Risposta in frequenza

Esercizio 1

Un sistema a tempo continuo è descritto dalle matrici

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad d = 0$$

Ipotizzando il sistema inizialmente a riposo, si discuta il comportamento dell'uscita per $t \to \infty$ nel caso in cui l'ingresso applicato a partire da $t = 0$ sia

1. $u(t) = -2$;
2. $u(t) = 10\sin(2t)$;
3. $u(t) = -2 + 10\sin(2t)$.

Calcoliamo anzitutto la funzione di trasferimento del sistema

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + u \\ \dot{x}_2 = x_1 - x_2 \\ y = x_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} sx_1 + x_1 = u \\ sx_2 + x_2 = x_1 \\ y = x_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1}{s+1}u \\ (s+1)x_2 = x_1 \\ y = x_2 \end{cases} \Rightarrow y = \frac{1}{(s+1)^2}u$$

Il sistema ha due poli in -1 (i due autovalori di A) ed è quindi esternamente stabile. Il sistema quindi convergerà effettivamente ad una uscita di regime.

Se $u = -2$ il sistema convergerà ad una soluzione costante di valore

$$y_\infty(t) = G(0) \cdot -2 = -2$$

Se $u = 10\sin(2t)$, utilizzando il teorema della risposta in frequenza, otteniamo

$$y_\infty(t) = |G(i2)| 10 \sin(2t + arg(G(i2)))$$

$$G(i2) = \frac{1}{(1+2i)^2} = \frac{1}{4i-3} = \frac{1}{4i-3}\frac{4i+3}{4i+3} = -\frac{3}{25} - \frac{4}{25}i$$

da cui ricaviamo

$$|G(i2)| = \frac{1}{25}\sqrt{3^2+4^2} = \frac{1}{5} \qquad arg(G(i2)) = \text{atan}\left(\frac{4}{3}\right) = 0.9273 \sim 53°$$

Quindi l'uscita a regime del sistema sarà

$$y_\infty(t) = 2\sin(2t + 53°) = 2\sin(2t - 127°).$$

Lo stesso risultato poteva essere ottenuto senza bisogno di passare dalla razionalizzazione ricordando la forma esponenziale dei numeri complessi:

$$z_i = |z_i|e^{iarg(z_i)} \qquad \Rightarrow \frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|e^{iarg(z_1)}}{|z_2|e^{iarg(z_2)}} = \frac{|z_1|}{|z_2|}e^{i(arg(z_1)-arg(z_2))}$$

da cui ricaviamo

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}, \quad arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = arg(z_1) - arg(z_2), \text{ e } arg(z_1^2) = 2arg(z_1)$$

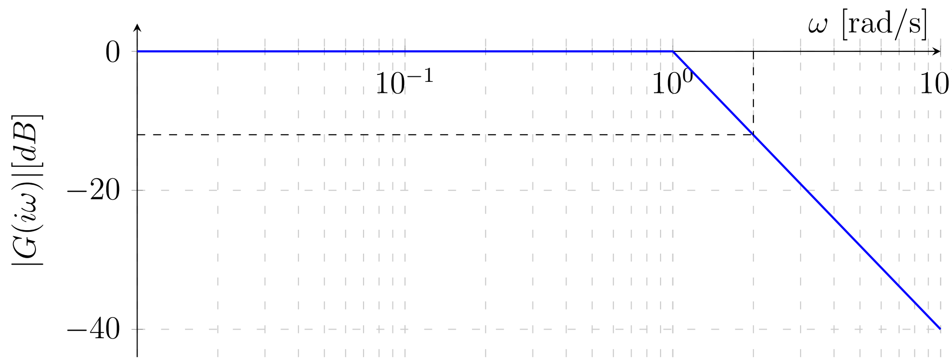
che nel nostro caso ci permette di ricavare

$$G(i2) = \frac{1}{(1+2i)^2} \Rightarrow |G(i2)| = \frac{|1|}{|1+2i|^2} = \frac{|1|}{(\sqrt{4+1})^2} = \frac{1}{5},$$
$$arg(G(i2)) = arg(1) - 2arg(1+2i) = 0 - 2\text{atan}(2) \sim -127°$$

Se $u = -2 + 10\sin(2t)$, utilizziamo la sovrapposizione degli effetti, per cui

$$y_\infty(t) = -2 + 2\sin(2t - 127°)$$

Si noti che i risultati che abbiamo ottenuto potevano essere ricavati anche tramite il tracciamento del diagramma di Bode del modulo. Nel caso in esame ci sono solo 2 poli in -1, per cui in bassa frequenza l'unico termine rilevante sarà il guadagno statico: il diagramma di Bode parte con pendenza 0 dB/dec al valore di guadagno (1) fino a $\omega = 1$, per poi iniziare a scendere di 40 dB/dec.



