Risposte Canoniche 2

Esercizio 1

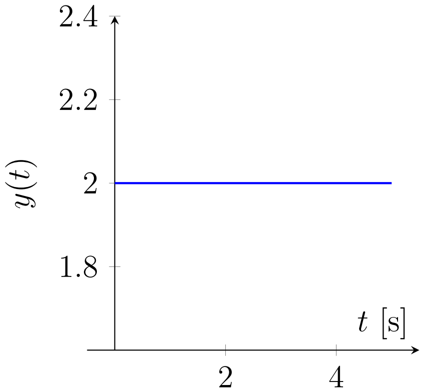
Ricavare la funzione di trasferimento di una rete idrica composta da due serbatoi in cascata con costanti di svuotamento $k_1 = 5s^{-1}$ e $k_2 = 10s^{-1}$, in cui l'ingresso entra nel primo serbatoio e l'uscita del sistema è l'uscita del secondo serbatoio. Si disegni poi qualitativamente l'uscita nel caso in cui all'ingresso all'istante 0 venga applicato per la durata $T = 2s$ secondi un flusso costante di portata $U = 2m^3/s$.

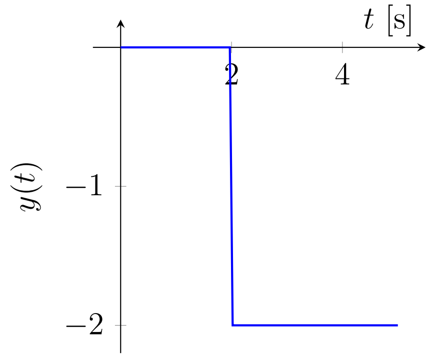
Ricaviamo anzitutto il modello ingresso-uscita del sistema:

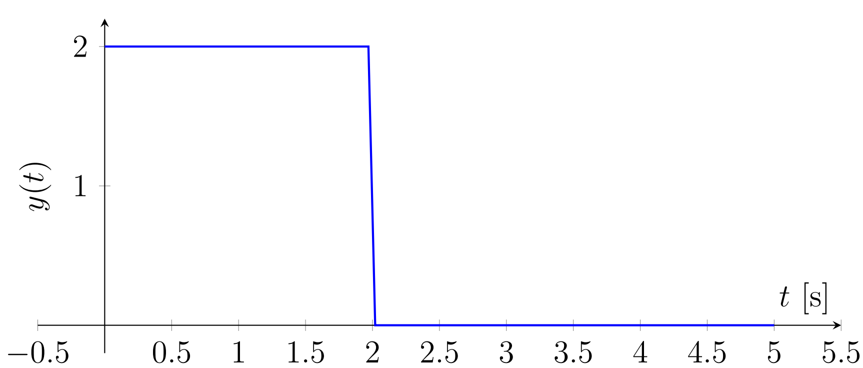
$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= u - k_1 x_1 \\ \dot{x}_2 &= k_1 x_1 - k_2 x_2 \\ y &= k_2 x_2 \end{cases} \qquad \Rightarrow G(s) = \frac{k_1 k_2}{(s + k_1)(s + k_2)}$$

Notiamo poi che l'ingresso proposto non è altro che la somma di due scalini

$$u(t) = Usca(t) - Usca(t - T)$$





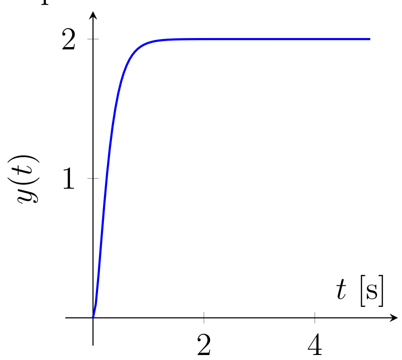


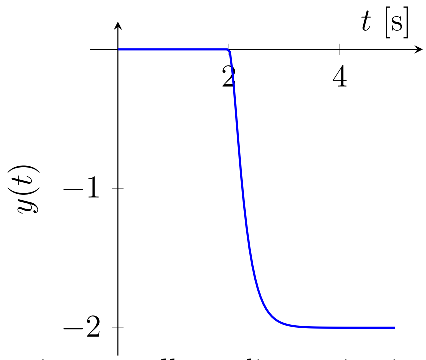
La risposta del sistema sarà quindi la somma di due risposte allo scalino (moltiplicate per le opportune ampiezze).

