SOLUZIONE

POLITECNICO
MILANO 1863

FONDAMENTI DI AUTOMATICA

Corso di laurea in Ingegneria Fisica – Prof. F. Dercole
Appello del 6/9/2019

COGNOME:______________________ NOME: ______________________

MATRICOLA o CODICE PERSONA: ______________________

FIRMA: ____________________________________ Visto del docente:_____

8	8	8	6	2

Voto totale
32

ATTENZIONE !
- Non è consentito consultare libri, appunti, ecc.
- Le risposte devono essere giustificate.
- Le soluzioni devono essere riportate solo sui fogli allegati.
- Sono valutati anche l'ordine e la chiarezza espositiva.

1) Si consideri il seguente sistema non lineare a tempo continuo del primo ordine dipendente dal parametro p:

$$\dot{x} = x - \frac{px}{1+x}$$

a) Determinare, per tutti i $p \geq 0$, gli equilibri $\bar{x} \geq 0$ del sistema e rappresentarli con un grafico nel piano (p, x).

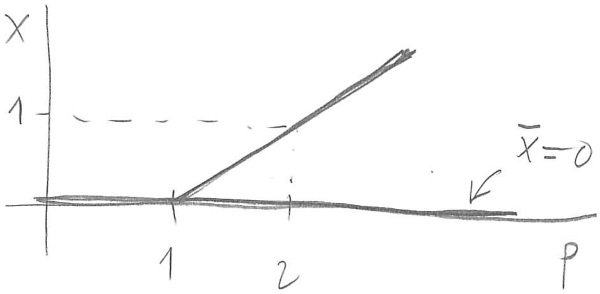
b) Discutere, per tutti i $p \geq 0$, la stabilità degli equilibri determinati al punto a), utilizzando, ove possibile, il metodo della linearizzazione e, ove non possibile, un metodo grafico. Giustificare brevemente le scelte fatte.

Soluzione:

a) $\dot{x} = 0 \quad \bar{x} = \frac{p\bar{x}}{1+\bar{x}}$

$\quad \bar{x} = 0$

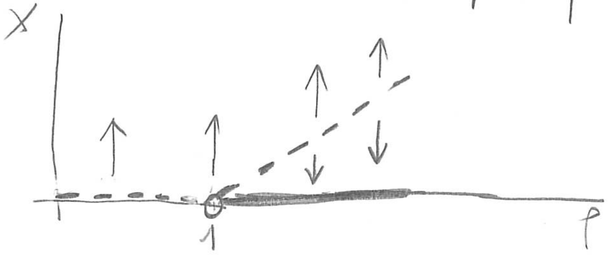
$\quad 1 = \frac{p}{1+\bar{x}} \rightarrow \bar{x} = p-1 \geq 0$ per $p \geq 1$



b) $J(x) = \frac{d}{dx}\left(x - \frac{px}{1+x}\right) = 1 - \frac{p}{(1+x)^2}$

$J(0) = 1-p$
- < 0 per $p > 1$ as. stab
- > 0 per $0 \leq p < 1$ instab
- $= 0$ per $p = 1$ instab (vedi grafico)

$J(p-1) = 1 - \frac{1}{p}$
- < 0 mai per $p \geq 1$
- > 0 per $p > 1$ instabile
- $= 0$ per $p = 1$ instab (vedi grafico)

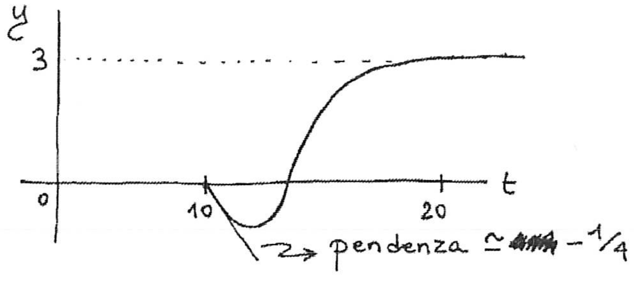


- - - - eq instabile

—— eq as. stab

frecce: segno di $\dot{x}$: $\uparrow \dot{x} > 0$, $\downarrow \dot{x} < 0$

2) In figura è rappresentata la risposta allo scalino unitario (applicato in t=0) rilevata sperimentalmente su un sistema.