Per il calcolo della fase invece l'utilizzo del diagramma di Bode è troppo approssimativo, quindi, dopo aver riscritto la funzione di trasferimento come

$$G(s) = \frac{\mu}{s^g}\frac{\Pi_i(1+s\tau_i)}{\Pi_j(1+sT_l)}$$

possiamo ricorrere alla formula

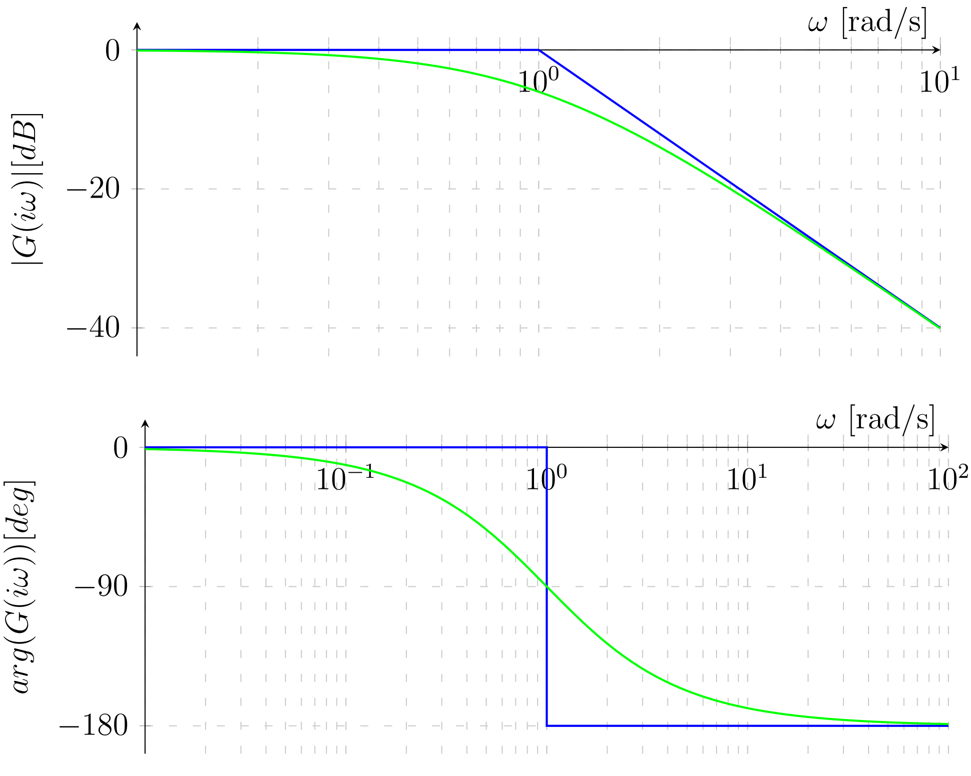
$$\varphi(\omega) = arg(\mu) - g\frac{\pi}{2} + \sum_i \text{atan}(\omega\tau_i) - \sum_j \text{atan}(\omega T_j)$$

Si noti che nel caso di poli e zeri instabili (τ_i o T_j negativi), il loro contributo alla fase è uguale in modulo ma di segno opposto (l'arcotangente è una funzione dispari!).

Nel nostro caso quindi otteniamo dal diagramma di bode del modulo che il segnale costante ($\omega = 0$) passa con guadagno unitario, mentre il segnale a pulsazione $\omega = 2$ ha uno smorzamento di circa -12 dB, da cui il guadagno

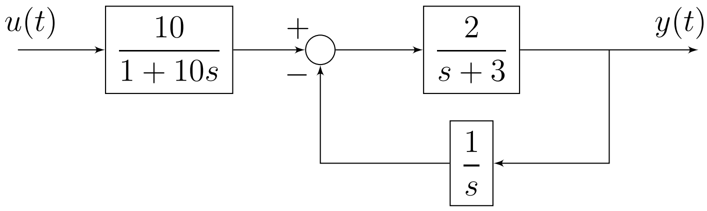
$$|G(i2)| = -12dB = 10^{-12/20} \sim 1/4.$$

Si noti che anche il diagramma di Bode asintotico del modulo ci da un risultato approssimato, poichè la pulsazione che stiamo andando ad analizzare è a meno di una decade di distanza rispetto ai poli. Di seguito sono riportati in verde i diagrammi di Bode reali, per capire al meglio questa differenza.



Esercizio 2

Si consideri il sistema:



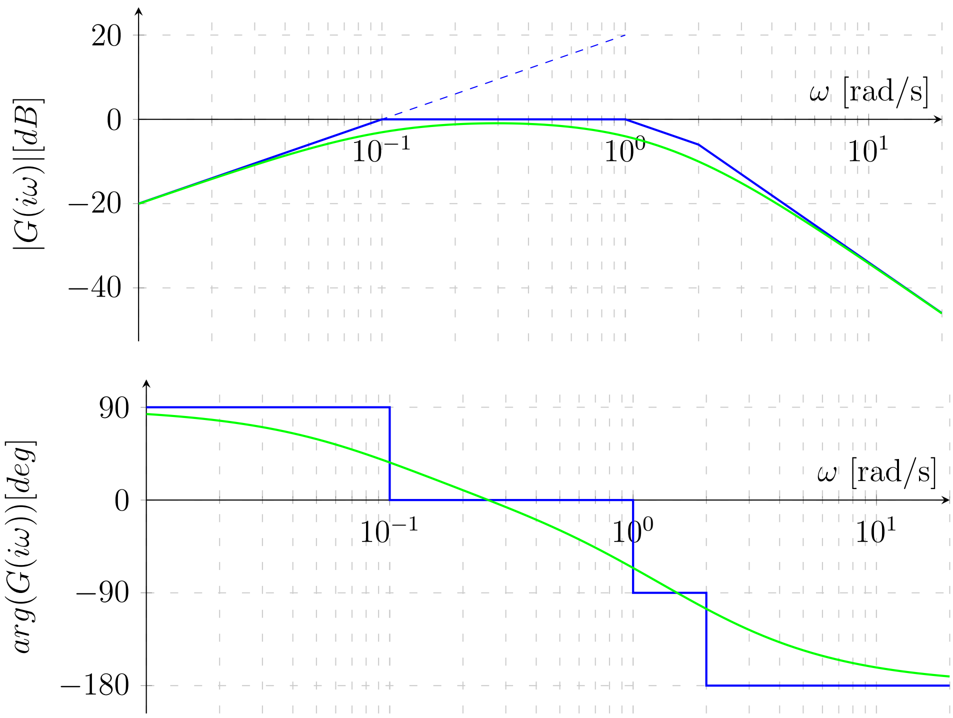
Si traccino i diagrammi di Bode di modulo e fase e si dica quanto vale approssimativamente l'uscita se l'ingresso vale $u(t) = -5 + 20\cos(t)$. Si verifichino poi i risultati ottenuti tramite il teorema della risposta in frequenza.

Calcoliamo anzitutto la funzione di trasferimento del sistema

$$G(s) = \frac{10}{1+10s} \cdot \frac{\frac{2}{s+3}}{1 + \frac{1}{s}\,\frac{2}{s+3}} = \frac{10s}{(1+10s)(1+s)(1+s/2)}$$

Il sistema ha uno zero nell'origine. Per tracciare il diagramma di Bode del modulo dobbiamo approssimare la funzione di trasferimento per ω piccole alla funzione con il solo zero nell'origine e lo stesso guadagno generalizzato (funzione di trasferimento in bassa frequenza), e poi utilizzare le solite regole di tracciamento.

Il diagramma che si ottiene è



All'ingresso $u(t) = -5 + 20\cos(t)$ otterremo un'uscita di regime poichè i poli del sistema sono $p = \{-0.1, -1, -2\}$ stabili. Possiamo quindi applicare il teorema della risposta in frequenza ottenendo

$$y_\infty(t) = -5G(0) + |G(i)| 20 \cos(t + arg(G(i)))$$

Dal diagramma di Bode otteniamo:

$$G(0) = 0, \quad |G(i)| = 1, \quad arg(G(i)) = 0.$$

Se invece li calcolassimo correttamente otterremmo il medesimo guadagno e ad $\omega = 1$

$$|G(i)| = \left| \frac{10i}{(1+10i)(1+i)(1+i/2)} \right| = \frac{10}{\sqrt{1+100}\sqrt{1+1}\sqrt{1+1/4}} \sim 0.63,$$
$$arg(G(i)) = 90^\circ - \mathrm{atan}(10) - \mathrm{atan}(1) - \mathrm{atan}(1/2) = 90^\circ - 84^\circ - 45^\circ - 26^\circ = -65^\circ$$

da cui otteniamo come uscita a regime

$$y_\infty(t) = 12.5\cos(t - 65^\circ).$$

Si noti come l'approssimazione del diagramma di Bode asintotico (soprattutto per la fase) non è particolarmente buona: biò è dovuto al fatto che stiamo calcolando modulo e fase vicino (anzi proprio) ad una delle pulsazioni del sistema.

Esercizio 3

Si traccino i diagrammi di Bode di modulo e fase del sistema

$$G(s) = \frac{10+s}{(10s^2+0.1s+10)(1+10s)}.$$

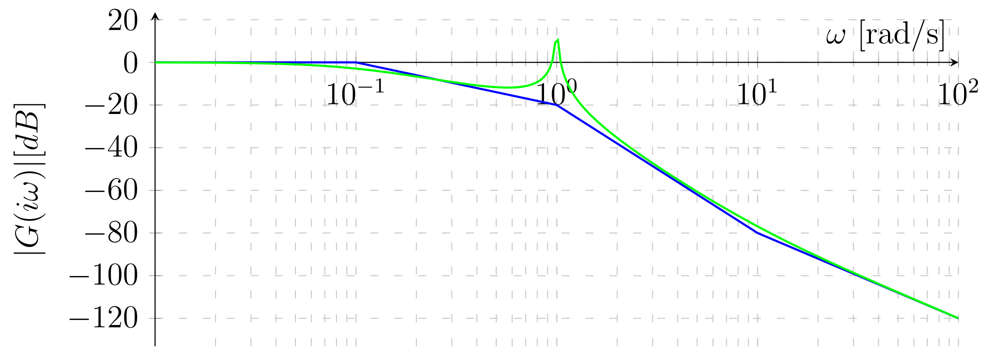
Si calcolino quindi la risposta allo scalino del sistema e l'uscita a regime con ingresso $u(t) = 10\sin(t)$.

