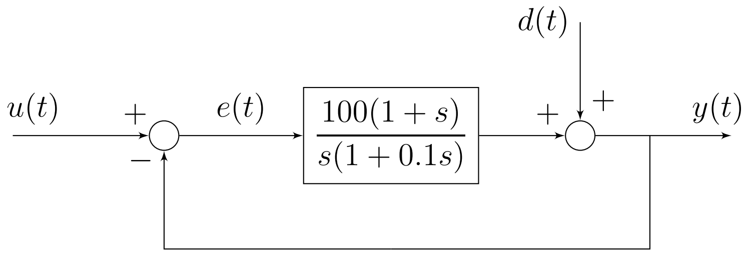
Criterio di Bode e sintesi del controllore

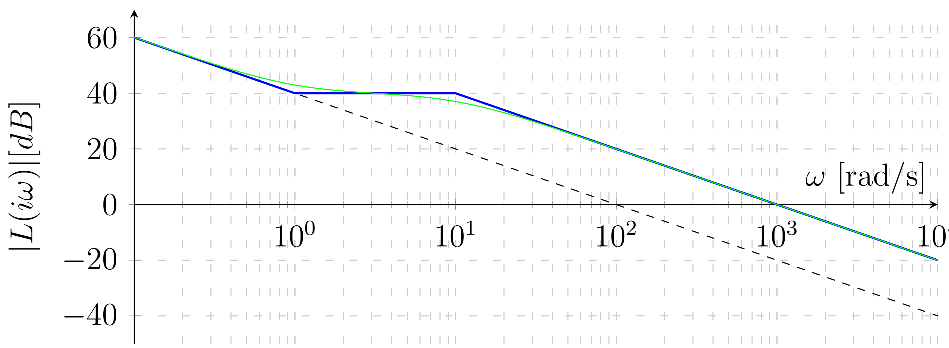
Esercizio 1

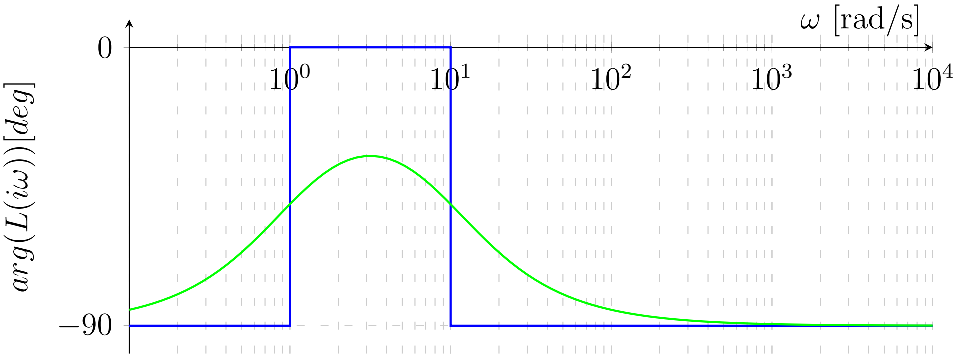
Si consideri il sistema



1. Studiare la stabilità esterna del sistema senza calcolare la funzione di trasferimento.
2. Determinare l'effetto sull'uscita di un disturbo $d(t)$ costante di ampiezza 1.
3. Determinare $|e(t)|$ a transitorio esaurito in assenza di disturbo e con ingresso $u(t)$ di ampiezzza unitaria e pulsazione pari a 0, 10^2, 10^4.

Tracciamo il diagramma di Bode della funzione d'anello. Essa è già scritta in forma standard, possiamo quindi procedere al tracciamento del diagramma. La funzione d'anello ha uno zero nell'origine: se non ci fossero altri poli o zeri, passerebbe quindi per $(1, 40dB)$ con pendenza -20 dB/dec. Utilizziamo questa come approssimazione in bassa frequenza, quindi incontriamo uno zero stabile a $\omega = 1$ e un polo stabile a $\omega = 10$. I diagrammi di Bode risultano quindi:



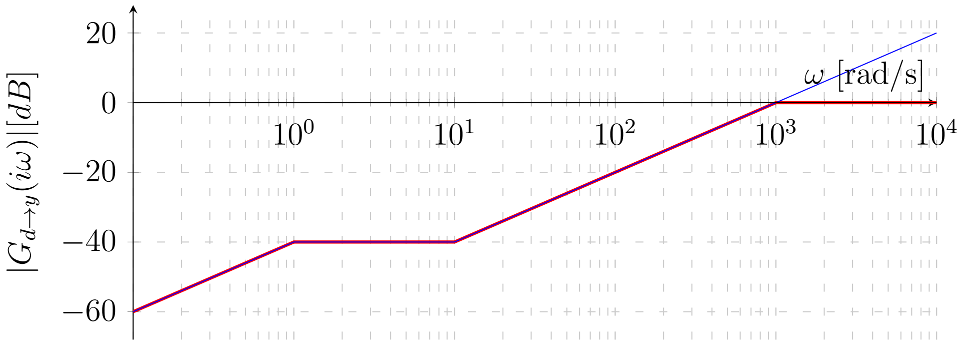


$\omega_c = 10^3$, $arg(L(i\omega_c)) = -90°$, quindi $\varphi_m = 90° > 0$. Siccome siamo sotto le ipotesi del criterio di Bode ($L(s)$ non ha poli instabili, il suo diagramma di Bode del modulo parte sopra l'asse 0 dB e taglia l'asse una volta sola), questo ci garantisce la stabilità del sistema di controllo.

