POLITECNICO
MILANO 1863

FONDAMENTI DI AUTOMATICA

Corso di laurea in Ingegneria Fisica – Prof. F. Dercole
Appello del 12/7/2018

COGNOME:______________________ NOME: ______________________

MATRICOLA o CODICE PERSONA: ________________________

FIRMA: ____________________________________ Visto del docente:_____

					Voto totale
10	10	10	2		32

ATTENZIONE !
- Non è consentito consultare libri, appunti, ecc.
- Le risposte devono essere giustificate.
- Le soluzioni devono essere riportate solo sui fogli allegati.
- Sono valutati anche l'ordine e la chiarezza espositiva.

1) Un fondo previdenziale suddivide i propri aderenti in tre classi, in base alla loro età: (1) da 20 a 40 anni, (2) da 40 a 60 anni, (3) oltre 60 anni. Gli aderenti di classe (1) e (2) versano ogni anno al fondo, rispettivamente, 2000 e 3000 euro, mentre quelli di classe (3) percepiscono dal fondo β euro all'anno. Ogni anno, una certa frazione α ij di aderenti di classe i passa, per ragioni anagrafiche, alla classe j (α_{ii} è quindi la frazione che rimane nella classe i). I coefficienti αij sono riportati nella tabella seguente.

$$[\alpha_{ij}] = \begin{bmatrix} 0.9 & 0.05 & 0 \\ 0 & 0.8 & 0.1 \\ 0 & 0 & 0.6 \end{bmatrix}$$

Infine, ogni anno il fondo recluta nuovi aderenti, esclusivamente di classe (1).

a) Descrivere l'evoluzione nel tempo della popolazione degli aderenti al fondo previdenziale mediante un sistema a tempo discreto, in cui u(t) sia il numero di nuovi aderenti nell'anno t e y(t) sia il numero complessivo di aderenti al fondo.

b) Studiare la stabilità del sistema dinamico proposto al punto 1.

c) Determinare, per ciascuna classe anagrafica, il numero di aderenti al fondo nel lungo periodo, nell'ipotesi che il numero di nuovi aderenti sia pari a 1000 ogni anno.

d) Aggiungere al modello un'ulteriore equazione di stato, la quale rappresenti l'evoluzione nel tempo della cassa del fondo previdenziale (nell'ipotesi che il capitale in cassa ad inizio anno benefici di un interesse bancario del 5%).

e) Determinare la quota β erogabile annualmente agli aderenti di classe (3) nell'ipotesi che la popolazione sia nelle condizioni di equilibrio determinate al punto c), e si voglia mantenere costante la cassa del fondo previdenziale al valore di 1.000.000 euro.

Soluzione:

a) $x_i(t)$ = n. aderenti di classe i nell'anno t , $i = 1, 2, 3$

$$
\begin{aligned}
x_1(t+1) &= 0.9x_1(t) + u(t) \\
x_2(t+1) &= 0.05x_1(t) + 0.8x_2(t) \\
x_3(t+1) &= 0.1x_2(t) + 0.6x_3(t) \\
y(t) &= x_1(t) + x_2(t) + x_3(t)
\end{aligned}
\qquad
A = \begin{bmatrix} 0.9 & 0 & 0 \\ 0.05 & 0.8 & 0 \\ 0 & 0.1 & 0.6 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}
\qquad c = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}
$$

b) A è triangolare : $\sigma(A) = \{0.9, 0.8, 0.6\}$

$|\lambda_i| < 1 \ \forall i \Rightarrow$ A è ASINTOTICAMENTE STABILE

c) calcolo lo stato di equilibrio:

$$
\left.
\begin{aligned}
\bar{x}_1 &= 0.9\bar{x}_1 + 1000 \\
\bar{x}_2 &= 0.05\bar{x}_1 + 0.8\bar{x}_2 \\
\bar{x}_3 &= 0.1\bar{x}_2 + 0.6\bar{x}_3
\end{aligned}
\right\} \Rightarrow \bar{x} = \begin{vmatrix} 10'000 \\ 2'500 \\ 625 \end{vmatrix}
$$