Per disegnare i diagrammi di Bode di questo sistema riscriviamo anzitutto la funzione di trasferimento in forma standard

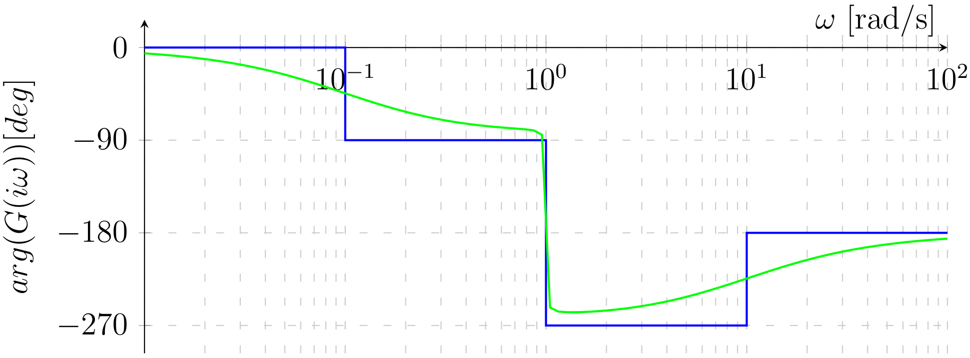
$$G(s) = \frac{1+s/10}{(1+10s)} \cdot \frac{1}{s^2+2\cdot 0.005\cdot 1s+1}.$$

Il diagramma di Bode del modulo del sistema partirà quindi ad $\omega = 0$ al valore del guadagno (1), poi incontrerà il polo reale a $\omega = 0.1$ e quindi inizierà a scendere di -20 dB/dec, poi inconterà i due poli complessi alla pulsazione naturale $\omega_n = 1$ e la pendenza scenderà di altri 40 dB/dec, e infine incontrerà lo zero a $\omega = 10$ e la pendenza risalirà di 20 dB/dec.

Si noti inoltre che i poli complessi coniugati hanno uno smorzamento molto piccolo ($\xi = 0.005$), e quindi ci sarà un picco di risonanza a $\omega_r = \omega_n\sqrt{1-2\xi^2} \sim \omega_n$ molto alto (l'errore che commettiamo alla pulsazione naturale è dell'ordine di $1/2\xi = 100$, quindi se il diagramma di Bode asintotico ci dice che il segnale a ω_n è ridotto di 10, in realtà è amplificato di 10!).



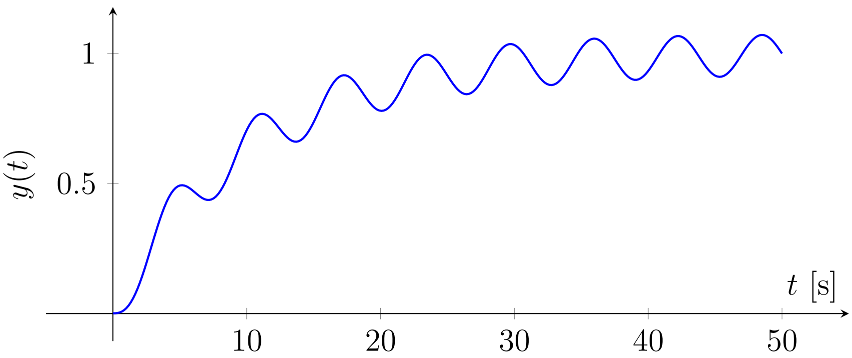
Il diagramma di Bode della fase del sistema partirà con fase nulla essendo il guadagno positivo, poi incontrerà il polo reale a $\omega = 0.1$ e quindi la fase scenderà a $-90°$, poi inconterà i due poli complessi alla pulsazione naturale e la fase scenderà di altri 180°, e infine incontrerà lo zero stabile a $\omega = 10$ e la fase risalirà di 90°.



Per la risposta allo scalino notiamo che

1. I poli sono $\{-1/10, -0.005 \pm i\}$, tutti a parte reale negativa $\Rightarrow$ Il sistema è asintoticamente stabile.
2. $\lambda_D = -0.005 \pm i20 \Rightarrow T_D = 200s \Rightarrow T_R = 1000s$.
3. $r = 2 \Rightarrow y(0) = 0$, $\dot{y}(0) = 0$, $\ddot{y}(0) = 1000 > 0$.
4. $G(0) = 1$.
5. I poli sono complessi coniugati $\Rightarrow$ Oscillazioni persistenti con pulsazione pari a $\omega_o = 20$ (di periodo $2\pi/1 \sim 6s$).

La risposta allo scalino del sistema sarà quindi (mostriamo i primi 50 s, le oscillazioni poi si smorzeranno una volta arrivati a T_R)



Si noti come per la risposta allo scalino sia importante ω_o, la pulsazione delle osclazioni del sistema. Ricordiamo che ω_o è la parte immaginaria degli autovalori del sistema, e può essere quindi dedotta come $\omega_o = \omega_n\sqrt{1-\xi^2}$.