Utilizziamo le solite regole per capire come sarà la risposta allo scalino:

1. I poli sono stabili $\Rightarrow$ Il sistema non diverge.
2. $\lambda_D = -k_2 = -5 \Rightarrow T_D = \frac{1}{5} \Rightarrow T_R = 1s$.
3. $r = 2 \Rightarrow y(0) = 0$, $\dot{y}(0) = 0$, $\ddot{y}(0) = k_1 k_2 > 0$.
4. $G(0) = 1$.
5. $m_s = 0, \delta = 0 \Rightarrow N = 0$.

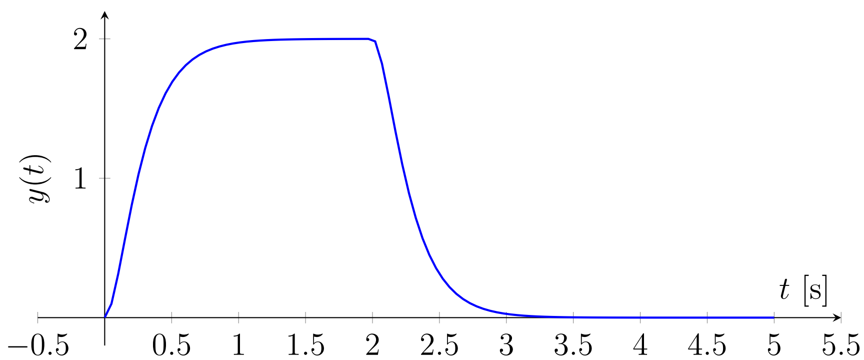
La risposta ai due scalini del sistema a riposo sarà quindi:





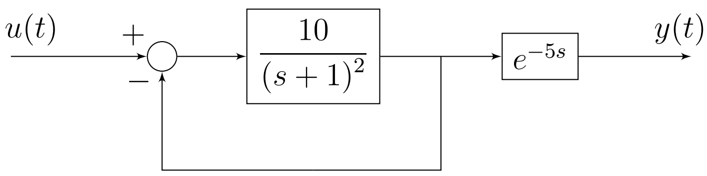
Si noti che le due risposte sono dedotte dalla risposta allo scalino unitario grazie alla linearità (moltiplicando per una costante l'ingresso, l'uscita viene moltiplicata per la medesima costante). In particolare, si noti che i risultati derivanti dal teorema del valore iniziale e finale (punti 3 e 4) seguno anch'essi questa regola. Se il sistema in risposta allo scalino unitario converge al guadagno del sistema, in risposta allo scalino di ampiezza α convergerà ad α volte il guadagno del sistema. De la derivata seconda della risposta allo scalino unitario all'istante iniziale ha un determinato valore, essa avrà tale valore moltiplicato per α qual'ora in ingresso sia applicato uno scalino di ampiezza α.

Sovrapponendo gli effetti delle due soluzioni si ottiene quindi:



Esercizio 2

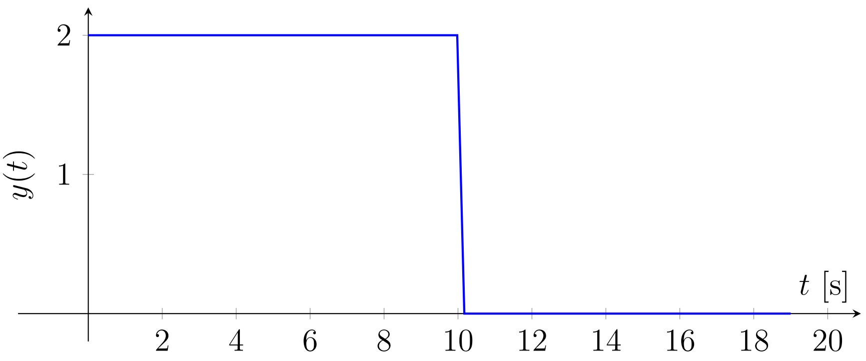
Si consideri il sistema descritto dal seguente diagramma a blocchi



a) Determinare la funzione di trasferimento complessiva

b) Discutere la stabilità esterna del sistema

c) Determinare (qualitativamente) l'andamento di $y(t)$ quando l'ingresso è la funzione rappresentata nella figura seguente



La funzione di trasferimento del secondo blocco è un ritardatore puro. L'entità del ritardo è pari all'opposto del coefficiente di s, dunque $5s$.
La funzione di trasferimento complessiva la calcoliamo con le regole di retroazione e cascata:

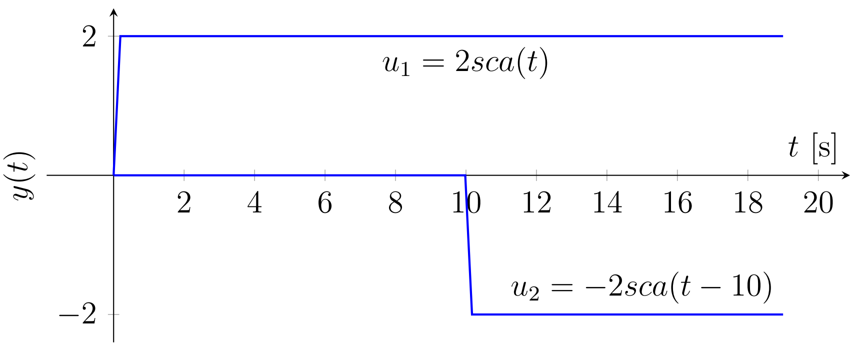
$$G_{TOT} = \frac{\frac{10}{(s+1)^2}}{1+\frac{10}{(s+1)^2}}e^{-5s} = \frac{10e^{-5s}}{s^2+2s+11}$$

Il ritardatore non influenzerà la stabilità esterna del sistema, ma causerà semplicemente un ritardo di $5s$ sulle uscite. La stabilità esterna del sistema è quindi riconducibile alla stabilità dei poli di G_{TOT}

$$p_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1-11} = -1 \pm i\sqrt{10}$$

L'ingresso è non canonico, ma può essere ottenuto come sovrapposizione di due scalini di ampiezza 2

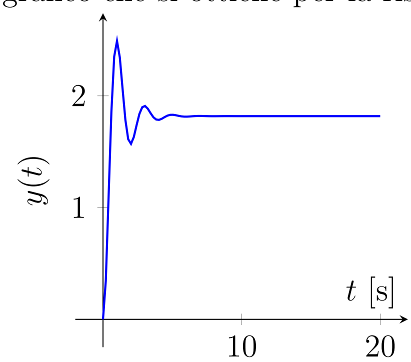
$$u(t) = 2sca(t) - 2sca(t-10)$$

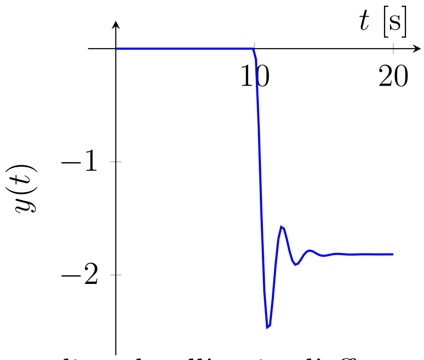


La risposta del sistema sarà quindi la sovrapposizione delle risposte ai due ingressi canonici. Il blocco del ritardatore ha come unico effetto quello di ritardare (di 5 unità di tempo) l'uscita che si registra dalla prima parte. Per la risposta allo scalino dela prima parte del sistema:

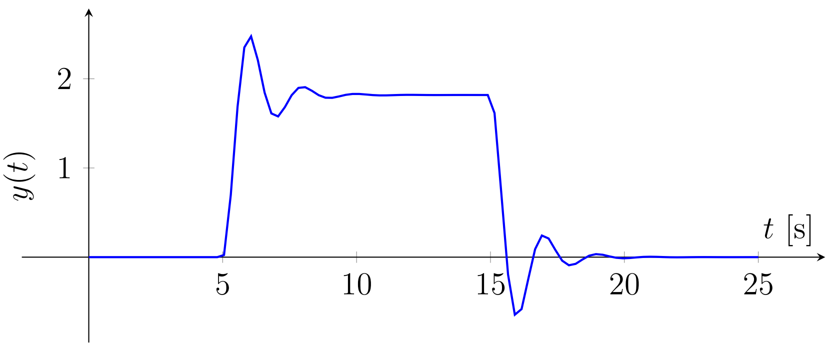
1. I poli sono stabili $\Rightarrow$ Il sistema non diverge.
2. $\lambda_D = -1 \Rightarrow T_D = 1 \Rightarrow T_R = 5s$.
3. $r = 2 \Rightarrow y(0) = 0$, $\dot{y}(0) = 0$, $\ddot{y}(0) = 10 > 0$.
4. $G(0) = 20/11$.
5. I poli sono complessi coniugati $\Rightarrow$ Oscillazioni persistenti con pulsazione pari a $\sqrt{10}$ (di periodo $2\pi/\sqrt{10} \sim 2$.

Il grafico che si ottiene per la risposta ai due scalini è quindi:



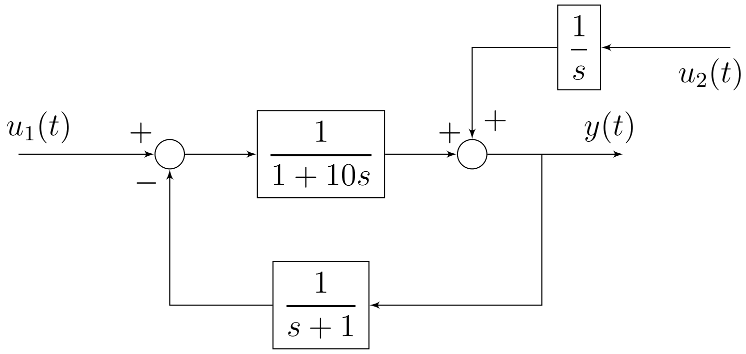


Sovrapponendo gli effetti dei due ingressi, e applicando all'uscita l'effetto del ritardatore puro otteniamo che la risposta del sistam $y(t)$ è



Esercizio 3

Si consideri il sistema descritto dal seguente diagramma a blocchi

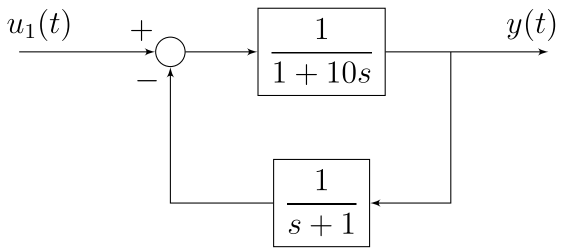


a) Determinare (qualitativamente) $y(t)$ quando $u_1(t) = sca(t)$ e $u_2(t) = 0$.

b) Determinare (qualitativamente) $y(t)$ quando $u_1(t) = 0$ e $u_2(t) = imp(t)$.

c) Determinare (qualitativamente) $y(t)$ quando $u_1(t) = 2sca(t)$ e $u_2(t) = imp(t-5)$.

Per rispondere al primo punto notiamo che $u_2(t) = 0$, quindi il suo effetto sul sistema è nullo. Dobbiamo quindi analizzare la risposta allo scalino unitario del sistema



La funzione di trasferimento del sistema si ricava con le usuali regole della retroazione

$$G_1 = \frac{\dfrac{1}{1+10s}}{1+\dfrac{1}{1+10s}\cdot\dfrac{1}{s+1}} = \frac{1+s}{10s^2+11s+2}$$

I poli del sistema sono

$$s_{1,2} = \frac{-11 \pm \sqrt{41}}{20} \qquad s_1 \sim -0.23,\ s_2 \sim -0.87$$

per cui

1. I poli sono stabili $\Rightarrow$ Il sistema non diverge.

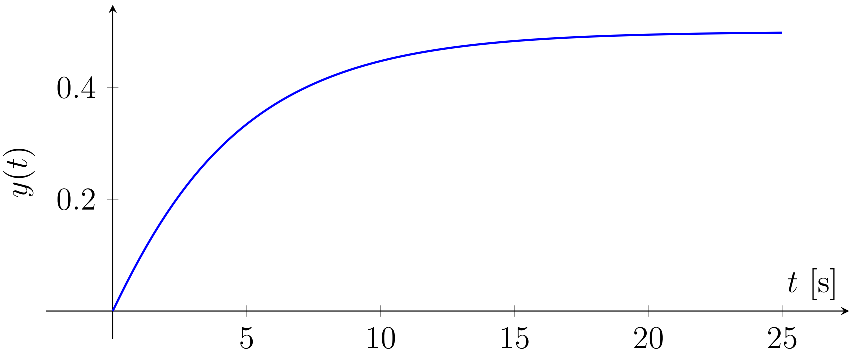
2. $\lambda_D \sim \frac{1}{4} \Rightarrow T_D = 4 \Rightarrow T_R = 20s$.