a) Identificare una funzione di trasferimento G(s) compatibile con la rilevazione sperimentale.

b) Tracciare i diagrammi di Bode (modulo e fase) della funzione di trasferimento identificata (preferibilmente utilizzando la carta logaritmica allegata).

c) Determinare (in modo qualitativo) e rappresentare graficamente la risposta all'impulso del sistema ottenuto mettendo in cascata a G(s) il sistema con funzione di trasferimento

$$H(s) = \frac{1}{s(25s^2 + 10s + 26)}$$

Soluzione:

guadagno ritardo zero con Re > 0 per avere $\dot{y}(10) < 0$

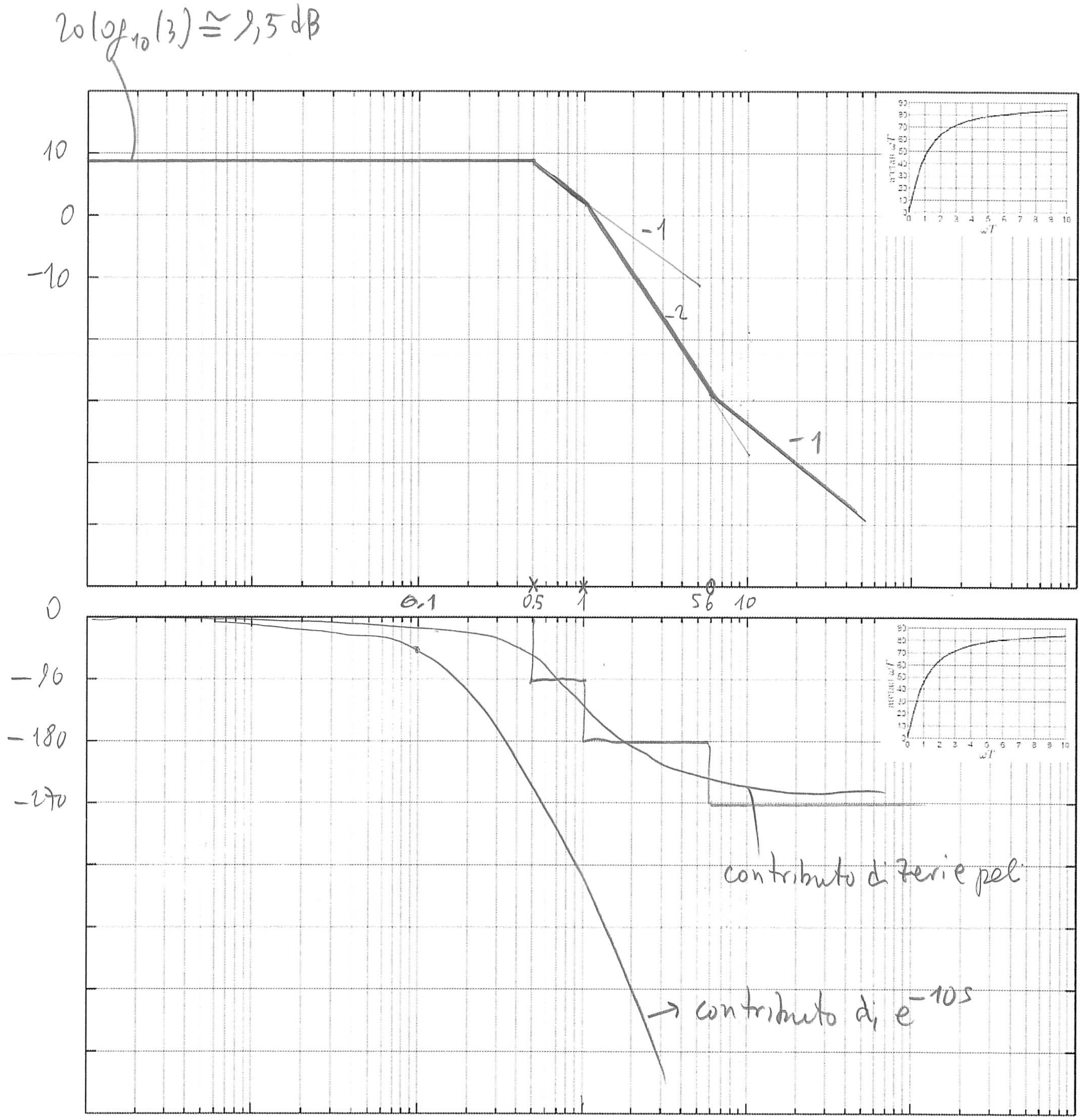
a) $G(s) = 3\, e^{-10s} \dfrac{1 - s\tau}{\underbrace{(1+sT_1)(1+sT_2)}_{T_1 \geq T_2 > 0 \text{ 2 poli stabili}}}$