Infine, l'uscita a regime con ingresso $u(t) = 10\sin(t)$, essendo il sistema asintoticamente stabile, si calcola con il teorema della risposta in frequenza,

$$y(t) = |G(i)|10\sin(t + arg(G(i))).$$

La pulsazione che stiamo considerando è una delle pulsazioni dove il nostro diagramma di Bode asintotico sbaglia maggiormente: difatti, come già detto, sappiamo che l'errore nel modulo a $\omega = \omega_n$ è $1/2\xi = 100$, e che l'errore della fase (essendo gli altri poli e zeri distanti una decade) sarà di $2 \cdot -45°$

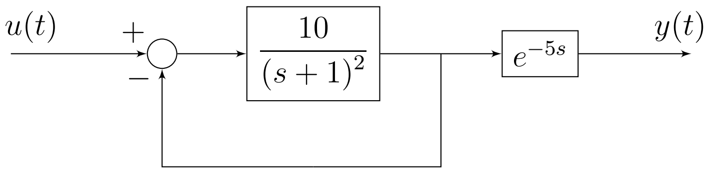
$$|G(i)| = 100 \cdot 0.1 = \left| \frac{1 + i/10}{(1 + 10i)(0.01i)} \right| = 10, \quad arg(G(i)) = -90 - 2 \cdot 45 = -180.$$

L'uscita a regime è quindi

$$y_\infty(t) = 100 \sin(t - 180°).$$

Esercizio 4

Si consideri il sistema:



1. Determinare la funzione di trasferimento complessiva.
2. Disegnare il diagramma di Bode del modulo.
3. Determinare qualitativamente l'andamento dell'uscita per l'ingresso $u(t) = 1 + 2\sin(0.1t)$.

La funzione di trasferimento del secondo blocco è un ritardatore puro. L'entità del ritardo è pari all'opposto del coefficiente di s, dunque $5s$.
La funzione di trasferimento complessiva la calcoliamo con le regole di retroazione e cascata:

$$G_{TOT} = \frac{\frac{10}{(s+1)^2}}{1 + \frac{10}{(s+1)^2}} e^{-5s} = \frac{10}{s^2 + 2s + 11} e^{-5s} = G_1(s)e^{-5s}$$

Analizziamo anzitutto l'effetto del ritardatore nella risposta in frequenza. Nel caso del modulo notiamo che

$$|G_{TOT}(i\omega)| = |G_1(i\omega)e^{-5i\omega}| = |G_1(i\omega)| \cdot |e^{-5i\omega}| = |G_1(i\omega)|,$$

quindi il ritardatore non cambia il modulo del segnale (cosa che ci aspettavamo, visto che l'unico effetto è quello di ritardare l'uscita di $5s$). Nel calcolo della fase invece

$$arg(G_{TOT}(i\omega)) = arg(G_1(i\omega)e^{-5i\omega}) = arg(G_1(i\omega)) + arg(e^{-5i\omega}) = arg(G_1(i\omega)) - 5\omega,$$

ovvero se dobbiamo aspettare $5s$ per ottenere l'uscita, la fase che perdiamo in questo modo è $5s \cdot \omega$, la velocità del nostro segnale.

In definitiva, il ritardatore pure $e^{-\tau s}$ non ha effetto sul modulo della risposta in frequenza, mentre aggiunge uno sfasamento $-\tau\omega$ (ritardo) alla fase.

Volendo disegnare il diagramma di Bode del modulo, ci concentriamo quindi sulla funzione di trasferimento G_1. Essa ha poli

$$p_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1 - 11} = -1 \pm i\sqrt{10}$$

complessi coniugati, e quindi dobbiamo riscriverla in forma canonica

$$G_1(s) = \frac{10}{s^2 + 2s + 11} = \frac{10}{11} \cdot \frac{11}{s^2 + 2\frac{1}{\sqrt{11}}\sqrt{11}s + 11} = \mu\frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n + \omega_n^2}$$

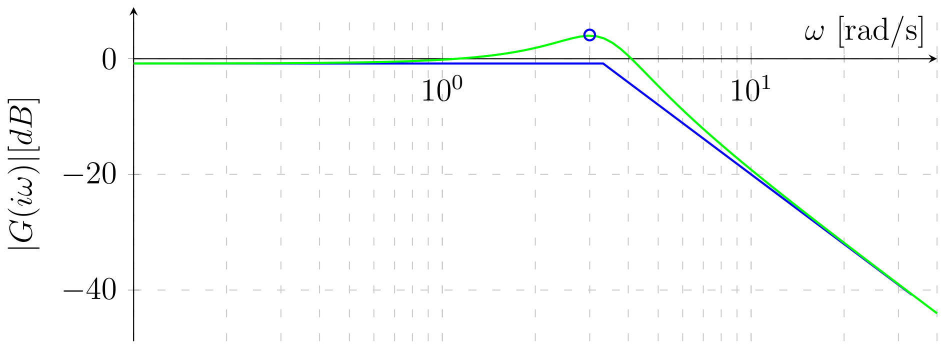
con $\mu = 10/11$, $\omega_n = \sqrt{11} \sim 3.3$ e $\xi = 1/\sqrt{11} \sim 0.3$. Il diagramma di Bode del modulo sarà quindi piatto al valore del guadagno μ prima di ω_n, e da lì inizierà a scendere di 40 dB/dec. Si noti che lo smorzamento è piccolo, quindi ci aspettiamo un picco di risonanza in