3. $r = 1 \Rightarrow y(0) = 0,\ \dot{y}(0) = \frac{1}{10}$.

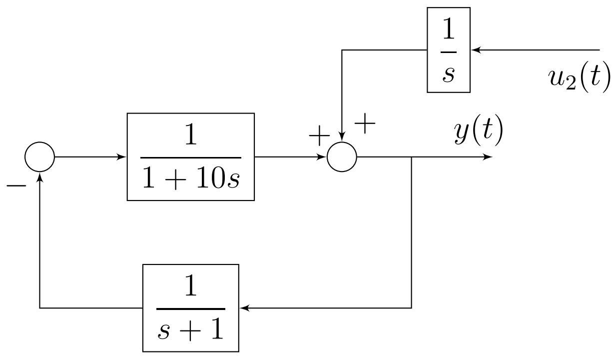
4. $G(0) = 1/2$.

5. $m_s = 0, \delta = 0 \Rightarrow N = 0$.

La risposta allo scalino del sistema sarà quindi



Per rispondere al secondo punto notiamo che $u_1(t) = 0$, quindi il suo effetto sul sistema è nullo. Inoltre il primo blocco che incontra l'ingresso è un integratore. Dobbiamo quindi analizzare la risposta allo scalino unitario del sistema



La funzione di trasferimento del sistema si ricava con le usuali regole della retroazione

$$G_2 = \frac{1}{1 + \dfrac{1}{1+10s} \cdot \dfrac{1}{s+1}} = \frac{(1+s)(1+10s)}{10s^2 + 11s + 2}$$

I poli del sistema sono sempre quelli di prima (poichè l'anello non è cambiato), mentre gli zeri sono cambiati. La risposta allo scalino possiamo dedurla nel solito modo

1. I poli sono stabili $\Rightarrow$ Il sistema non diverge.

2. $\lambda_D \sim \frac{1}{4} \Rightarrow T_D = 4 \Rightarrow T_R = 20s$.

3. $r = 2 \Rightarrow y(0) = 1$. Il sistema è improprio

4. $G(0) = 1/2$.

Per capire se la risposta allo scalino del sistema ha massimi o minimi non possiamo applicare la regola degli zeri superiori, essendo il sistema improprio, ma dobbiamo calcolare effettivamente la risposta tramite l'antitrasformata.

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{(1+s)(1+10s)}{10s^2+11s+2}\cdot\frac{1}{s}\right) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{10s^2+11s+1}{10s(s-s_1)(s-s_2)}\right) =$$
$$= \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{10}\left(\frac{A}{s}+\frac{B}{s-s_1}+\frac{C}{s-s_2}\right)\right)$$

A questo punto impostiamo il sistema

$$\begin{cases} A+B+C &= 10 \\ -As_1 - Cs_1 - As_2 - Bs_2 &= 11 \\ As_1s_2 &= 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} A &= \frac{1}{s_1s_2} \\ s_2B &= 11 + A(s_1+s_2) + Cs_1 \\ 10 &= \frac{1}{s_1s_2} + \frac{11s_1s_2+(s_1+s_2)+Cs_1^2s_2}{s_1s_2^2} + C \end{cases}$$

$$\begin{cases} A &= \frac{1}{s_1s_2} = 5 \\ B &= \frac{10s_1^2+11s_1+1}{s_1(s_1-s_2)} \sim -1.8 \\ C &= -\frac{10s_2^2+11s_2+1}{s_2(s_1-s_2)} \sim 6.8 \end{cases}$$

