SOLUZIONI

POLITECNICO
MILANO 1863

FONDAMENTI DI AUTOMATICA
Corso di laurea in Ingegneria Fisica – Prof. F. Dercole
Appello del 2/7/2019

COGNOME:____________________ NOME: ____________________

MATRICOLA o CODICE PERSONA: ____________________

FIRMA: ____________________________ Visto del docente:______

8	8	8	6	2

Voto totale
32

ATTENZIONE !
- Non è consentito consultare libri, appunti, ecc.
- Le risposte devono essere giustificate.
- Le soluzioni devono essere riportate solo sui fogli allegati.
- Sono valutati anche l'ordine e la chiarezza espositiva.

1) Gli abbonati ad un servizio di “bike sharing” sono suddivisi in tre categorie a cui corrispondono diverse tariffe di utilizzo del servizio, più convenienti dalla categoria 1 alla 3. Il gestore vuole incentivare l’uso delle biciclette per periodi continuativi di durata medio-breve, per cui a fine anno promuove alla categoria superiore gli utenti che nell’anno abbiano effettuato noleggi medio-brevi almeno nel 90% dei casi, mentre declassa alla categoria inferiore gli utenti sotto tale soglia. Tutti i nuovi abbonati sono inseriti in categoria 1.

In base alle statistiche di utilizzo degli ultimi anni, è noto che, mediamente, la percentuale di utenti sotto soglia nelle categorie 1, 2 e 3 è, rispettivamente, del 20%, 15% e 10%. Inoltre, indipendentemente dal tipo di utilizzo, il 5% degli utenti di ogni categoria lascia il servizio a fine anno.

a) Descrivere il fenomeno in esame con un sistema dinamico nel quale l’ingresso rappresenti il numero di nuove sottoscrizioni e l’uscita il numero totale di utenti.
b) Studiare la stabilità del sistema, discutendone il tempo di risposta.
c) Determinare l’equilibrio del sistema in funzione del numero u costante di nuove sottoscrizioni annue e il guadagno del sistema.
d) Determinare il numero di utenti raggiunto dal gestore dopo un lungo periodo con circa 1000 sottoscrizioni annue.

Soluzione:

a) $x_1(t+1) = 0.2\ 0.95\ x_1(t) + 0.15\ 0.95\ x_2(t) + u(t)$

$x_2(t+1) = 0.8\ 0.95\ x_1(t) + 0.1\ 0.95\ x_3(t)$

$x_3(t+1) = 0.85\ 0.95\ x_2(t) + 0.9\ 0.95\ x_3(t)$, $y(t) = x_1(t) + x_2(t) + x_3(t)$

$$A = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.15 & 0 \\ 0.8 & 0 & 0.1 \\ 0 & 0.85 & 0.9 \end{bmatrix} 0.95 , \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$c^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

b) Il sistema e' as. stab perchè senza ingresso (movimento libero) tutte e tre le categorie di utenti si svuotano a partire da qualsiasi condizione iniziale, a causa del 5% di abbandono.

Osservando che $y(t+1) = \dots = 0,95\, y(t)$ e che i passaggi di categoria sono più rapidi rispetto all'abbandono, si può dedurre che $\lambda_d = 0,95 \rightarrow T_{risp} = -5/\log(0,95) \cong 100$ anni

c) $\bar{x}_1 = 0.2\, 0.95\, \bar{x}_1 + 0.15\, 0{,}95\, \bar{x}_2 + \bar{u}$ (1)

$\bar{x}_2 = 0{,}8\, 0.95\, \bar{x}_1 + 0.1\, 0.95\, \bar{x}_3$ (2)

$\bar{x}_3 = 0{,}85\, 0{,}95\, \bar{x}_2 + 0.9\, 0.95\, \bar{x}_3$ (3)

$(3) \longrightarrow \bar{x}_3 \cong 5{,}57\, \bar{x}_2$ (4)

$(2)\ e\ (4) \longrightarrow \bar{x}_2 \cong 1{,}61\, \bar{x}_1$ (5)

$(1)\ e\ (5) \longrightarrow \bar{x}_1 \cong 1{,}72\, \bar{u}$

$$\Rightarrow \bar{x} = \begin{bmatrix} 1.72 \\ 2{,}77 \\ 15{,}42 \end{bmatrix} \bar{u} \quad , \quad \bar{y} = \bar{x}_1 + \bar{x}_2 + \bar{x}_3 = 19{,}91\, \bar{u}$$

