POLITECNICO
MILANO 1863

FONDAMENTI DI AUTOMATICA
Corso di laurea in Ingegneria Fisica – Prof. F. Dercole
Appello del 12/7/2018

COGNOME:______________________ NOME: ______________________

MATRICOLA o CODICE PERSONA: ________________________

FIRMA: ____________________________________ Visto del docente:______

10	10	10	2

Voto totale
32

ATTENZIONE !
- Non è consentito consultare libri, appunti, ecc.
- Le risposte devono essere giustificate.
- Le soluzioni devono essere riportate solo sui fogli allegati.
- Sono valutati anche l'ordine e la chiarezza espositiva.

1) Una società finanziaria, all'inizio di ogni mese:

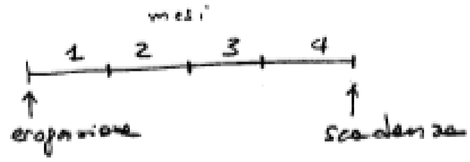
- eroga nuovi prestiti di durata quadrimestrale;
- riscuote l'interesse sui prestiti esistenti, nella misura del 1% dell'ammontare del prestito;
- incassa il rimborso dei prestiti giunti a scadenza;
- classifica come "persi", in media, il 2% dei prestiti esistenti; questi non daranno più luogo ad interessi e non saranno riscuotibili alla scadenza.

a) Descrivere tale attività mediante un modello di stato, in cui $u(t)$ rappresenta l'ammontare di nuovi prestiti erogati all'inizio del mese t e $y(t)$ l'ammontare degli interessi riscossi.
b) Studiare la stabilità del modello.

Se, a partire da $t = 0$, ogni mese i nuovi prestiti erogati ammontano a 100.000 euro:
c) Calcolare l'ammontare mensile degli interessi riscossi a regime.
d) Determinare dopo quanti mesi il sistema ha raggiunto tale regime.

Soluzione:

a) $x_i(t)$ = ammontare dei prestiti esistenti da i mesi all'inizio del mese t $(i = 1, 2, 3, 4)$



$$x_1(t+1) = 0{,}98\, u(t)$$
$$x_2(t+1) = 0{,}98\, x_1(t)$$
$$x_3(t+1) = 0{,}98\, x_2(t)$$
$$x_4(t+1) = 0{,}98\, x_3(t)$$
$$y(t) = 0{,}01\left[x_1(t) + x_2(t) + x_3(t) + x_4(t)\right]$$

b) $A = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}98 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}98 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}98 & 0 \end{vmatrix}$ $\quad \{\lambda\}_A = \{0, 0, 0, 0\} \rightarrow$ A è ASINT. STAB

c) $x_1 = 98.000$ €
$x_2 = 96.040$ €
$x_3 \cong 94.120$ €
$x_4 \cong 92.237$ €

$y \cong 3804$ €

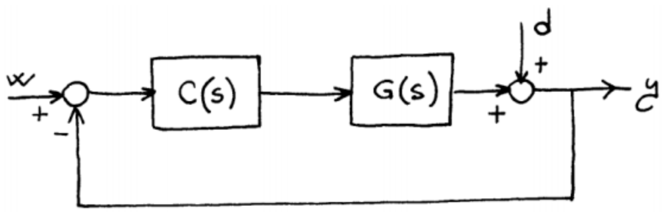
d) A è nilpotente $\Rightarrow$ il sistema tende a regime al più in 4 mesi

$A^2 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & 0 & 0 & 0 \\ 0 & * & 0 & 0 \end{vmatrix}$ $\quad A^3 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$ $\quad A^4 = 0$