d) $x_4(t)$ = capitale della cassa previdenziale all'inizio anno t

$$x_4(t+1) = 1.05\,x_4(t) + 2000\,x_1(t) + 3000\,x_2(t) - \beta\,x_3(t)$$

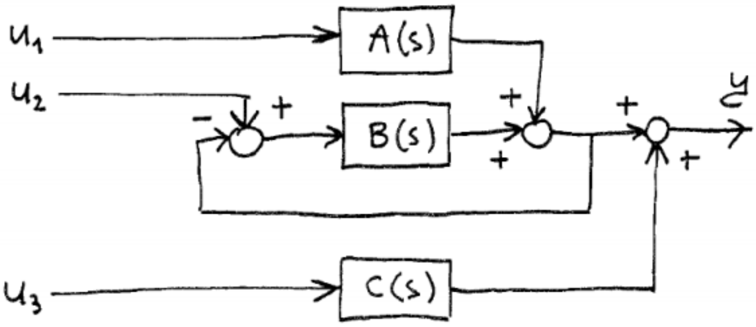
e) Impongo $x_4(t+1) = x_4(t) = 10^6$ e $|x_1 \ x_2 \ x_3| = |\bar{x}_1 \ \bar{x}_2 \ \bar{x}_3|$:

$$10^6 = 1.05 \cdot 10^6 + 2000 \cdot 10^4 + 3000 \cdot 2500 - \beta \cdot 625$$

$$\Rightarrow \beta = 44'080$$

2) Si consideri il sistema a tempo continuo rappresentato in figura, in cui i tre blocchi hanno funzione di trasferimento:

$$A(s)=\frac{1}{1+3s}\qquad B(s)=\frac{10}{s(1+s)}\qquad C(s)=2\frac{(1-s)(1-2s)}{(1+s)(1+2s)(1+3s)}$$



a) Determinare la funzione di trasferimento tra ciascuno degli ingressi e l'uscita y, discutendone la stabilità.
b) Determinare qualitativamente, e rappresentare graficamente, l'andamento di $y(t)$ quando agli ingressi u_1, u_2, u_3 viene applicato uno scalino unitario agli istanti, rispettivamente, $t=0,\ 20,\ 40$.

Soluzione:

a) $u_1 \to y$: $(u_2=u_3=0)$

$$y = Au_1 - By$$

$$y = \frac{A}{1+B}u_1 \qquad F(s) = \frac{A}{1+B} = \frac{1}{1+3s}\cdot\frac{1}{1+\frac{10}{s(1+s)}} = \frac{s(1+s)}{(1+3s)(s^2+s+10)}$$

poli: $-\frac{1}{3}, -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{39}}{2}$: asintoticamente stabile,

$T_R \simeq 5\cdot 3 = 15$,

oscillazioni $\tau = \frac{2\pi}{\frac{\sqrt{39}}{2}} \simeq 2$

$u_2 \to y$: $(u_1=u_3=0)$

$$y = B(u_2 - y)$$

$$y = \frac{B}{1+B}u_2 \qquad G(s) = \frac{B}{1+B} = \frac{\frac{10}{s(1+s)}}{1+\frac{10}{s(1+s)}} = \frac{10}{s^2+s+10}$$

poli: $-\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{39}}{2}$: asintoticamente stabile,

$T_R \simeq 5\cdot 2 = 10$,

oscillazioni $\tau \simeq 2$

$u_3 \to y$: $\quad y = C u_3 \quad$ $C(s) = 2\,\dfrac{(1-s)(1-2s)}{(1+s)(1+2s)(1+3s)}$

$(u_1 = u_2 = 0)$

poli : $-1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}$: asintoticamente stabile

$T_R \simeq 5 \cdot 3 = 15$

b) risp. scalino di $F(s)$:

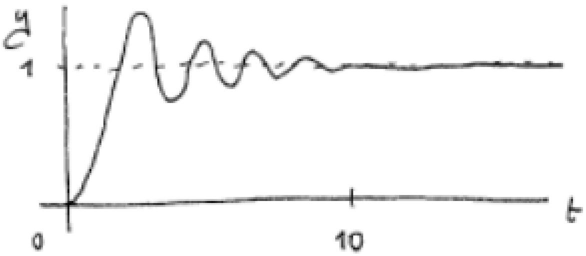
$y_\infty = F(0) = 0$

$(r=1)\begin{cases} y(0) = 0 \\ \dot{y}(0) = \frac{1}{3} > 0 \end{cases}$

risp. scalino di $G(s)$:

$y_\infty = G(0) = 1$

$(r=2)\begin{cases} y(0) = 0 \\ \dot{y}(0) = 0 \\ \ddot{y}(0) = 10 > 0 \end{cases}$



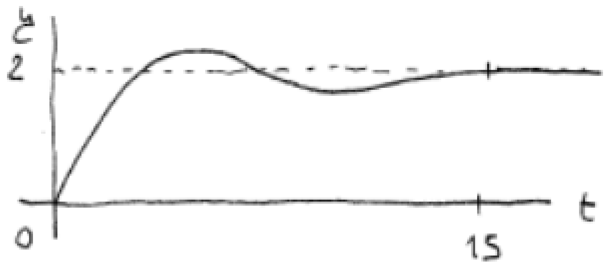
risp. scalino di $C(s)$

$y_\infty = C(0) = 2$

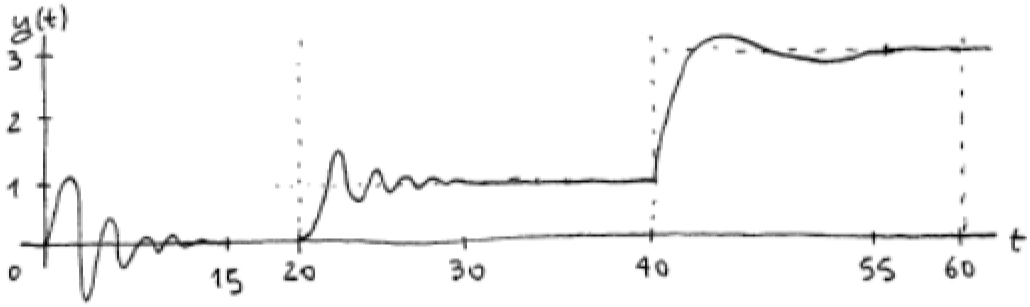
$(r=1)\begin{cases} y(0) = 0 \\ \dot{y}(0) = \frac{4}{6} > 0 \end{cases}$

$m_s = 2$

$N = 2$



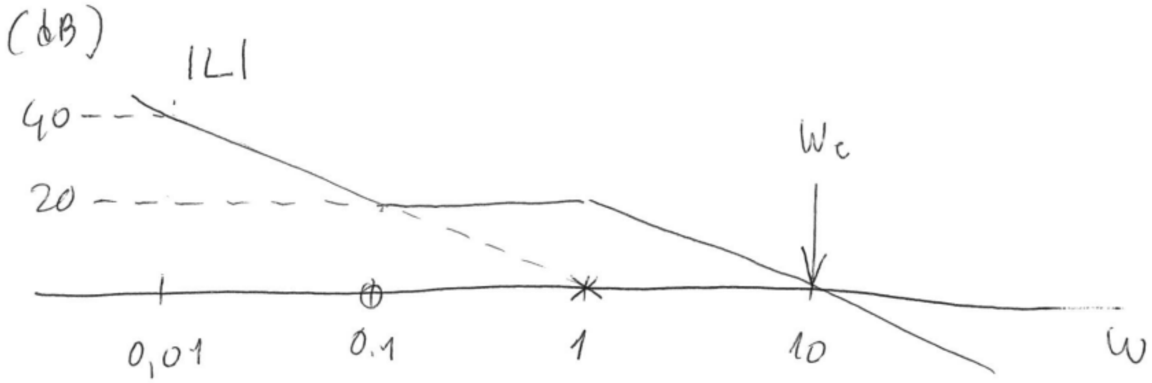
Andamento complessivo di $y(t)$:



3) Enunciare il criterio di Bode per la stabilità di un sistema retroazionato a tempo continuo e applicarlo alla funzione d'anello

$$L(s) = \frac{1+10s}{s(1+s)}$$

Soluzione:

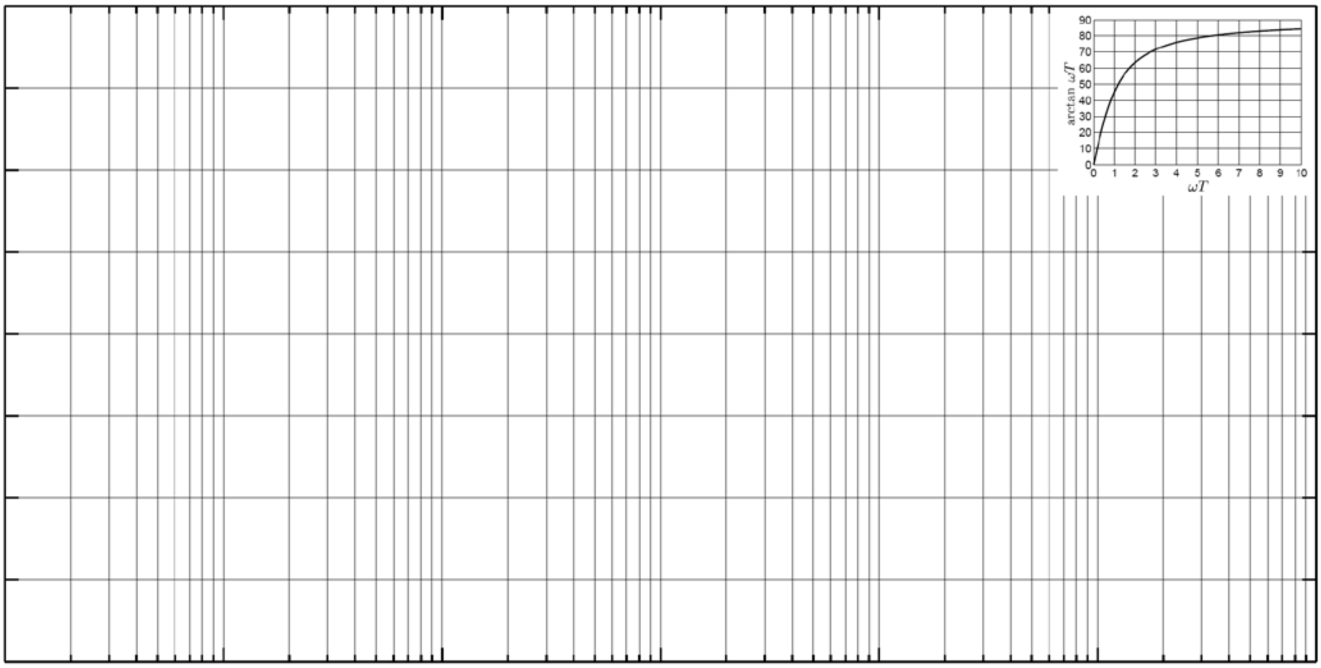


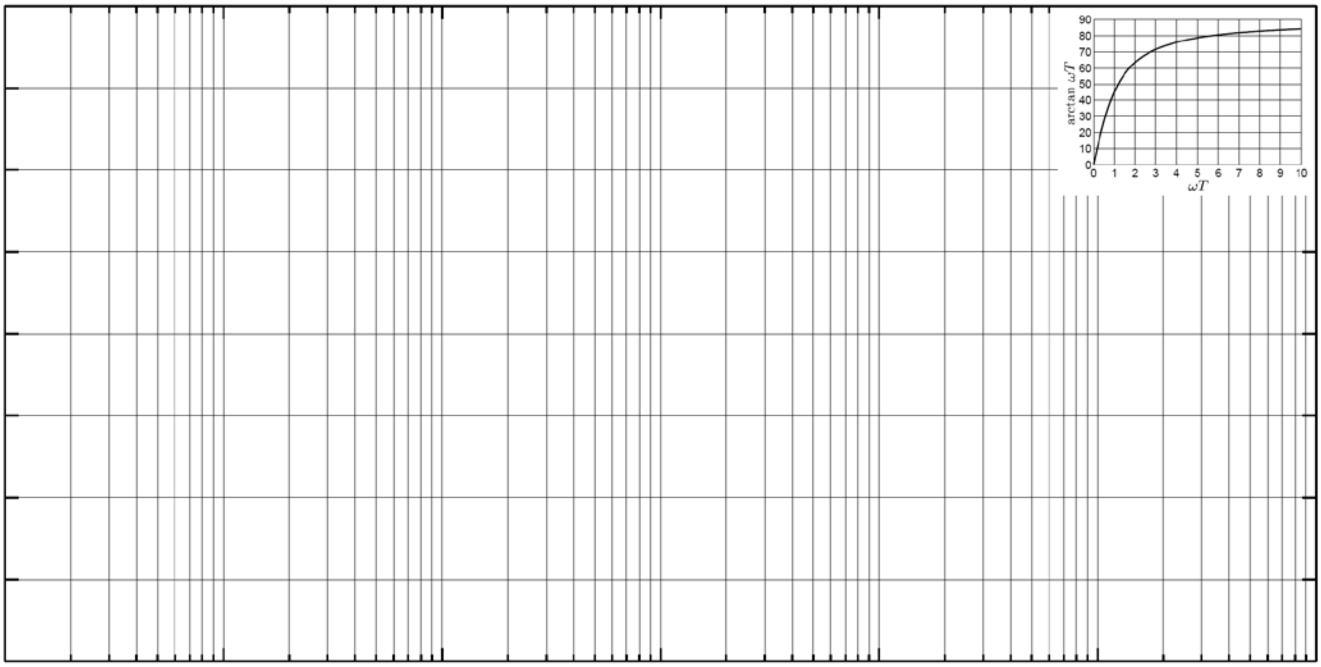
$\omega_c = 10$

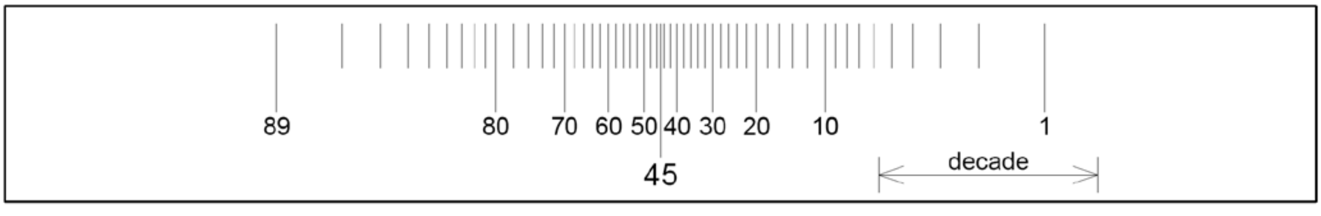
$\arg L(i10) = -90° + \text{atan}(10 \cdot 10) - \text{atan}(10 \cdot 1) \cong -84{,}9°$

$\varphi_m = \arg L(i10) + 180° \simeq 95{,}1° > 0$

$\Rightarrow$ sistema di controllo esternamente stabile


arctan ωT
90
80
70
60
50
40
30
20
10
0
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10
ωT


arctan ωT
90
80
70
60
50
40
30
20
10
0
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10
ωT


89
80
70
60
50
40
30
20
10
1
45
decade

7) Illustrare la sequenza di comandi da digitare, una volta avviato Matlab, per visualizzare la risposta allo scalino del sistema

$$G(s) = \frac{10(1-10s)}{(1+s)(1+2s)^2}$$

Soluzione: