SOLUZIONE

POLITECNICO
MILANO 1863

# FONDAMENTI DI AUTOMATICA

Corso di laurea in Ingegneria Fisica – Prof. F. Dercole
Appello del 19/7/2019

COGNOME:______________________ NOME: ______________________

MATRICOLA o CODICE PERSONA: ________________________

FIRMA: ____________________________________ Visto del docente:_____

| 8 | 8 | 8 | 6 | 2 |
|---|---|---|---|---|
| | | | | |

| Voto totale |
|---|
| 32 |
| |

**ATTENZIONE !**

- Non è consentito consultare libri, appunti, ecc.
- Le risposte devono essere giustificate.
- Le soluzioni devono essere riportate solo sui fogli allegati.
- Sono valutati anche l'ordine e la chiarezza espositiva.

1) Due serbatoi in cascata hanno coefficienti di deflusso (misurati in [$gg^{-1}$], gg=giorni) pari rispettivamente a $k_1$ (serbatoio di monte) e $k_2$ (serbatoio di valle). Nel serbatoio di monte entra una portata di u [$m^3$/sec] di acqua.

a) Descrivere il sistema mediante un modello a tempo continuo in cui l'uscita sia la portata scaricata dal serbatoio di valle [$m^3$/sec]. Si consiglia di usare il giorno come unità di tempo e il volume [$m^3$] per lo stato dei due serbatoi.

b) Discutere la stabilità del sistema.

c) Calcolare lo stato e l'uscita di equilibrio corrispondenti a ingresso costante.

d) Supponendo inizialmente vuoti i due serbatoi, tracciare (nel piano si stato) la traiettoria di riempimento fino allo stato di equilibrio corrispondente a u=1, nei due casi ($k_1$=1, $k_2$=2) e ($k_1$=2, $k_2$=1), indicando il tempo approssimativo di riempimento.

---

**Soluzione**:

a) $x_1(t)$ : volume d'acqua [$m^3$] contenuto nel serbatoio a monte

$x_2(t)$ : " " " " " " " valle

$t$ : tempo continuo misurato in giorni

$$\dot{x}_1 = \underbrace{86400\,u}_{[m^3/gg]} - k_1 x_1 \qquad A = \begin{bmatrix} -k_1 & 0 \\ k_1 & -k_2 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 86400 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\dot{x}_2 = k_1 x_1 - k_2 x_2 \qquad c^T = \begin{bmatrix} 0 & \frac{k_2}{86400} \end{bmatrix} \quad d = 0$$

$$y = \frac{k_2 x_2}{86400} \quad [m^3/s]$$

b) autovalori di A : $\lambda_1 = -k_1 < 0$, $\lambda_2 = -k_2 < 0$ $\rightarrow$ sistema as. stab.

c) $0 = 86400\,\bar{u} - k_1 \bar{x}_1 \rightarrow \bar{x}_1 = \frac{86400}{k_1}\bar{u}$

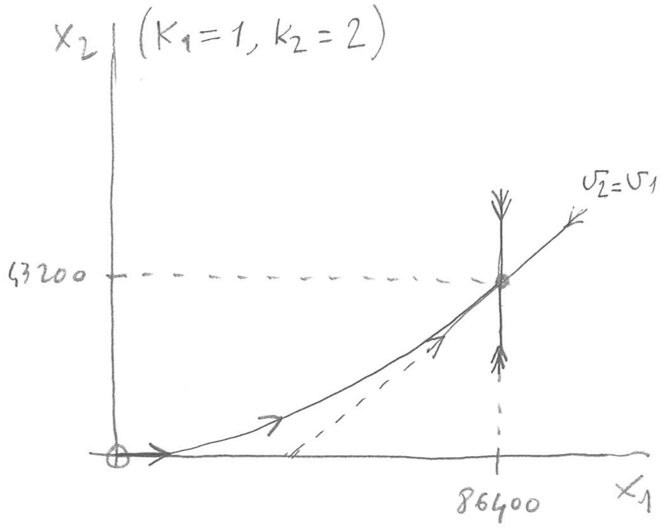
$0 = k_1 \bar{x}_1 - k_2 \bar{x}_2 \rightarrow \bar{x}_2 = \frac{86400}{k_2}\bar{u}$

