



Politecnico di Milano

Facoltà di Ingegneria

FONDAMENTI DI AUTOMATICA

Prof. F. Dercole

Appello del 28/06/2017

COGNOME: _____ NOME: _____

MATRICOLA/CODICE PERSONA: _____

AVVERTENZA

I candidati potranno **prendere visione del compito corretto** e discutere dell'esito complessivo dell'esame:

Giovedì 13/7 ore 16.30 nell'ufficio di Della Rossa (2° piano DEIB, tel. 3579)

FIRMA: _____ Visto del docente: _____

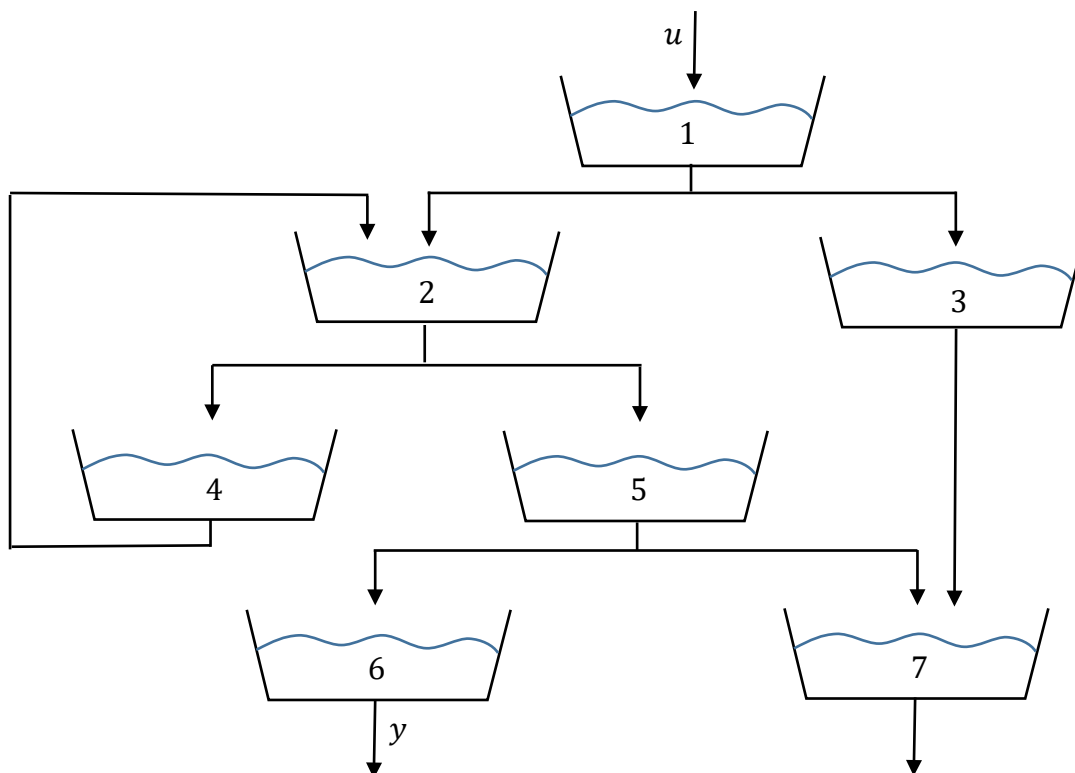
| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 8 | 8 | 8 | 6 | 2 |
| | | | | |

Voto totale:

| |
|----|
| 32 |
| |

- ATTENZIONE !**
- Non è consentito consultare libri, appunti, ecc.
 - Le risposte devono essere giustificate.
 - Le soluzioni devono essere riportate solo sui fogli allegati.
 - Sono valutati anche l'ordine e la chiarezza dell'esposizione.

1) Si consideri la rete idrica descritta in figura



1. Si descriva l'evoluzione del volume d'acqua contenuto in ciascun serbatoio per mezzo di un sistema dinamico (nota: i serbatoi sono identici e si svuotano in circa 5 minuti, i flussi che entrano in due serbatoi sono divisi in maniera equa).
2. Si studi la stabilità del sistema.
3. Si dica, anche senza effettuare calcoli, se il sistema è completamente raggiungibile.
4. Si dica, anche senza effettuare calcoli, se il sistema è completamente osservabile.