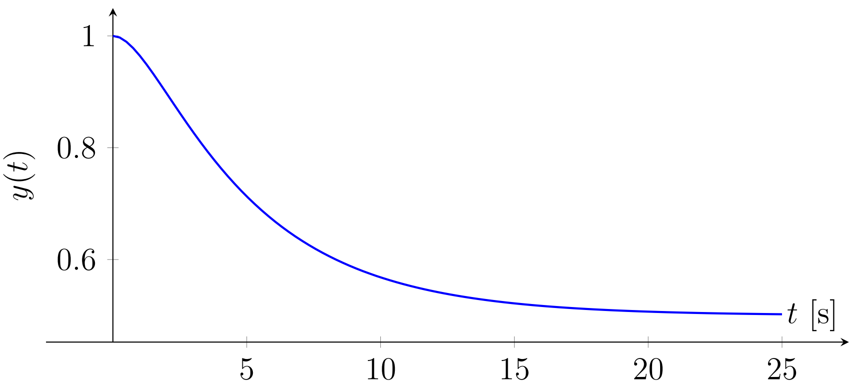
e otteniamo che la risposta allo scalino che stiamo cercando è

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{10}\left(\frac{5}{s} - \frac{1.8}{s+0.87} + \frac{6.8}{s+0.23}\right)\right) = 0.5 - 0.18e^{-0.87t} + 0.68e^{-0.23t}.$$

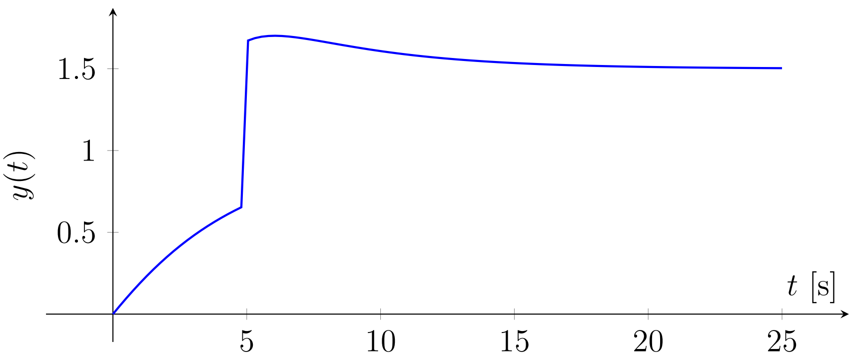
L'uscita del sistema parte quindi con un esponenziale negativo veloce, per essere poi bilanciata da un esponenziale positivo più lenta. Parte comunque lentamente, difatti $y'(0) = 0$. Questo fatto si poteva verificare anche con il teorema del valore iniziale

$$\begin{aligned} \lim_{t\to 0}\dot{y}(t) &= \lim_{s\to\infty} s\mathcal{L}\left(\dot{y}(t)\right) = \lim_{s\to\infty} s\left(s\mathcal{L}\left(y(t)\right) - y(0)\right) \\ &= \lim_{s\to\infty} s\left(sG(s)U(s) - y(0)\right) = \lim_{s\to\infty} s\left(\frac{(1+s)(1+10s)}{10s^2+11s+2} - 1\right) \\ &= \lim_{s\to\infty}\frac{s}{10s^2+11s+2} = 0. \end{aligned}$$

La risposta del sistema sarà quindi

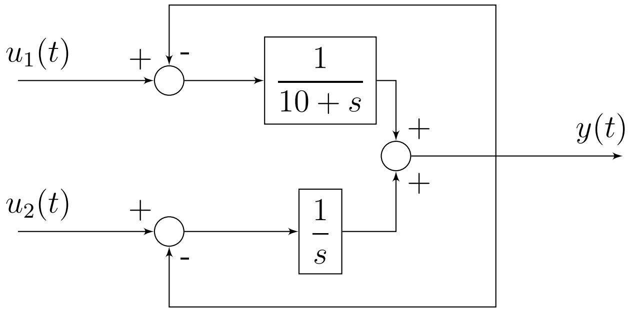


La terza risposta si ottiene semplicemente sovrapponendo gli effetti dei due ingressi, grazie alla linearità. La prima risposta sarà moltiplicata per 2 (poichè l'ingresso è doppio rispetto a quello che avevamo studiato noi) e la seconda risposta sarà semplicemente ritardata di 5 s, poichè l'impulso arriva all'istante $t = 5$ e non $t = 0$.



Esercizio 4

Si consideri il sistema descritto dal seguente diagramma a blocchi



Determinare (qualitativamente) $y(t)$ quando $u_1(t) = 5sca(t)$ e $u_2(t) = -5sca(t)$.