$T_1 = 2$ per avere $T_R = 20 - 10 = 10$

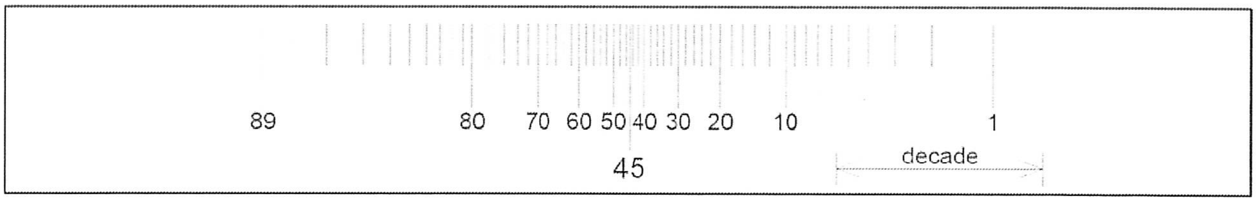
Scelgo $T_2 = 1$

$$\dot{y}(0) = \lim_{s \to +\infty} s^2 G(s) \frac{1}{s} = -\frac{3\tau}{2} = -\frac{1}{4} \rightarrow \tau = \frac{1}{6}$$

b) vedi carta log.



$20\log_{10}(3) \cong 9,5$ dB
10
0
-10
-1
-2
-1
0.1
0.5
1
5 6
10
0
-90
-180
-270
contributo di zeri e pol
contributo di e^{-10s}



89
80
70
60
50
40
30
20
10
1
45
decade

c) la risp. all'impulso di GH equivale a quello allo scalino di

$$F(s) = G(s) \underbrace{\frac{1}{25s^2 + 10s + 26}}$$

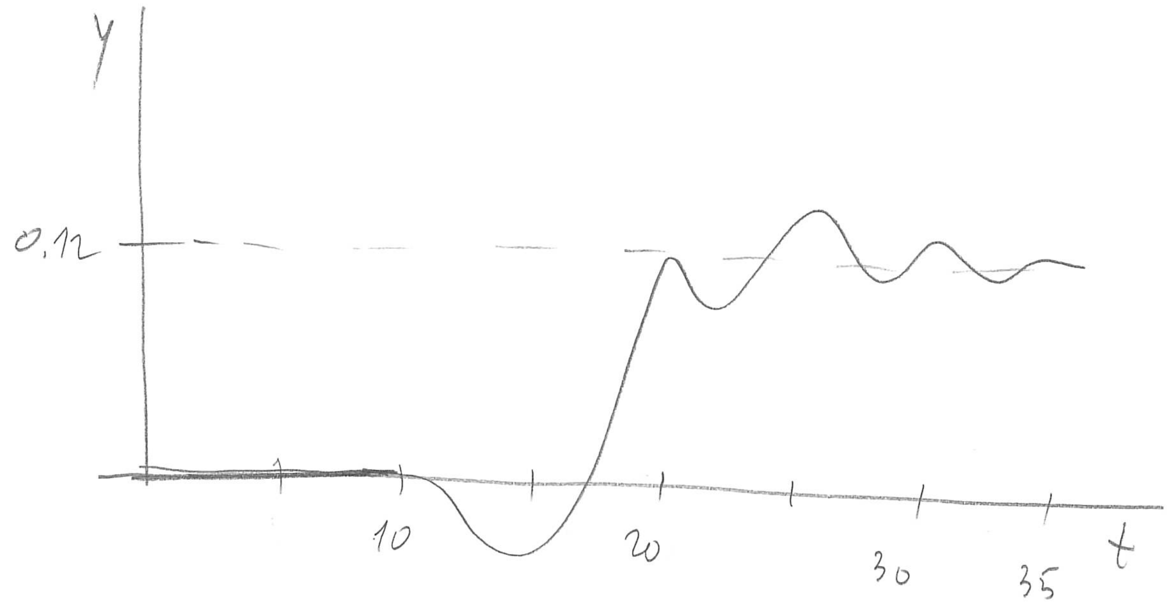
poli complessi coniugati $\lambda_{3,4} = \frac{-10 \pm \sqrt{100-2600}}{50} = -\frac{1}{5} \pm i$