$$\omega_r = \omega_n \sqrt{1 - 2\xi^2} \sqrt{11} \sqrt{9/11} = 3$$

Il valore assunto al picco di risonanza è

$$|G(i3)| = |\frac{10}{(3i)^2 + 2(3i) + 11}| = \frac{10}{|2 + 6i|} \sim 1.6 \sim 5dB.$$

Possiamo quindi disegnare il diagramma di Bode approssimato del modulo (in verde l'andamento effettivo)



Essendo il sistema asintoticamente stabile (i poli del sistema hanno tutti parte reale negativa), per calcolare la risposta asintotica del sistema all'ingresso $u(t) = 1 + 2\sin(0.1t)$ possiamo utilizzare il teorema della risposta in frequenza

$$y(t) = G_{TOT}(0) + |G_{TOT}(0.1i)| 2 \sin(0.1t + arg(G_{TOT}(0.1i))$$

Per il modulo utilizziamo il diagramma di Bode appena prodotto (visto che $\omega = 0.1$ è ben distante dalla pulsazione naturale dei poli), ottenendo che

$$G_{TOT}(0) \sim |G_{TOT}(0.1i)| \sim 1$$

Per la fase, ricordiamo che

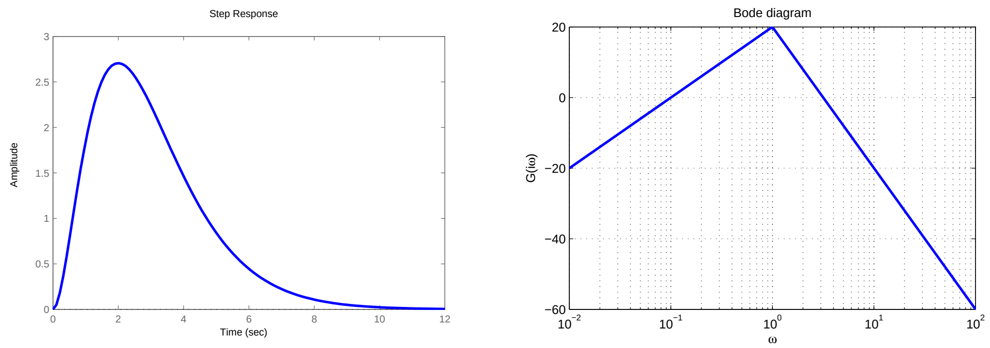
$$arg(G_{TOT}(i\omega)) = arg(G_1(i\omega)) - 5\omega.$$

La perdita di fase dovuta ai due poli complessi coniugati è trascurabile, poichè siamo a due decadi prima della loro pulsazione naturale. La perdita di fase invece dovuta al ritardo è di $0.5 rad \sim 30°$. Per cui l'uscita del sistema sarà

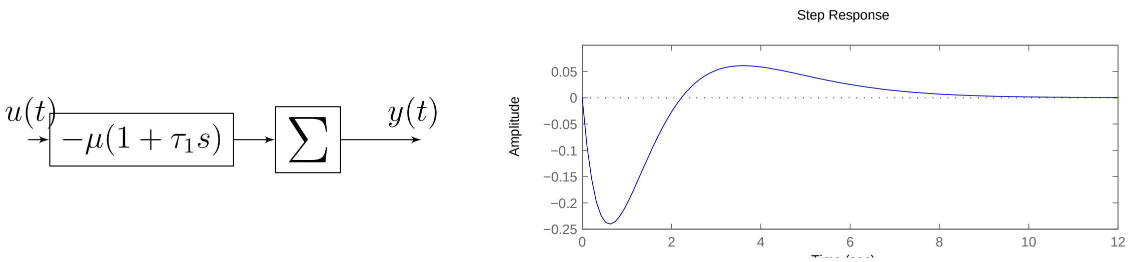
$$y_\infty(t) = 1 + 2\sin(0.1t - 30°)$$

Esercizio 5

Un sistema Σ ha risposta allo scalino unitario e diagramma di Bode approssimato rappresentati in figura:



Determinare una possibile funzione di trasferimento compatibile con i due diagrammi. Il sistema Σ viene poi collegato in cascata con un nuovo sistema, ottenendo lo schema a blocchi in figura (pannello sinistro). Determinare $\mu > 0$ e τ_1 del nuovo sistema affinchè il sistema aggregato abbia risposta allo scalino presentata nel pannello destro (si noti che $\dot{y}(0) = -1$) e tracciare i diagrammi di Bode dell'aggregato.



Analizzando il solo diagramma di Bode del modulo, possiamo dedurre che il sistema ha uno zero nell'origine (la pendenza in bassa frequenza è 20 dB/dec), che il guadagno generalizzato del sistema è 10 (il valore assunto a $\omega = 1$), e che a $\omega = 1$ tale pendenza passa a -40 dB/dec. La perdita di pendenza sappiamo essere dovuta alla presenza di poli stabili o instabili. Guardando la risposta allo scalino ci accorgiamo che essa non diverge: il sistema è asintoticamente stabile, e la sua funzione di trasferimento è quindi:

$$G_1(s) = \frac{10s}{(s+1)^3},$$

La funzione di trasferimento dell'aggregato sarà quindi:

$$G = -10\mu \frac{(s\tau_1 + 1)s}{(s+1)^3}$$

Volendo la risposta allo scalino proposta, notiamo che

1. Il sistema converge, infatti non stiamo cambiandone i poli.

2. T_R è rimasto come quello di prima, sempre per lo stesso motivo.

3. $y(0) = 0$, $\dot{y}(0) = -1, \Rightarrow r = 1, -10\mu\tau_1 = -1$, quindi $\mu\tau_1 > 0$, ed essendo $\mu > 0$ dovrà essere $\tau_1 > 0$ (lo zero è "stabile").

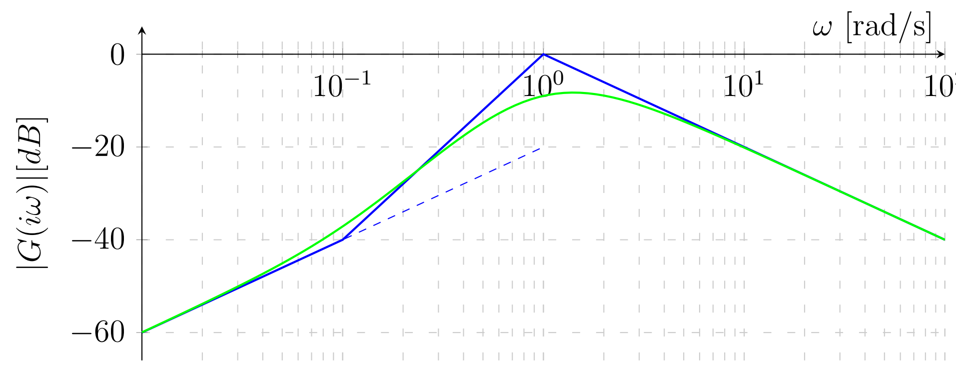
4. $\lim_{t\to\infty} y(t) = 0 \Rightarrow G(0) = 0$, difatti c'è uno zero nell'origine.

5. $N = 2, m_s \geq 1 \Rightarrow m_s = 2, \delta = 0$, poichè se lo zero che inseriamo non fosse superiore, il numero di massimi sarebbe dispari.

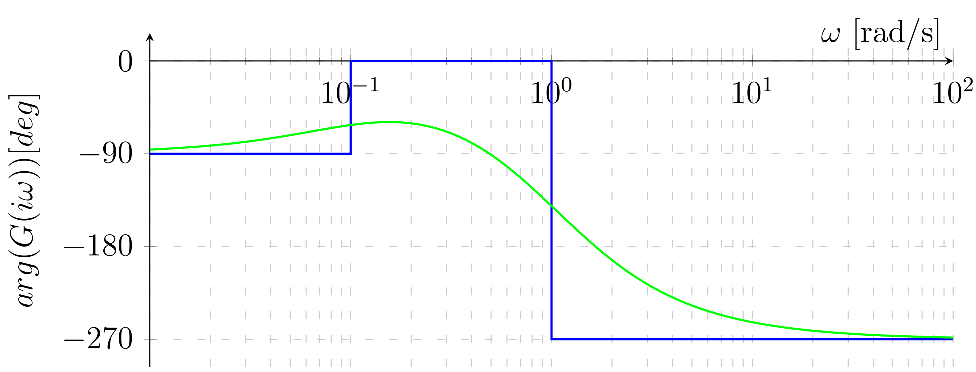
Dobbiamo quindi collocare lo zero a bassa frequenza, in modo che sia superiore. Scegliamo di metterlo ad esempio ad $\omega = 0.1$, quindi $\tau_1 = 10$ e $\mu = 0.01$. La funzione di trasferimento sarà quindi

$$G = -0.1\frac{(10s+1)s}{(s+1)^3}$$

Possiamo quindi tracciare il diagramma di Bode: avendo uno zero nell'origine, a basse frequenze gli altri poli hanno un effetto trascurabile, e quindi il sistema si comporta come $-0.1s$. Utilizzando poi le solite regole (incontriamo prima uno zero, quindi la pendenza passa da 20 db/dec a 40 db/dec, poi incontriamo 3 poli coincidenti, quindi la pendenza passa a -20 db/dec), riusciamo a tracciare l'intero diagramma di Bode del modulo.