Per determinare l'effetto dell'uscita di un disturbo costante dobbiamo calcolare la funzione di trasferimento dal disturbo all'uuscita, che è

$$G_{d\to y} = \frac{1}{1+L}$$

Per cui il diagramma di Bode del modulo si può ottenere graficamente come il minimo tra l'asse 0 dB e il diagramma di Bode di $1/L$ (ovvero, in scala logaritmica, il diagramma di Bode in anello aperto cambiato di segno).



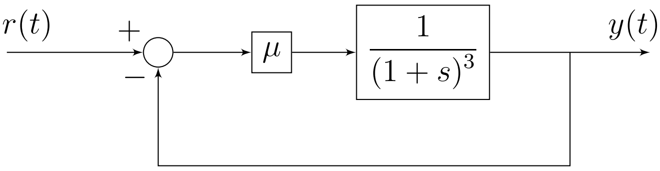
Dal diagramma di Bode deduciamo immediatamente che disturbi costanti vengono rigettati. Questa cosa la potevamo dedurre immediatamente anche notando la presenza di un polo nell'origine della funzione d'anello.

Per determinare $|e_\infty(t)|$ possiamo utilizzare il teorema della risposta in frequenza. Si noti che $G_{u\to e} = G_{d\to y}$, per cui:

- $\omega = 0$: $e_\infty(t) = 0$, ovvero l'uscita è uguale all'ingresso
- $\omega = 10^2$: $|e_\infty(t)| = 1/10$, ovvero l'uscita, benchè uguale all'ingresso ($\omega = 100$ è in banda!), è un po' sfasata: se $u(t) = sin(100t)$ $y(t) = sin(100t - 5\,°)$, per cui $e(t) = u(t) - y(t) = sin(100t) - sin(100t - 5\,°) = 2cos(100t - 2.5°)sin(+2.5°) = 0.087cos(100t - 2.5°)$ (nota: $sin(\alpha) + sin(\beta) = 2sin(\frac{\alpha+\beta}{2})cos(\frac{\alpha-\beta}{2})$)
- $\omega = 10^4$: $|e_\infty(t)| = 1$, ovvero il nostro sistema di controllo non riesce a seguire l'ingresso

Esercizio 2

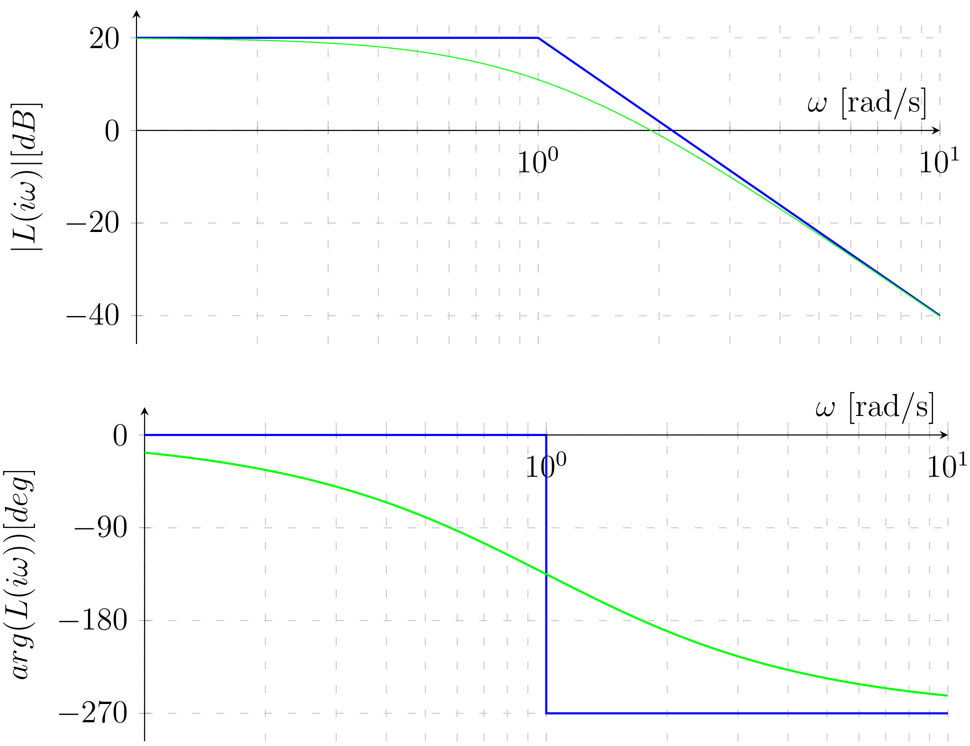
Dato il sistema retroazionato



Calcolare i valori positivi che possono essere assunti dal parametro μ affinchè:

- Il sistema retroazionato sia esternamente stabile;
- La pulsazione di taglio sia più grande di 4/3;
- Il margine di fase sia maggiore di 20°.

Tracciamo il diagramma di Bode della funzione d'anello. Essa è già scritta in forma standard, possiamo quindi procedere al tracciamento del diagramma. La funzione d'anello ha guadagno in bassa frequenza pari a μ. Come primo esempio, assumiamo $\mu = 10$ (poi lo cambieremo per soddisfare i requisiti richiesti). Il diagramma di Bode procederà piatto fino a che non incontro la pulsazione $\omega = 1$, dove inizierà a scendere di 60 dB/dec.



Si noti che con $\mu = 10$ il criterio di Bode ci garantisce che il sistema di controllo è instabile, poichè $\omega_c \sim 2$ (la leggo dal grafico) e $\varphi(\omega_c) < -180°$, ovvero il margine di fase è negativo. Volendo calcolare ω_c del diagramma di Bode in maniera corretta, possiamo analizzare il triangolo rettangolo che scende da μ di 60 db/dec. Da cui

$$60(Log(\omega_c/1)) = 20 \Rightarrow Log(\omega_c) = 1/3 \Rightarrow \omega_c \sim 2.15$$

e

$$\phi(\omega_c) = 3atan(\omega_c) \sim 195°.$$

Per risolvere il problema possiamo variare μ e provare a rispettare le specifiche guardando il diagramma di Bode, oppure imporle rifacendo un conto analogo. Il limite superiore di ω_c, per avere $\varphi_m > 20$ è dato da

$$3atan(\omega_c) = 160°$$

Si noti che l'approssimazione asintotica del diagramma di Bode non è buona tanto piu' ω_c si avvicina a 1. Per calcolare il limite inveriore per μ ricorriamo quindi al caloclo diretto:

$$\left|\frac{\mu}{(1+i\ \omega_c)^3}\right| = 1 \quad \Rightarrow \quad \mu = (1+\omega_c^2)^{3/2} = (1+tan(160/3)^2)^{3/2}$$

ovvero $\mu < 4.696$.

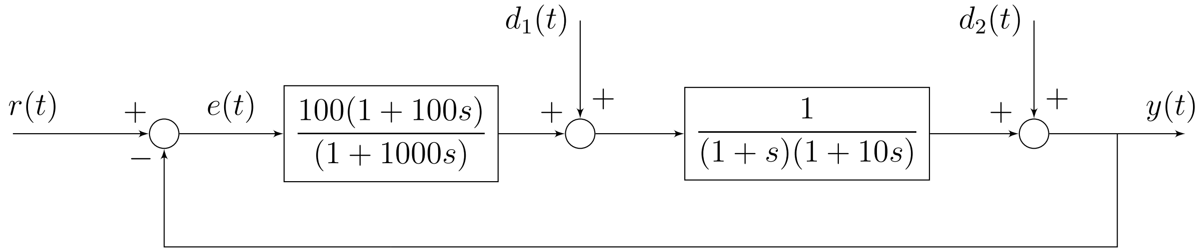
Siccome il limite inferiore alla banda mi è dato dalle specifiche $\omega_c > 4/3$, il limite inferiore per μ si può ottenere come

$$\mu = (1+\omega_c^2)^{3/2} = (1+(4/3)^2)^{3/2} \Rightarrow \mu > 4.63.$$

Viste le specifiche posso quindi scegliere $\mu = 4.65$.

Esercizio 3

Si consideri il sistema di controllo

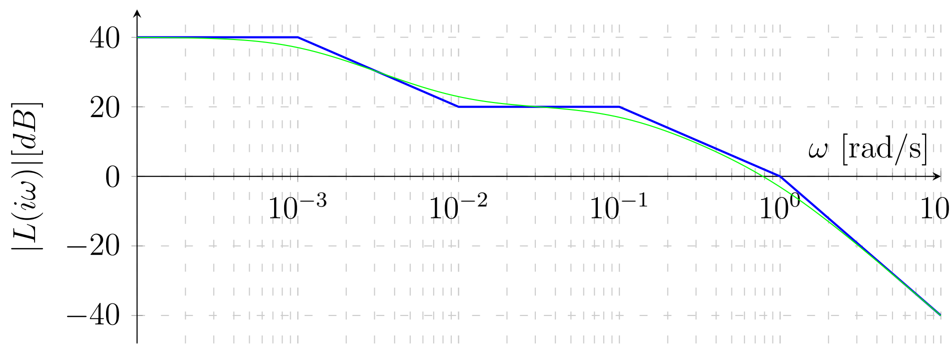


1. Studiarne la stabilità senza calcolare la funzione di trasferimento.
2. Determinare la pulsazione di taglio e il margine di fase.
3. Disegnare i diagrammi di Bode delle funzione di trasferimento dal riferimento r e dai disturbi d_1 (sull'attuatore) e d_2 (sull'uscita) all'uscita.
4. Si dica quanto vale il modulo dell'uscita a transitorio esaurito quando il segnale di riferimento e i disturbi sono scalini unitari e quando sono sinusoidi di ampiezza 10 e pulsazione 0.02.

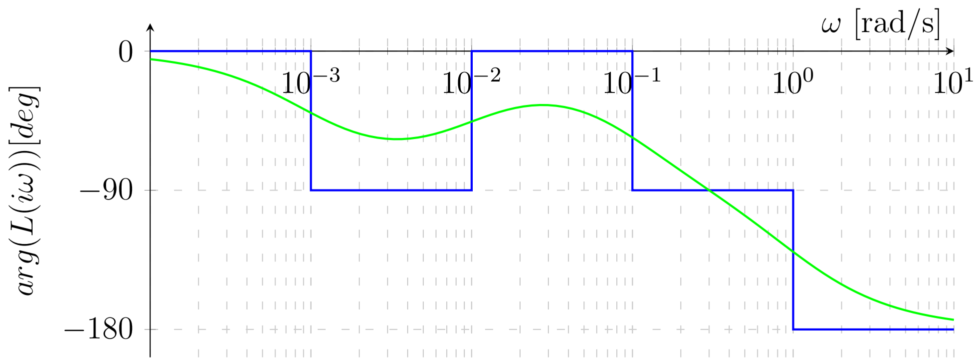
La funzione d'anello, scritta in forma standard, risulta:

$$L(s) = 100\frac{1+100s}{(1+1000s)(1+10s)(1+s)}$$

ed ha guadagno in bassa frequenza pari a 100 (40 dB). Il diagramma di Bode procederà piatto fino a che non incontro la pulsazione $\omega = 10^{-3}$, dove inizierà a scendere di -20 dB/dec, poi a $\omega = 10^{-}2$ tornerà piatta, quindi tornerà a scendere di -20 dB/dec e -40 dB/dec dopo aver incontroto i poli in $\omega = 10^{-1}$ e $\omega = 1$ rispettivamente.

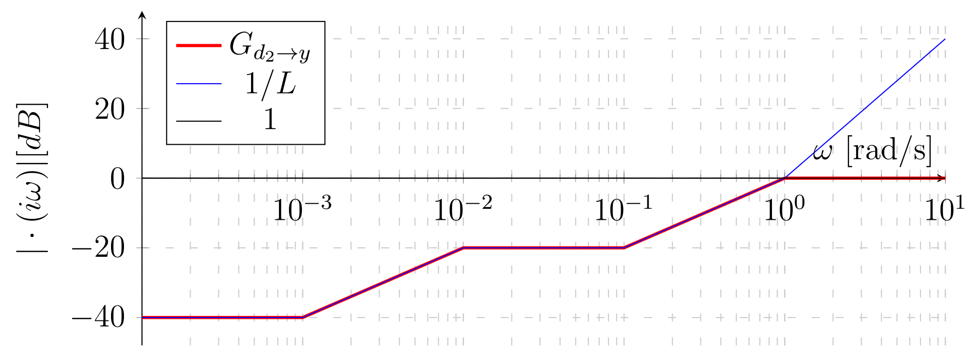


Il diagramma di bode della fase risulterà invece

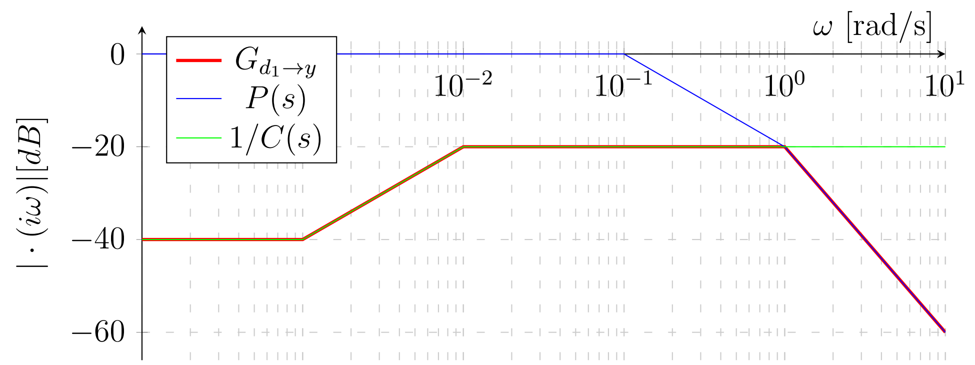


Dai diagrammi di Bode ricaviamo che la pulsazione di taglio $\omega_c = 1$ (siccome è in corrispondenza di un polo sarà un pochino meno), e quindi il margine di fase $\varphi_m \sim 180 - (90° + 45°) \sim 45° > 0$. Siccome sono rispettate le ipotesi di applicabilità del criterio di Bode (i poli di $L(s)$ sono tutti stabili, il suo diagramma di Bode del modulo parte sopra l'asse 0 dB e lo taglia una volta sola, il guadagno generalizzato e il margine di fase sono positivi), possiamo dedurre che il sistema di controllo è esternamente stabile.

La funzione di trasferimento $G_{d_2 \to y}$ dal disturbo sull'uscita d_2 all'uscita ha in linea di andata 1 e in linea di retroazione $L(s)$. Il suo diagramma di Bode del modulo si otterrà prendendo il minimo tra 1 e $1/L$, ovvero



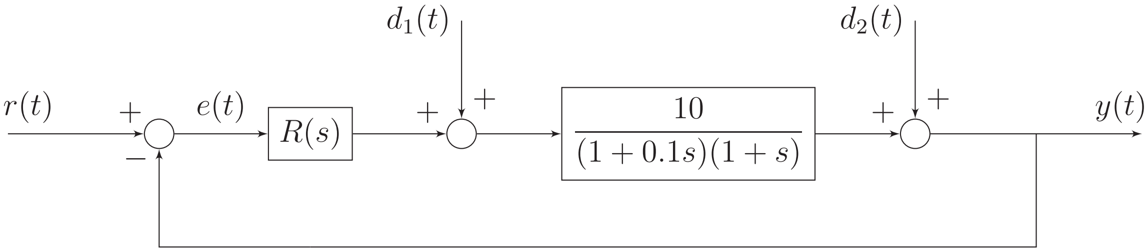
Per tracciare invece il diagramma di Bode $G_{d_1 \to y}$ dal disturbo sull'attuazione d_1 all'uscita in linea di andata abbiamo la funzione di trasferimento $P(s)$ (processo) del secondo blocco, mentre in linea di retroazione abbiamo la funzione di trasferimento $C(s)$ (controllore) del primo blocco. Il diagramma di Bode del modulo di $G_{d_1 \to y}$ si otterrà quindi prendendo il minimo tra $P(s)$ e $1/C(s)$, ovvero



Per rispondere all'ultimo quesito utilizziamo il teorema della risposta in frequenza, leggendo i dati dai diagrammi di Bode che abbiamo tracciato.
Se $r(t) = d_1(t) = d_2(t) = 1$, $|G_{r\to y}(0)| = 1$, mentre $|G_{d_1\to y}(0)| = |G_{d_2\to y}(0)| = 0.01$, per cui $|y_\infty(t)| = 1.02$.
Se $r(t) = d_1(t) = d_2(t) = 10sin(0.02)$, $|G_{r\to y}(0.02)| = 1$, mentre $|G_{d_1\to y}(0.02)|$=$|G_{d_2\to y}(0.02)| = 0.1$, per cui $|y_\infty(t)| = 1.2$.

Esercizio 4

Dato il sistema di controllo



Progettare due controllori $R(s)$ il più semplici possibile tali per cui:

1. $\varphi_m \geq 26.6°$, l'uscita sia uguale al riferimento nel caso di riferimenti e disturbi costanti e la pulsazione di taglio sia la più grande possibile.

2. Il sistema retroazionato sia esternamente stabile, il margine di fase sia almeno 30° e il sistema sia robusto ad un ritardo non modellizzato di 5 millesimi di secondo, l'uscita sia uguale al segnale di riferimento ed un eventuale disturbo sul processo d_1 sia cancellato se costante e comunque sempre attenuato ad almeno un decimo.

Calcolare, per i due controllori appena progettati, l'effetto sull'uscita di d_1 e d_2 nel caso in cui essi siano segnali di ampiezza unitaria e con pulsazione pari a 0, 1, 10, 100.

Affinchè l'uscita sia uguale al riferimento nel caso di disturbi costanti, nell'anello abbiamo bisogno di un polo nell'origine. Il regolatore più semplice possibile è quindi del tipo $R(s) = \mu/s$. In questo caso, la funzione d'anello

$$L(s) = \frac{10\mu}{s}\frac{1}{(1+s)(1+0.1s)}.$$

Il requisito sul margine di fase ci dà un upper-bound al valore della pulsazione di taglio. In particolare

$$\varphi(\omega_c) = -90 - atan(\omega_c) - atan(0.1\omega_c) < 180 - 26.6$$

Per risolvere questa equazione (con due arcotangenti) possiamo procedere un po' a tentativi (per bisezione) oppure cercare su Wikipedia le formule di prostaferesi dell'arcotangente (soluzione ovviamente non percorribile in sede d'esame), che recitano

$$atan(\alpha) + atan(\beta) = atan\left(\frac{\alpha+\beta}{|1-\alpha\beta|}\right)$$

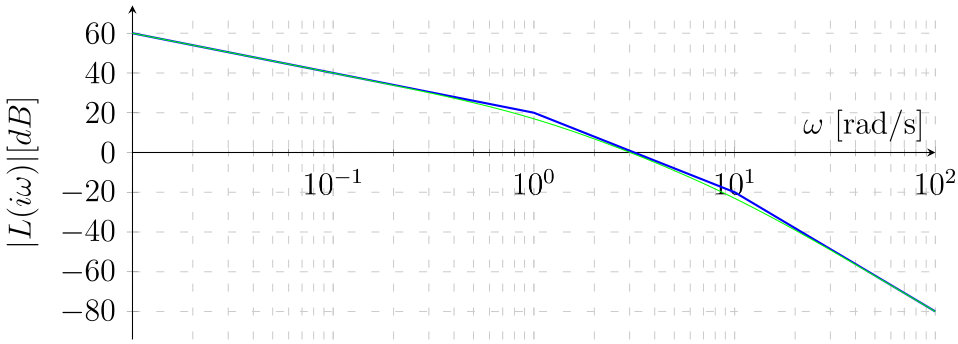
quindi nel nostro caso

$$atan\left(\frac{1.1\omega_c}{|1-0.1\omega_c^2|}\right) = -243.4° \sim atan(2)$$

Da cui, supponendo $\omega_c < 10$ (poi lo verificheremo) otteniamo

$$0.2\omega_c^2 + 1.1\omega_c - 2 = 0 \Rightarrow \omega_c = \frac{-1.1 + \sqrt{1.1^2 + 1.6}}{0.4} = 1.44.$$

A questo punto dobbiamo ricavare μ in modo tale da avere pulsazione di taglio $\omega_c = 1.44$. Per far questo tracciamo il diagramma di Bode della funzione d'anello $L(s)$ com $\mu = 1$, ricordandoci che cambiare μ significa alzare o abbassare il diagramma di Bode di μ_{dB}.



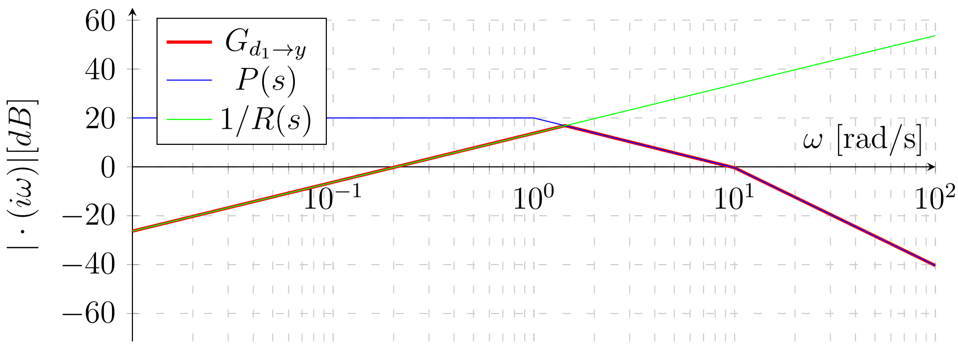
Dal diagramma di Bode leggiamo che se $\mu = 1$ $\omega_c \sim 3$, da cui deduciamo che possiamo alzare ancora il diagramma di Bode se vogliamo massimizzare la pulsazione di taglio. Per sapere di quanto risolviamo la proporzione

$$20 + \mu_{dB} - 40dB/dec(log_{10}(\omega_c)) = 0 \Rightarrow \mu_{dB} = -20 + 40log_{10}(\omega_c) \sim -13.7$$

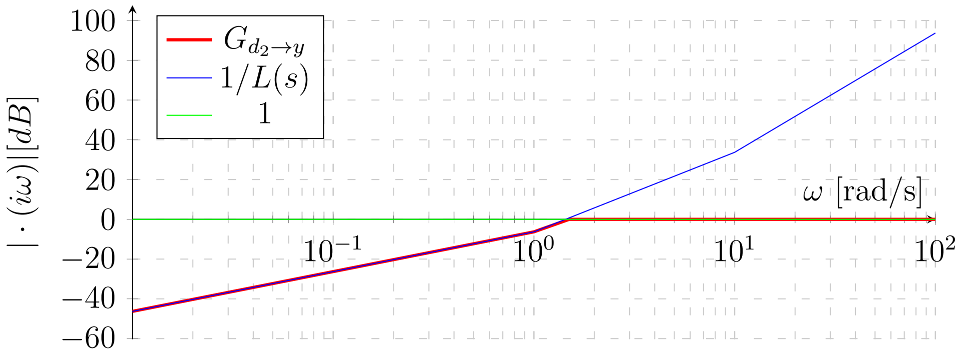
da cui ricaviamo $\mu = 10^{-13.7/20} \sim 0.2$.

Per rispondere alla seconda richiesta, ovvero calcolare l'effetto sull'uscita dei disutbi, dobbiamo calcolare i diagrammi di Bode delle funzioni di trasferimento dai disturbi all'uscita.

Per $G_{d_1 \to y}$, in linea di andata abbiamo il processo $P(s)$, mentre in linea di retroazione abbiamo $R(s)$: $G_{d_1 \to y} = P/(1 + PR)$, e quindi il suo diagramma di Bode si trova scegliendo il minimo tra P e $1/R$



Per $G_{d_2 \to y}$, in linea di andata abbiamo 1, mentre in linea di retroazione abbiamo $L(s)$, quindi il suo diagramma di Bode si trova scegliendo il minimo tra 1 e $1/L$



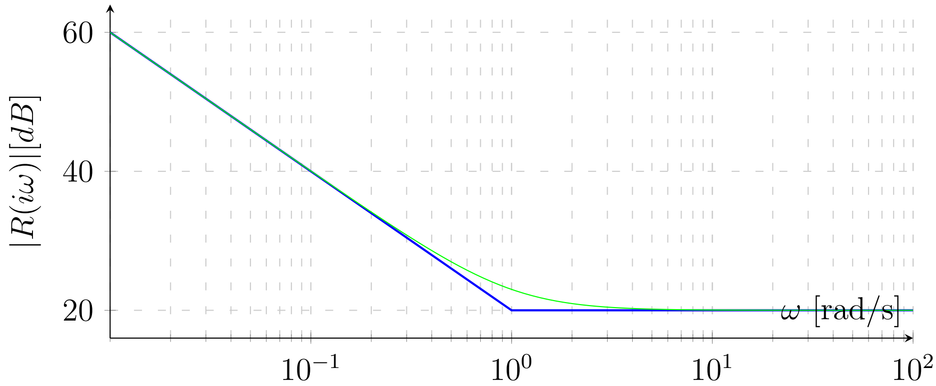
Per cui:

- $\omega = 0$: $y_\infty(t) = 0$, come da progetto i disturbi vengono cancellati
- $\omega = 1$: $|y_\infty(t)| = 4.84 + 0.48$, ovvero il disturbo sul processo viene amplificato, mentre quello sull'uscita viene dimezzato
- $\omega = 10$: $|y_\infty(t)| = 0.1 + 1$, ovvero il disturbo di processo viene decimato (è il passaggio tramite il processo stesso che lo decima!), mentre quello sull'uscita passa inalterato (il nostro controllore non è in grado di rispondere a quelle frequenze)
- $\omega = 100$: $|y_\infty(t)| = 0.001 + 1$, ovvero il disturbo di processo viene ridotto di mille (è il passaggio tramite il processo stesso che lo riduce!), mentre quello sull'uscita passa inalterato (il nostro controllore non è in grado di rispondere a quelle frequenze)