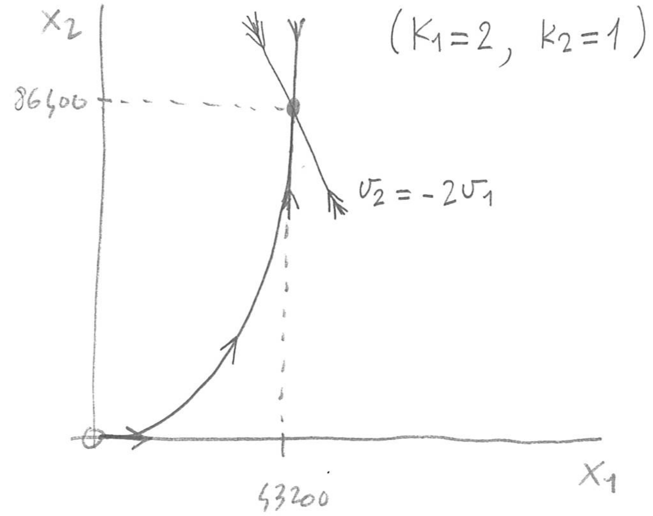
$\bar{y} = \frac{k_2}{86400}\bar{x}_2 = \bar{u}$ (guadagno $\mu = 1$, ovvio perché all'equilibrio le portate in entrata e uscita devono uguagliarsi)

d) autovettori di A: $Av = \lambda v$

$$\lambda_1 = -k_1 : \begin{cases} \cancel{-k_1 v_1} = \cancel{-k_1 v_1} \\ k_1 v_1 - k_2 v_2 = -k_1 v_2 \end{cases} \rightarrow v_2 = \frac{k_1}{k_2 - k_1} v_1 \quad (k_1 \neq k_2)$$

$$\lambda_2 = -k_2 : \begin{cases} -k_1 v_1 = -k_2 v_1 \\ k_1 v_1 - \cancel{k_2 v_2} = \cancel{-k_2 v_2} \end{cases} \rightarrow v_1 = 0$$




$$T_R \cong 5\,gg \, , \quad x(0) = \begin{bmatrix} 86400 \\ 0 \end{bmatrix}$$

2) Si consideri il seguente sistema a tempo discreto, in cui l'uscita è la seconda variabile di stato.

$$x_1(t+1) = -2\, x_1(t) + u(t)$$
$$x_2(t+1) = 3\, x_1(t) - x_2(t)$$

a) Studiare la stabilità, la raggiungibilità e l'osservabilità del sistema.

b) Se possibile, progettare un regolatore $u = k^T\hat{x} + v$ (ricostruzione asintotica $\hat{x}$ dello stato + legge di controllo) con il quale, a fronte di ingresso $v$ costante, lo stato di equilibrio venga raggiunto in circa 5 istanti di tempo. Nota: è ammesso impostare, senza risolverli, i sistemi di equazioni che determinano i vettori di parametri $l$ e $k$ di ricostruttore e legge di controllo.

c) Determinare il valore costante dell'ingresso $v$ (in funzione dei parametri $k$ se non calcolati) da imporre per far convergere il sistema all'equilibrio che il sistema non controllato ammette per u=1.

---

**Soluzione**:

a)

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

autovalori : $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = -1$

$|\lambda_1| > 1 \rightarrow$ sistema instabile

$$c^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \quad d = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$$

$$R = \begin{bmatrix} b & Ab \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$ $\det(R) = 3 \neq 0 \rightarrow$ sistema c.r.

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} c^T \\ c^T A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$$ $\det(\mathcal{O}) = -3 \neq 0 \rightarrow$ sistema c.o.

b) $(A, b, c^T)$ c.r. e c.o. $\rightarrow$ è possibile determinare $l$ e $k$ in modo da ottenere i polinomi caratteristici di $(A+bk^T)$ e $(A+lc^T)$ desiderati.

$$T_R = 5 \rightarrow T_D = 1 = -\frac{1}{\log|\lambda_D|} \rightarrow \log|\lambda_D| = -1 \rightarrow |\lambda_D| = \frac{1}{e}$$

Una scelta possibile è quindi autovalori

$\lambda = \left\{ \frac{1}{e}, \frac{1}{2e} \right\}$ per $A+bk^T$

$\lambda = \left\{ \frac{1}{3e}, \frac{1}{4e} \right\}$ per $A+lc^T$

distinti e positivi con quelli di $A+lc^T$ (ricostruttore) più "veloci" di quelli di $A+bk^T$ (legge di controllo) per cui $l$ e $K$ sono determinati dalle seguenti equazioni (lineari)

$$\begin{cases} tr(A+bK^T) = \dfrac{3}{2e} \\ det(A+bK^T) = \dfrac{1}{2e^2} \end{cases} , \qquad \begin{cases} tr(A+lc^T) = \dfrac{7}{12e} \\ det(A+lc^T) = \dfrac{1}{12e^2} \end{cases}$$

dove

$$A+bK^T = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} K_1 & K_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} K_1-2 & K_2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} \rightarrow \begin{cases} tr(A+bK^T) = K_1-3 \\ det(A+bK^T) = 2-K_1-3K_2 \end{cases}$$

$$A+lc^T = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} l_1 \\ l_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & l_1 \\ 3 & l_2-1 \end{vmatrix} \rightarrow \begin{cases} tr(A+lc^T) = l_2-3 \\ det(A+lc^T) = 2-2l_2-3l_1 \end{cases}$$