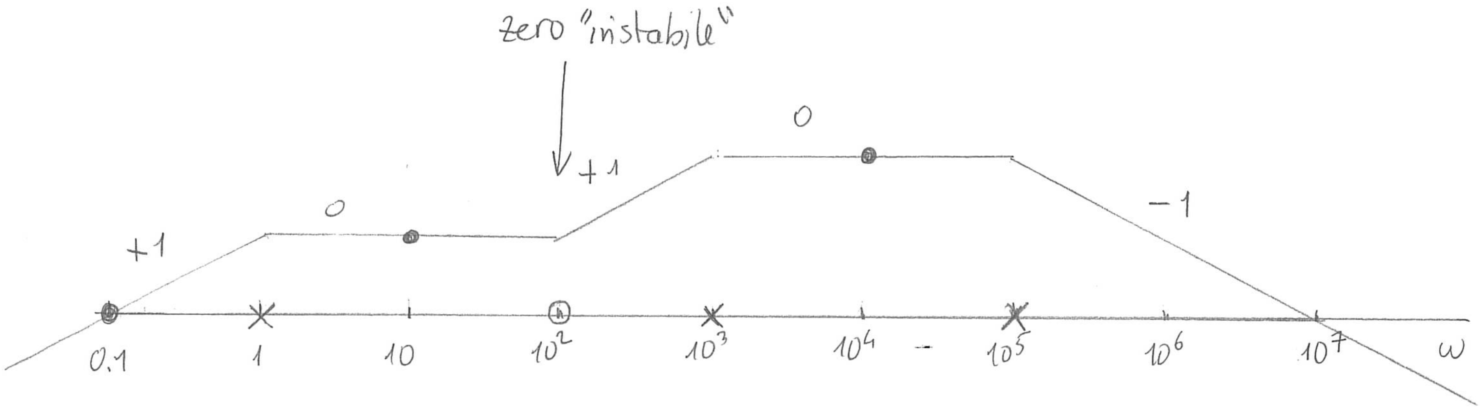
μ: guadagno

d) $\bar{u} = 1000 \Rightarrow \bar{x} \cong \begin{bmatrix} 1720 \\ 2770 \\ 15420 \end{bmatrix}$, $\bar{y} \cong 10$ K utenti

2) Un sistema dinamico è stato sottoposto a prove "in frequenza" applicando in ingresso sinusoidi di ampiezza unitaria alle frequenze $\omega = 0.1;\ 10;\ 10^4;\ 10^7$ e registrando in corrispondenza l'ampiezza dell'uscita, risultata rispettivamente pari a $1;\ 10;\ 100;\ 1$. Si è inoltre rilevato che lo sfasamento tende a $-270°$ per $\omega \to +\infty$. Infine, si è osservando che la risposta allo scalino del sistema tende asintoticamente a zero.

a) Determinare una funzione di trasferimento compatibile con tutte le prove sperimentali.
b) Determinare qualitativamente la risposta allo scalino del sistema.
c) Determinare (anche in modo approssimato utilizzando i diagrammi di Bode) l'uscita a transitorio esaurito quando $u(t) = 20 + sin(0.01t) + 12sin(10^6 t)$ (specificare quantitativamente anche i valori degli sfasamenti).

Soluzione [se necessario proseguire sul retro]:

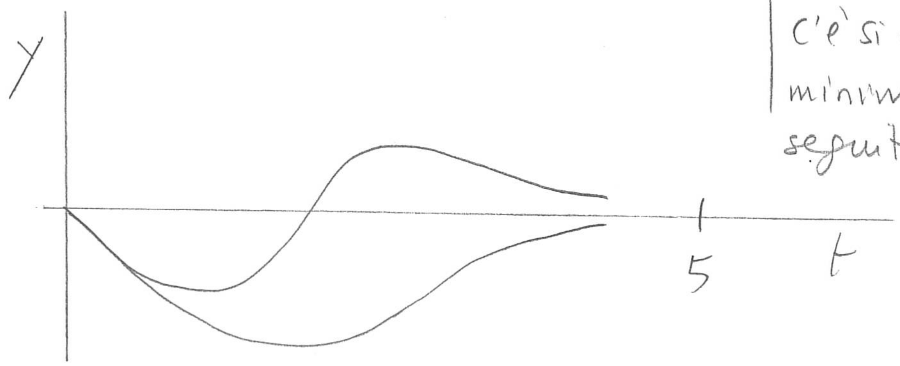


a) $$G(s) = \frac{10\,s\,(1-0{,}01\,s)}{(1+s)(1+0{,}001\,s)(1+10^{-5}s)}$$

b) $r = 1 \to y(0) = 0\ ,\ \dot{y}(0) = \mu_1 = -10^{-7} < 0$

$\lambda_d = -1 \to T_d = 1 \to T_{risp} = 5$

Non ci sono oscillazioni dovuta a poli non reali
c'è sicuramente un primo minimo eventualmente seguito da altri punti stazionari

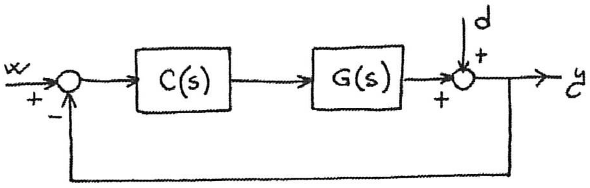


c) $$y(t) \cong \cancel{20\,\underset{\overset{\shortparallel}{0}}{G(0)}} + \underbrace{|G(i0{,}01)|}_{\simeq -20\,\mathrm{dB}} \sin\left(0{,}01t + \underbrace{\arg G(i0{,}01)}_{\simeq \pi/2}\right)$$

$$+ 12\underbrace{|G(i10^6)|}_{\simeq 20\,\mathrm{dB}} \sin\left(10^6 t + \underbrace{\arg G(i10^6)}_{\simeq -\frac{3}{2}\pi}\right) =$$

$$\cong 0{,}1 \sin\left(0{,}01t + \pi/2\right) + 120 \sin\left(10^6 t - \tfrac{3}{2}\pi\right)$$

3) Si consideri il sistema di controllo in figura, in cui



$$G(s) = \frac{0.1}{(1+100s)(1+s)(1+0.1s)}$$

a) Determinare il controllore C(s) in modo tale che:

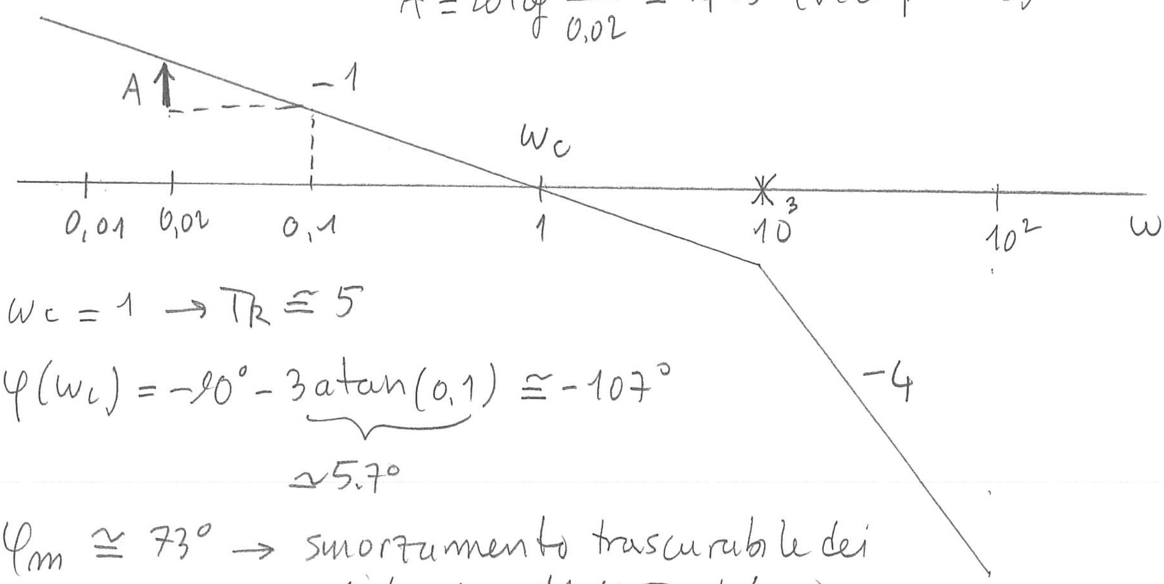
- il sistema di controllo sia asintoticamente stabile (supponendo il processo G(s) completamente raggiungibile e osservabile);
- l'errore di controllo dovuto al segnale di riferimento w costante si annulli in approssimativamente 5 unità di tempo, senza rilevanti oscillazioni.