$$T_{osc} = \frac{2\pi}{Im(\lambda_{3,4})} = 2\pi$$

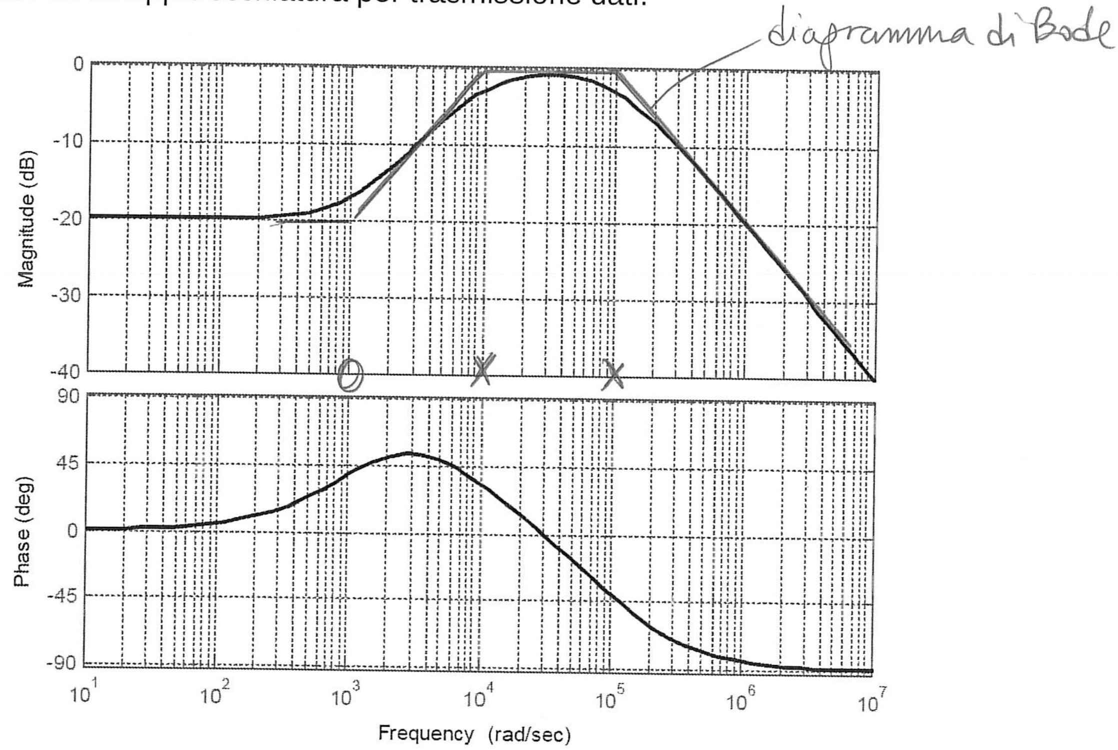
$\lambda_{3,4}$ sono dominanti $\Rightarrow T_R = 5 \cdot 5 = 25$

$$r = 3 \rightarrow \dddot{y}(0) = \lim_{s \to +\infty} s^4 F(s) \frac{1}{s} = -\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{25} = -\frac{1}{100} < 0$$

$$\mu = F(0) = \frac{3}{26} \simeq 0{,}12$$



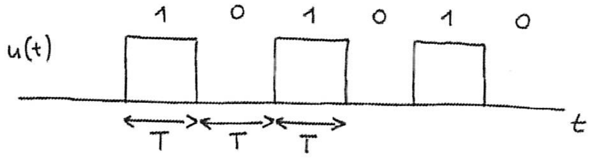
3) I diagrammi di Bode in figura (modulo e fase) sono stati ricavati mediante una serie di prove effettuate su un'apparecchiatura per trasmissione dati.