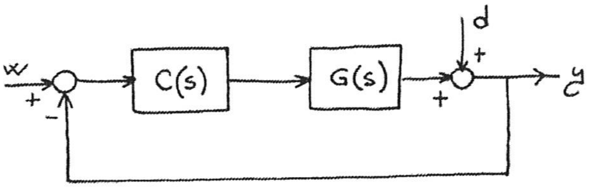
c) equilibrio del sistema non controllato corrispondente a $\bar{u}=1$

$$\bar{x} = A\bar{x} + b\bar{u} \rightarrow \begin{cases} \bar{x}_1 = -2\bar{x}_1 + 1 \\ \bar{x}_2 = 3\bar{x}_1 - \bar{x}_2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \bar{x}_1 = 1/3 \\ \bar{x}_2 = \frac{3}{2}\bar{x}_1 = 1/2 \end{cases}$$

la legge di controllo che stabilizza $\bar{x}$ è $u = \bar{u} + K^T(x-\bar{x})$

quindi $\bar{v} = \bar{u} - K^T\bar{x} = 1 - \frac{K_1}{3} - \frac{K_2}{2}$

3) Si consideri il sistema di controllo in figura, in cui




$$G(s) = \frac{10^5}{(10+s)^3}$$

a) Dire se è possibile utilizzare un controllore proporzionale C(s)=k per avere un sistema di controllo stabile con errore di controllo inferiore all'1% del valore costante di riferimento w.

b) Progettare un controllore con al più un solo zero, tale che

- il sistema di controllo sia asintoticamente stabile (supponendo il processo G(s) completamente raggiungibile e osservabile);
- a regime, l'errore di controllo dovuto al segnale di riferimento w costante sia pari o inferiore all'1% del valore w richiesto;
- a regime, l'errore di controllo dovuto ad un disturbo d costante sia pari o inferiore all'1% del disturbo;
- i disturbi a frequenza $10^{-3}$ Hz siano attenuati di almeno 50 volte sulla variabile controllata;
- in caso di riferimento e disturbo costanti, il sistema raggiunga l'equilibrio progettato in circa 5 secondi, senza rilevanti oscillazioni.
- il sistema di controllo sia robusto rispetto ad un ritardo non modellizzato nell'anello di 0.1 sec.

---

**Soluzione**:

a) $G(s) = \frac{100}{(1+0.1s)^3}$ , $C(s) = k$

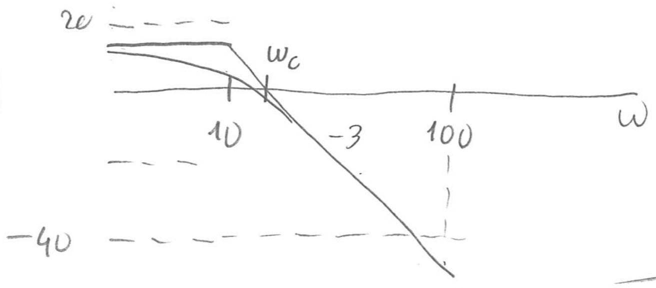
limitandosi a $k > \frac{1}{100}$ per soddisfare le ipotesi del criterio di Bode, la stabilità del sistema di controllo richiede $100k < 8 \to k < \frac{2}{25}$

dal criterio di Routh, oppure, con il criterio di Bode si ottiene

$3\,\mathrm{atan}(\omega_c \cdot 0.1) = \pi \to \omega_c \cong 17{,}3$ rad/s

$60 \cdot \log_{10}\left(\frac{\omega_c}{10}\right) \cong 14{,}33 \cong \log_{10}(100k) \to 100k \simeq 5.2 \to k < \frac{5.2}{100}$

(perché alla $\omega_c$ il diagramma di Bode di R è leggermente sopra quello vero)