Per rispettare le specifiche richieste al punto 2, ancora una volta il nostro regolatore avrà bisogno di avere un polo nell'origine (nella linea di retroazione c'è $R(s)$, che quindi nel diagramma di Bode di $G_{d_1 \to e}$ viene ribaltato e poi si prende il minimo...) perchè il disturbo d_1 costante venga cancellato. Inoltre, affinchè il sistema retroazionato sia robusto ad un ritardo non modellizzato di $\tau = 0.005$ secondi è necessario che, alla pulsazione di taglio, il margine di fase sia tale da compensare l'effetto del ritardo. Ad esempio, se la pulsazione di taglio del mio regolatore fosse $\omega = 1$, la perdita di fase dovuta al ritardo sarebbe $\omega\tau = 0.005$ rad $= 0.28°$, per cui $\varphi_m > 0.28°$. Infine, se voglio che il disturbo sia sempre attenuato di almeno un decimo, ho bisogno che $1/R(s) < -20dB$.
Mettendo insieme tutti questi ingredienti, un possibile regolatore potrebbe essere

$$R(s) = \frac{10}{s}(1 + s)$$

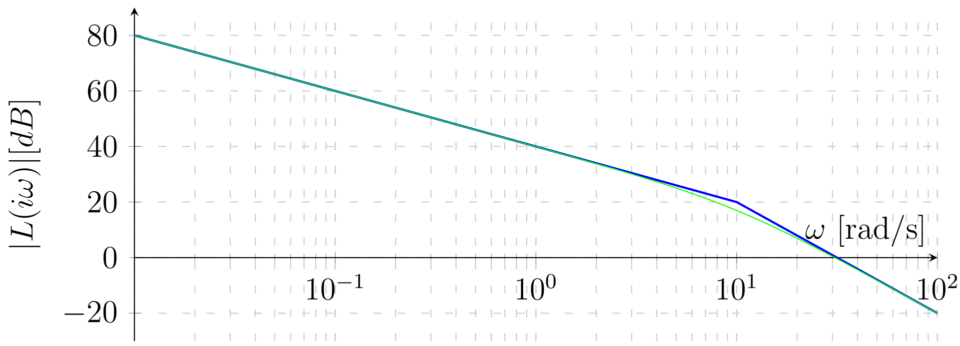
(si noti che è stato utilizzato lo zero del regolatore per cancellare il polo più lento del sistema). Il regolatore proposto sicuramente rispetta i requisiti rispetto alla cancellazione dei disturbi, controlliamo che il sistema retroazionato abbia il margine di fase richiesto, difatti il suo diagramma di Bode è



che è sempre sopra a 20 dB (quindi il suo ribaltato è sempre sotto i 20 dB).

Tracciamo il diagramma di Bode della funzione d'anello

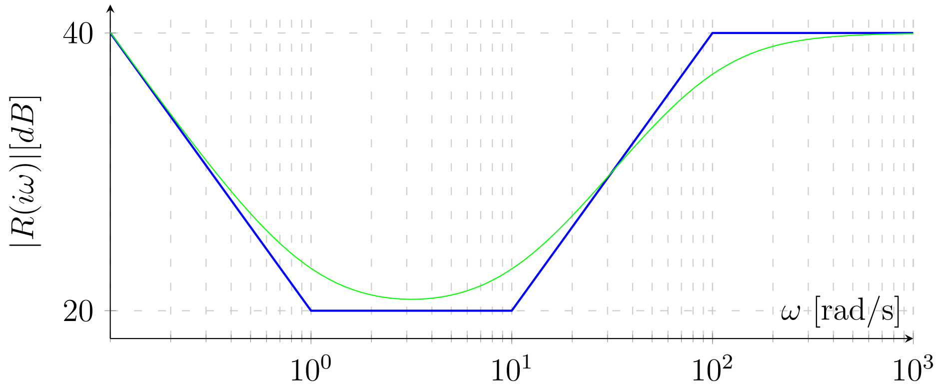
$$L(s) = \frac{100}{s}\frac{1}{1+0.1s}$$



La pulsazione di taglio si può leggere dal diagramma, circa 30 rad/s, e col regolo dell fasi calcoliamo $\varphi(\omega_c) = -90° - 71° = -161° \Rightarrow \varphi_m = 19°$, che non rispetta la specifica $\varphi_m > 30°$.Si noti invece che la specifica dovuta alla robustezza al ritardo è soddisfatta, difatti la fase che perdiamo dovuta al ritardo è $\omega_c\tau = 30\ rad/s\ 0.005\ s = 8.6° < \varphi_m$. Volendo migliorare il margine di fase rispettando il vincolo che il diagramma di Bode del regolatore sia sempre sopra i 20 dB (molto stringente), dobbiamo utilizzare un regolatore con prestazioni migliori, che abbia quindi qualche zero in più in bassa frequenza (e quindi qualche polo in più in alta frequenza).
Avendo due zeri a disposizione, una possibile soluzione è cancellare con il regolatore la dinamica del sistema, ovvero