b) Per il sistema di controllo progettato, determinare l'errore di controllo a fronte del disturbo d(t)=5 + 0.5 sin(0.02t).

Soluzione:

a) $C(s) = \dfrac{10(1+100s)(1+s)}{s(1+0.1s)^2} \rightarrow L(s) = \dfrac{1}{s(1+0.1s)^3}$

$A = 20\log\dfrac{0,1}{0,02} \simeq 14$ dB (vedi punto b)



$\omega_c = 1 \rightarrow T_R \cong 5$

$\varphi(\omega_c) = -90° - \underbrace{3\,\mathrm{atan}(0,1)}_{\simeq 5.7°} \cong -107°$

$\varphi_m \cong 73° \rightarrow$ smorzamento trascurabile dei poli dominanti di $F = L/(1+L)$

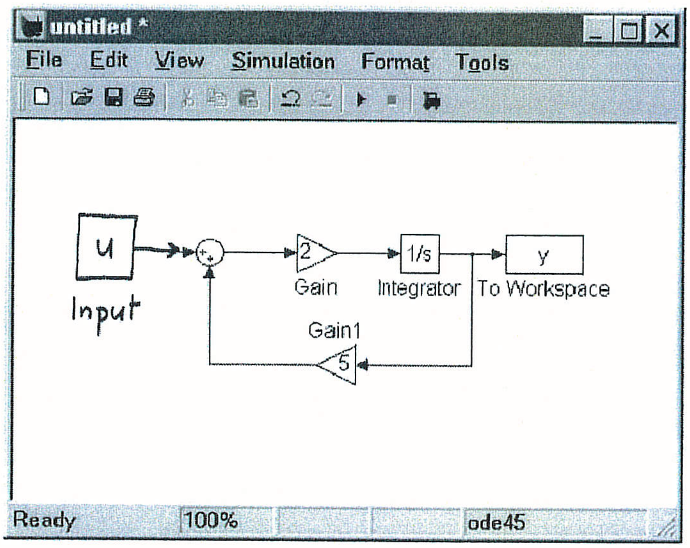
b) $e(t) = 5\underbrace{\left|-\dfrac{1}{1+L(s)}\right|_{s=0}}_{=0} + 0,5\underbrace{\left|-\dfrac{1}{1+L(s)}\right|_{s=i0,02}}_{\simeq -(20+A)\,\mathrm{dB} \,\cong\, 0,02} \sin(0.02t+\varphi)$

$\varphi \cong \frac{3}{2}\pi$ perchè $+\dfrac{1}{1+L(s)}$ ha sfasamento $\simeq +\frac{\pi}{2}$ per $\omega \ll \omega_c$

4) Definire la nozione di sistema stabilizzabile e fornire una condizione necessaria e sufficiente affinché un sistema sia stabilizzabile.

5) Definire la nozione di stabilità esterna e discutere la relazione tra stabilità esterna e interna (asintotica).

6) Determinare il modello ingresso/uscita (equazione differenziale o funzione di trasferimento) corrispondente allo schema Simulink in figura.



Soluzione:

4) Sistema stabilizzabile ≡ che può essere stabilizzato con una retroazione ≡ deve avere "stabili" ($Re(\lambda)<0$ a t.c., $|\lambda|<1$ a t.d.) tutti gli autovalori della sua parte non ragg (se presente)

5) Stabilità esterna ≡ y forzata limitata a fronte di ingresso limitato. Richiede la stabilità di tutti i poli, quindi coincide con la stabilità interna solo per sistemi c. ragg e c. oss.

6) $$G(s) = \frac{2/s}{1-\frac{10}{s}} = \frac{2}{s-10}, \quad \dot{y} - 10y = 2u$$