a) Determinare una funzione di trasferimento compatibile con le prove sperimentali sopra riportate.

b) Determinare (in modo qualitativo) e rappresentare graficamente la risposta allo scalino del sistema.

L'apparecchiatura è utilizzata per la trasmissione di segnali digitali (sequenze di bit 0 o 1), un esempio dei quali (sequenza alternata ...101010...) è in figura. La durata di un bit (vedi figura) è pari a T secondi, per cui la frequenza di trasmissione (bit/secondo) è pari a f=1/T.



c) Determinare (in modo qualitativo) e rappresentare graficamente il segnale di uscita dell'apparecchiatura quando l'ingresso è la sequenza ...101010... in figura, nei casi in cui f=100, 1000, e 10000 (bit/secondo).

Soluzione:

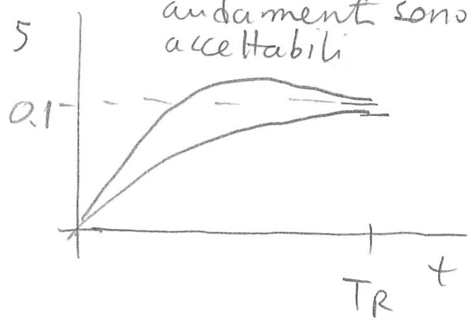
a) $$G(s) = 0.1\,\frac{1+10^{-3}s}{(1+10^{-4}s)(1+10^{-5}s)}$$

b) $\mu = G(0) = 0.1$ sist. est. stabile

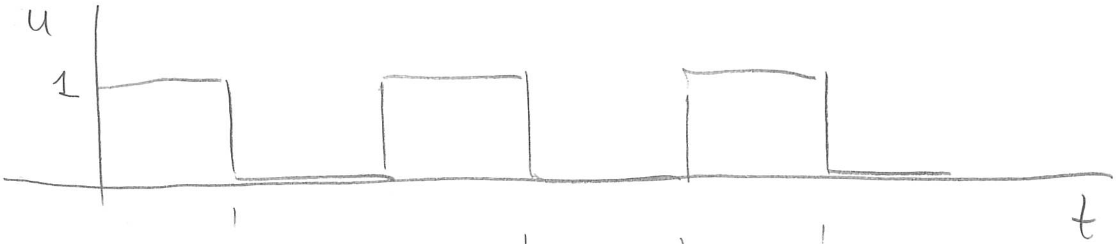
$r = 1$, $\dot{y}(0) = \lim_{s \to +\infty} s\,G(s)\,\frac{1}{s} = 10^5$