$$R(s) = \frac{10}{s}\frac{(1+s)(1+0.1s)}{(1+0.01s)}.$$

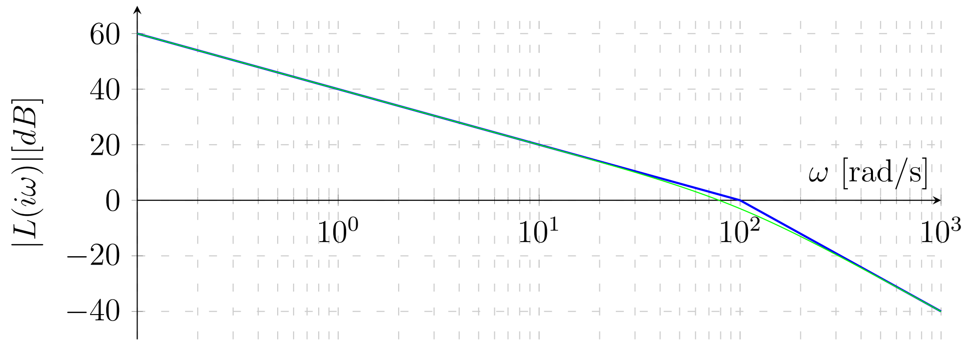
Il diagramma di Bode del regolatore è



che rimane sempre sopra 20 dB, mentre il diagramma di Bode della funzione d'anello, che con questo regolatore diventa

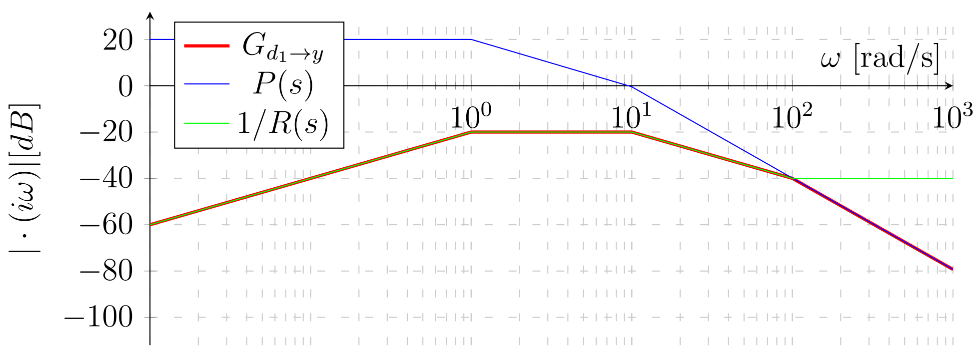
$$L(s) = \frac{100}{s} \frac{1}{(1 + 0.01s)}$$

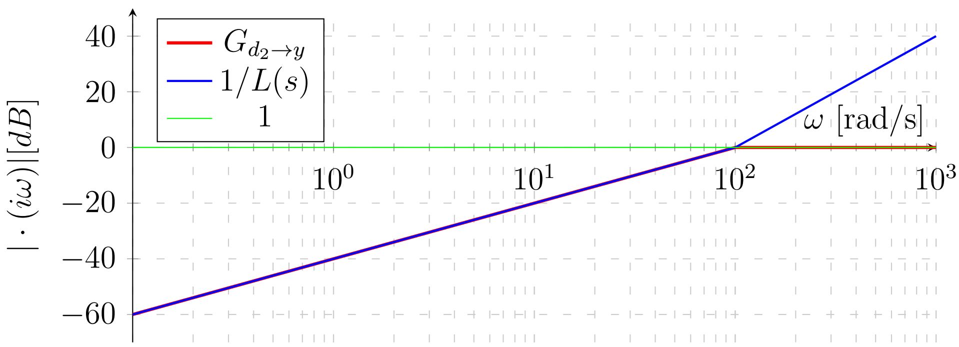
ha diagramma di Bode



per cui $\omega_c = 100$ e $\varphi(\omega_c) = -90° - 45° \Rightarrow \varphi_m = 45° > 30°$. Controlliamo infine che il sistema sia robusto al ritardo: la fase persa a causa del ritardo è $\omega_c\tau = 100\ rad/s\ 0.005\ s = 28.6° < \varphi_m$.

Per rispondere alla seconda richiesta, ovvero calcolare l'effetto sull'uscita dei disutbi, dobbiamo calcolare i diagrammi di Bode delle funzioni di trasferimento dai disturbi all'uscita.





Da cui:

- $\omega = 0$: $y_\infty(t) = 0$, come da progetto i disturbi vengono cancellati
- $\omega = 1$: $|y_\infty(t)| = 0.1{+}0.01$, ovvero il disturbo sul processo viene decimato (come da progetto), mentre quello sull'uscita viene ridotto dal regolatore a 1/100.
- $\omega = 10$: $|y_\infty(t)| = 0.1 + 0.1$, ovvero entrambi i disturbi vengono decimati (si noti che questo regolatore ha prestazioni–e costi– maggiori del precedente)
- $\omega = 100$: $|y_\infty(t)| = 0.001 + 1$, ovvero il disturbo di processo viene ridotto di mille (come prima, è il passaggio tramite il processo stesso che lo riduce!), mentre quello sull'uscita passa inalterato (il nostro controllore non è in grado di rispondere a quelle frequenze)