$\Rightarrow$ in 4 mesi

2) Si consideri il sistema di controllo in figura, in cui

$$G(s)=\frac{0.1}{(1+100s)(1+0.1s)(1+s)}$$



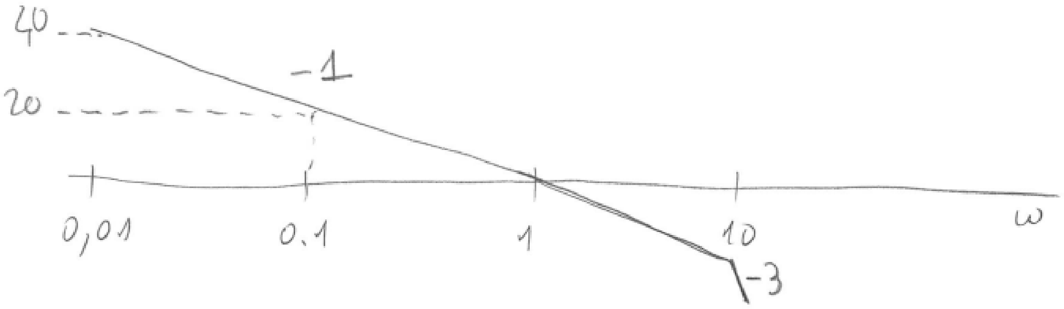
a) Determinare un controllore $C(s)$ tale che
   a.1) il sistema di controllo sia esternamente stabile;
   a.2) l'errore a transitorio esaurito dovuto al riferimento costante sia nullo;
   a.3) il tempo di risposta sia (approssimativamente) 5 unità di tempo.
b) Determinare l'errore a transitorio esaurito dovuto al disturbo $d(t) = 10 + \sin(0.01t)$.

Soluzione:

a.2) introduco un integratore in C

a.1 e a.3) $C(s) = \frac{10}{s}\,\frac{(1+100s)(1+s)}{(1+0.1s)^2}$

$\omega_c = 1$, $\varphi(\omega_c) = -90° - 3\underbrace{\mathrm{atan}(0.1)}_{\cong 5.7°} \cong -107.1° \Rightarrow \varphi_m \cong 72.9°$



$\varphi_m > 70° \Rightarrow T_d \cong \frac{1}{\omega_c} = 1 \Rightarrow T_{risp} \cong 5T_d = 5$

b) $G_{de}(s) = -\frac{1}{1+L(s)} \cong -\frac{1}{L(s)}$

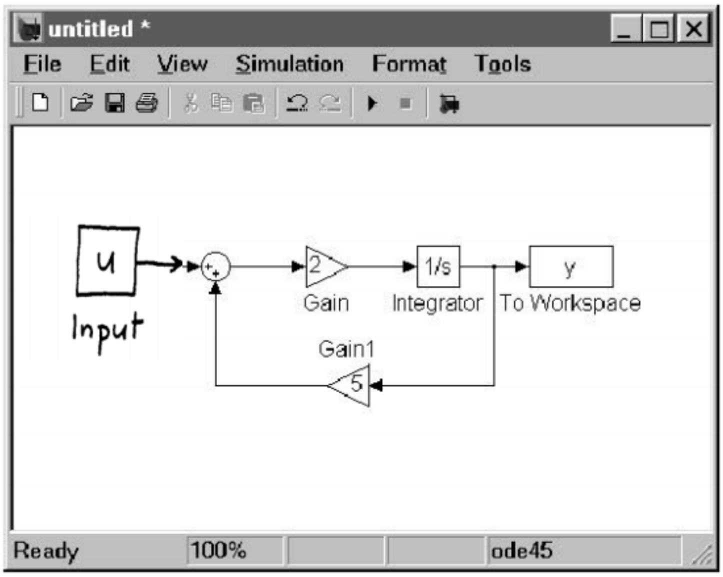
$\omega = 0{,}01 \ll \omega_c$

$$\lim_{t\to\infty} e(t) = 10\underbrace{G_{de}(0)}_{=0} + \underbrace{\left|\frac{1}{L(i0{,}01)}\right|}_{\cong 0{,}01} \sin(0{,}01t + \pi - \underbrace{\arg L(i0{,}01)}_{\cong -\pi/2})$$

3)
a) Definire la proprietà di stabilità di un equilibrio di un sistema dinamico non lineare a tempo continuo.
b) Applicare la definizione data ad un esempio a scelta (non lineare).

Soluzione:

4) Determinare il modello ingresso/uscita (equazione differenziale o funzione di trasferimento) corrispondente allo schema Simulink in figura.



Soluzione:

Dallo schema si deduce:

$$y = \frac{2}{s}(5y+u) \quad \text{da cui} \quad y = \frac{2}{s-10}\,u$$

quindi $G(s) = \dfrac{2}{s-10}$, $\dot{y} - 10y = 2u$