$\lambda_d = 10^{-4} \rightarrow T_R = 5 \cdot 10^{-4}$

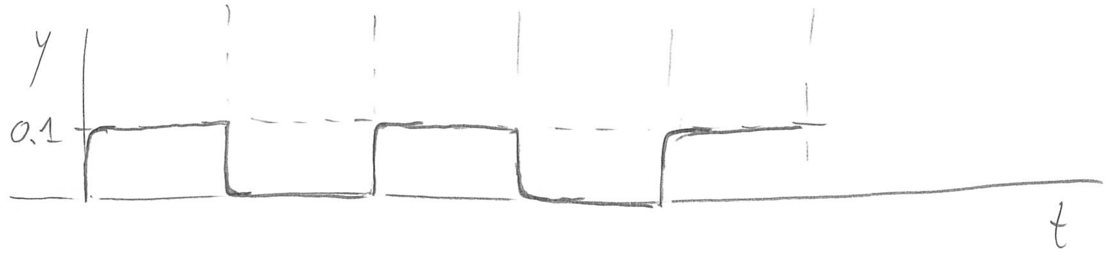
entrambi gli andamenti sono accettabili



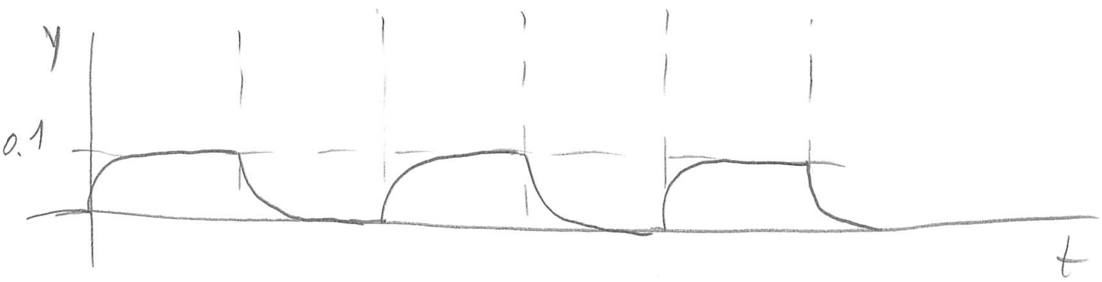
c) Considero la risposta allo scalino senza sovraelongazione



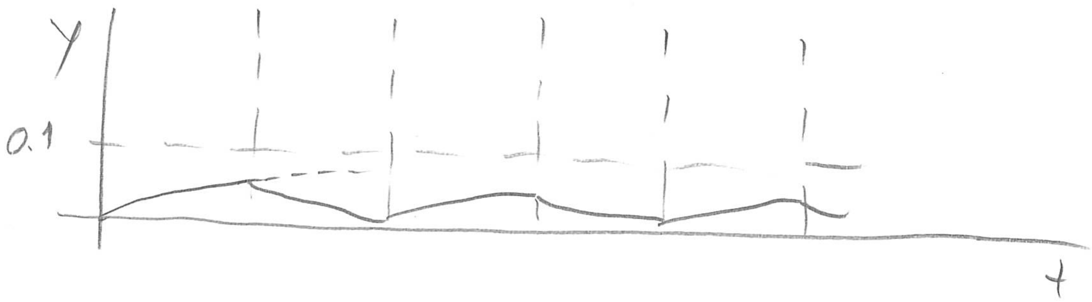
$f = 100 \rightarrow T = 10^{-2} \gg T_R$



$f = 1000 \rightarrow T = 10^{-3} > T_R$



$f = 10^4 \rightarrow T = 10^{-4} < T_R$



4)

a. I due sistemi A e B a tempo discreto, descritti dalle funzioni di trasferimento

$$G_A(Z) = \frac{2(z-0.1)}{(z-0.5)(z+0.5)} \quad \text{e} \quad G_B(Z) = \frac{2(z-0.1)}{(z-i0.5)(z+i0.5)},$$

[1] sono entrambi esternamente stabili
[2] sono entrambi instabili
[3] uno è instabile e l'altro esternamente stabile
[4] non vi è sufficiente informazione per discutere la stabilità

Il movimento libero dell'uscita

[1] è monotono per entrambi
[2] presenta oscillazioni per entrambi
[3] presenta oscillazioni per l'uno ma non per l'altro
[4] tende per entrambi al valore 2

b. Per il sistema $\dot{x} = Ax$, $y = c^T x$, definire la nozione di stato non osservabile, di sottospazio di non osservabilità e di sistema completamente osservabile.

vedi teoria

5) In Matlab sono stati digitati i comandi

```
>>A=[10 5; 0 –2];
>>b=[0; 1];
```

Illustrare il risultato che si ottiene con il comando seguente, discutendo, per l'esempio specifico, quali conclusioni è possibile trarre sulle proprietà del sistema (A,b).

```
>>det(ctrb(A,b))
```

$$ctrb(A,b) = R = [b, Ab] = \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \rightarrow det = -5 \neq 0$$

si conclude che (A,b) è completamente raggiungibile