, si perde quello "relativo" al sottosistema che genera x_3

Equilibrio

$$-x_1 + x_2 + u = 0 \qquad x_1 = x_2 + u = \frac{3}{2} u$$

$$-2x_2 + u = 0 \quad \rightarrow \quad x_2 = \frac{1}{2} u$$

$$-x_2 - 3x_3 + u = 0 \qquad x_3 = -\frac{1}{3} x_2 + \frac{1}{3} u = +\frac{1}{6} u$$

zeri $\nexists$

poli in -1 e -2

$\mu = G(0) = \frac{2}{2} = 1$ guadagno