Per calcolare la funzione di trasferimento complessiva del sistema chiamo w_1 e w_2 l'uscita rispettivametne del blocco superiore e inferiore. Quindi

$$y = w_1 + w_2 = \frac{1}{10+s}(u_1 - y) + \frac{1}{s}(u_2 - y)$$

da cui posso ricavare le due funzioni di trasferimento $G_{u_1 \to y}$ e $G_{u_2 \to y}$

$$y = \frac{s}{s^2 + 12s + 10} u_1 + \frac{s+10}{s^2+12s+10} u_2$$

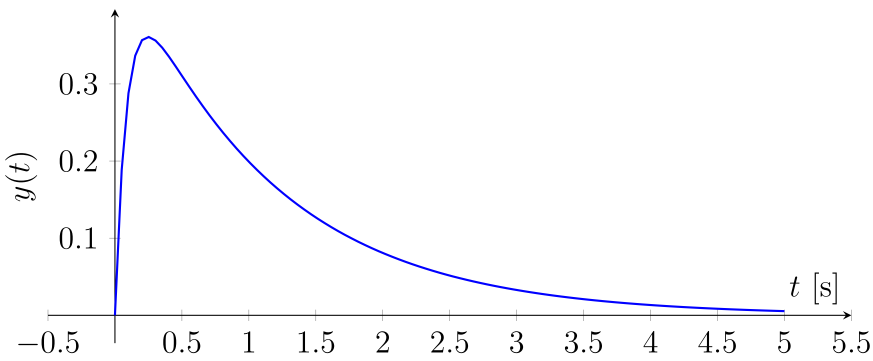
I poli del sistema sono $s_{1,2} = -6 \pm \sqrt{36-10} = -6 \pm \sqrt{26}$, cioè $s_1 \sim -1$ e $s_2 \sim -11$.

L'uscita del sistema sarà la sovrapposizione degli effetti dei due ingressi.

Per quanto riguarda la risposta allo scalino di $G_{u_1 \to y}$

1. I poli sono stabili $\Rightarrow$ Il sistema non diverge.
2. $\lambda_D \sim -1 \Rightarrow T_D = 1 \Rightarrow T_R = 5s$.
3. $r = 1 \Rightarrow y(0) = 0$, $\dot{y}(0) = 1$.
4. $G(0) = 0$.
5. $m_s = 1, \delta = 0 \Rightarrow N = 1$.

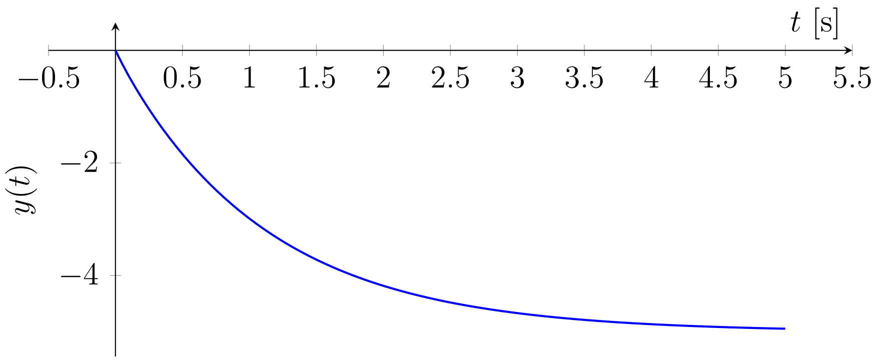
Siccome u_1 è uno scalino di ampiezza 5, la derivata iniziale sarà quintuplicata, e otterremo quindi



Per quanto riguarda la risposta allo scalino di $G_{u_2 \to y}$

1. I poli sono stabili $\Rightarrow$ Il sistema non diverge.
2. $\lambda_D \sim -1 \Rightarrow T_D = 1 \Rightarrow T_R = 5s$.
3. $r = 1 \Rightarrow y(0) = 0$, $\dot{y}(0) = 1$.
4. $G(0) = 1$.
5. $m_s = 0, \delta = 0 \Rightarrow N = 0$.

Siccome u_2 è uno scalino di ampiezza -5, la derivata iniziale varrà -5 e il sistema convergerà a -5, ottenendo quindi



Sovrapponendo gli effetti dei due ingressi otteniamo quindi (si noti che la $y'(0) = 0$)