La richiesta sull'errore però richiede $L(0) = 100k > 99 \to$ NO

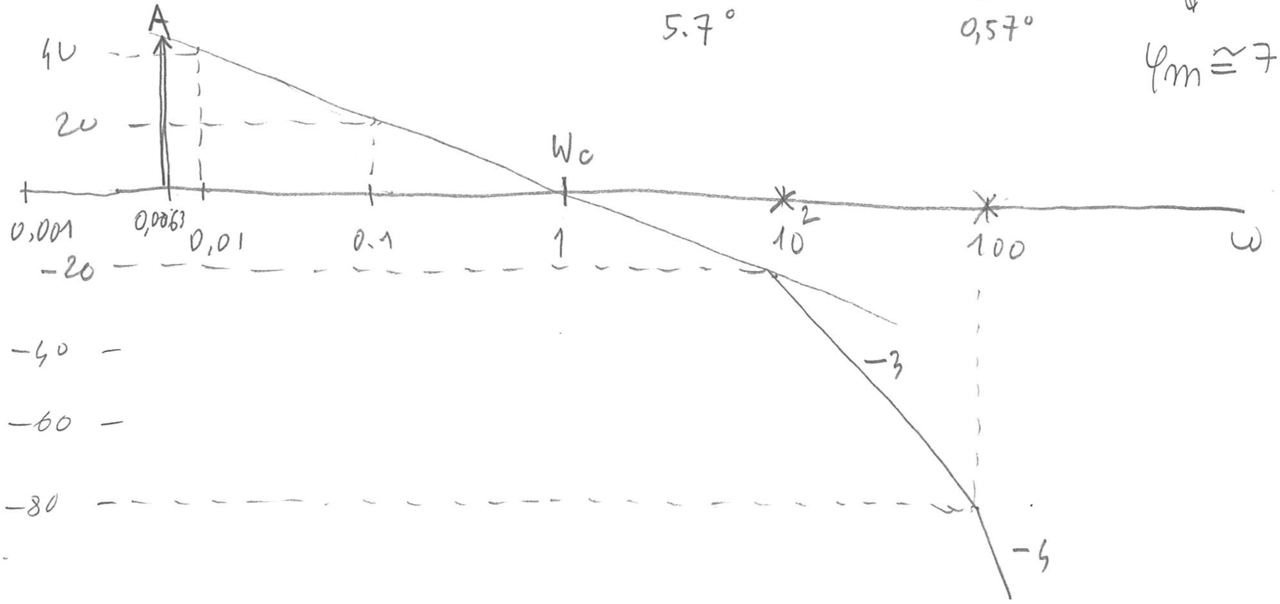
b) $C(s) = \dfrac{0{,}01}{s} \dfrac{(1+0.1s)}{(1+0{,}01s)}$

$$L(s) = \frac{1}{s(1+0.1s)^2(1+0{,}01s)}$$

$\omega_c = 1,\quad \varphi(\omega_c) = -90° - 2\,\underbrace{\text{atan}(0.1)}_{\cong\, 5.7°} - \underbrace{\text{atan}(0{,}01)}_{\cong\, 0{,}57°} \cong -102°$

$\Downarrow$

$\varphi_m \cong 78°$




- stabilità: OK per il criterio di Bode
- errore a regime dovuto a $w$ e $d$ costanti $= 0$ perché c'è l'integratore
- disturbo a $10^{-3}$ Hz $= 0{,}00628$ rad/s attenuato di più di 100 volte (vedi quota A sul diagramma)
- $T_D$ del sistema di controllo $\cong \dfrac{1}{\omega_c} = 1$ sec $\rightarrow T_R \cong 5$ sec
- $\tau = 0.1$ sec $\rightarrow \Delta\varphi_m = \omega_c \tau \dfrac{180}{\pi} \cong 6° \rightarrow$ stabilità e prestazioni robuste

$\lambda_D \cong -1$ reale o comunque molto smorzato ($\varphi_m > 70°$) quindi non ci sono rilevanti oscillazioni

4)

a) Due esperimenti successivi vengono fatti sullo stesso sistema a parità di ingresso, il secondo a partire dallo stato iniziale usato nel primo moltiplicato per 2 (tutte le componenti). Specificare, anche senza motivare la risposta, quale delle affermazioni sotto riportate (una sola) è corretta.

[1] L'uscita del secondo esperimento è, ad ogni istante, doppia di quella del primo.

[2] L'uscita del secondo esperimento è, a regime, doppia di quella del primo.

[3] L'uscita libera del secondo esperimento è, ad ogni istante, doppia di quella del primo.

[4] L'uscita libera del secondo esperimento è, solo a regime, doppia di quella del primo.

[5] L'uscita forzata del secondo esperimento è, ad ogni istante, doppia di quella del primo.

b) Con riferimento ad un sistema dinamico non lineare a tempo continuo:

b.1) si definisca uno stato di equilibrio;

b.2) si definisca la nozione di stabilità asintotica per uno stato di equilibrio;

b.3) si dica, anche senza motivare la risposta, se la stabilità asintotica del sistema linearizzato nell'equilibrio sia condizione necessaria e/o sufficiente per la stabilità asintotica dell'equilibrio del sistema non lineare.

vedi lezioni

5) Si scriva la sequenza di comandi Matlab per simulare e visualizzare l'evoluzione dello stato del sistema del primo ordine x(t+1) = 0.5 x(t) + 1 per 15 istanti di tempo a partire dallo stato iniziale nullo.

5) sistema = ss(-0,5, 1, 1, 0, 1);

a b c d sistema a t. discreto

u = ones(16,1);

t = 0:15;

[y,t,x] = lsim(sistema,u,t); Nota: x(0) se non specificato è supposto nullo

stairs(t,x);