Per il diagramma di Bode della fase, notiamo anzitutto che il guadagno dell'aggregato è negativo, (fase $-180°$) e abbiamo poi uno zero nell'origine (guadagniamo 90° di fase, quindi partiamo con fase -90°), incontriamo un'altro zero "stabile" a $\omega = 0.1$, quindi la fase sale a 0°, e poi riscende a $-270°$ incontrati i tre poli a $\omega = 1$.



Esercizio 7

Un sistema elettrico è sottoposto a prove per ricavarne la funzione di trasferimento. Le prove consistono nell'applicare una tensione di ingresso $v_{in}(t)$ e nel rilevare la corrispondente tensione d'uscita $v_{out}(t)$.

- Prova statica: applicando uno scalino $v_{in}(t) = \bar{v}\text{sca}(t)$, l'uscita $v_{out}(t)$ tende al valore di regime $10\bar{v}$ qualunque sia il valore $\bar{v}$.

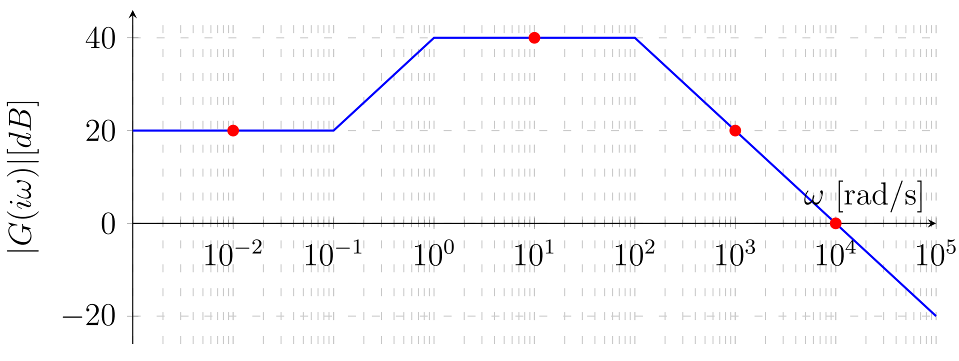
- Prova in regime sinusoidale: applicando ingressi sinusoidali di ampiezza unitaria ed aventi varie pulsazioni ω (cioè $v_{in}(t) = \sin(\omega t)$), si sono rilevate l'ampiezza e lo sfasamento dell'uscita a transitorio esaurito ($v_{out}(t) = V \sin(\omega t + \varphi)$):

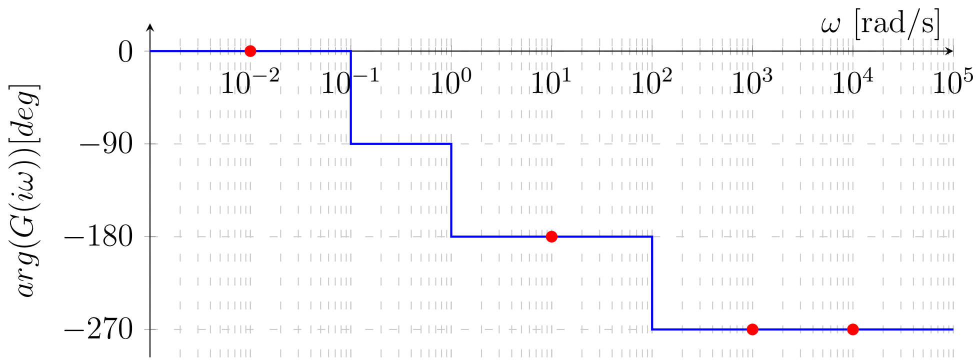
ω	0.01	10	1000	10 000
V	10	100	10	1
φ	0°	-180°	-270°	-270°

1. Determinare una funzione di trasferimento tra tensione d'ingresso e tensione d'uscita compatibile con i risultati delle prove.

2. Determinare qualitativamente la risposta allo scalino del sistema, discutendo in particolare il tempo di risposta.

Anzitutto cerchiamo di costruire i diagrammi di Bode compatibili con le informazioni che ci sono state date. Notiamo che le fasi sono tutte multipli di 90°: utilizziamo questa informazione per piazzare i poli (in modo che il diagrammi di Bode effettivo - non quello asintotico - della fase passi vicino ai punti misurati). Inoltre sappiamo, dal risultato della risposta allo scalino, che il guadagno statico del sistema è 10 (quindi non ho poli o zeri nell'origine): il diagramma di Bode dovrà partire a 20 dB. Un possibile diagramma di Bode è quindi





da cui ricaviamo la funzione di trasferimento

$$G(s) = 10\frac{1 - 10s}{(1 + s)(1 + 0.01s)}$$

Per la risposta allo scalino analizziamo i soliti 5 punti:

1. I poli sono stabili $\Rightarrow$ Il sistema è asintoticamente stabile.
2. $p_D = -1 \Rightarrow T_D = 1 \Rightarrow T_R = 5s$.
3. $r = 1 \Rightarrow y(0) = 0$, $\dot{y}(0) = -10000$.
4. $G(0) = 10$.
5. $m_s = 1$, $\delta = 0 \Rightarrow N = 1$.

quindi la risposta allo scalino del sistema sarà