1) $\dot{x} = Ax + bu$ con $b = [1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$ e

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1/2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

- 2) Sistema as. stab perché il mov. libero $\rightarrow 0 \forall x(0)$
(tutti i serbatoi si svuotano)

Alternativamente, dalla scomposizione triangolare a blocchi di A risulta che 4 autovalori coincidono con -1 , mentre gli altri 3 sono quelli della matrice A_{24} (righe e colonne 2-4)

$$\Delta_{A_{24}}(\lambda) = (\lambda+1)^3 - (\lambda+1)/2 = \lambda^3 + 3\lambda^2 + \frac{5}{2}\lambda + \frac{1}{2}$$

$\alpha_1 > 0 \quad \alpha_2 > 0 \quad \alpha_3 > 0$

\downarrow

$\frac{\alpha_3}{\alpha_1} = \frac{1}{6}$

\Rightarrow sistema as. stab per il
criterio di Routh.

- 3) Sistema non completamente raggi

Se $x_4(0) = x_5(0) = 0$ allora risulta $x_4(t) = x_5(t) \forall t > 0$

visto che i due serbatoi sono identici e ricevono lo stesso flusso in ingresso.

- 4) Sistema non completamente osservabile

x_3 e x_7 non hanno alcun effetto su $y = x_6$

2) Si consideri il sistema a tempo discreto descritto dalle matrici:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad d = 0$$

1. Spiegare perché il sistema è instabile.
 2. Il sistema è completamente raggiungibile? È possibile stabilizzarlo?
 3. Il sistema è completamente osservabile? È possibile ricostruire lo stato del sistema elaborandone ingresso e uscita?
 4. Se possibile, progettare un controllore (osservatore + legge di controllo) che porti l'uscita del sistema a 0 in tempo finito. In quante transizioni l'uscita raggiungerà il valore desiderato?
-

1) $\lambda_1 = 0$, $\lambda_{2,3}$ autovalori di $A_{23} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$
 $\text{tr}(A_{23}) = 4 > 2$ (dimensione di A_{23}) \Rightarrow sistema instab.

2a) NO, x_1 non è influenzata né da u né da x_2 e x_3

2b) SI, perché il sistema è scomposto in una parte n.r. as. stab. (con unico autovalore $\lambda_1 = 0$) e in una parte c.r. (con autovalori λ_2 e λ_3), quindi stabilizzabile. Infatti

$$R_{23} = \begin{bmatrix} b_{23} & A_{23} b_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ è non singolare}$$

3a) Dalle equazioni non si può ^{immediatamente} concludere che non lo sia, visto che $y = x_3$ e che x_3 è influenzata sia da x_1 che da x_2 . Si deve quindi calcolare la matrice di osservabilità

$$O = \begin{bmatrix} c^T \\ c^T A \\ c^T A^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 5 \\ 16 & 4 & 27 \end{bmatrix}, \quad \det O = 12 - 16 \neq 0 \Rightarrow \text{sist. c.o.}$$

3b) SI perché c.o.

4a) È possibile in quanto l'autovalore λ_1 della parte n.r. (non modificato dalle retroazioni) è già nullo. Pertanto, ricostruendo e retroazionando solo x_2 e x_3 , considero il sistema c.r.+c.o. $(A_{23}, b_{23}, c_{23}^T)$.

$$A_c = A_{23} + b_{23} k = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} (k_1 \ k_2) = \begin{pmatrix} k_1-1 & k_2+2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\Delta_{A_c}(\lambda) = \lambda^2 - (k_1+4)\lambda + 5(k_1-1) - (k_2+2) = \lambda^2$$

$$\begin{cases} k_1+4 = 0 \Rightarrow k_1 = -4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5(-5) - (k_2+2) = 0 \Rightarrow k_2 = -27 \end{cases}$$

↑
in posto per avere
autovalori nulli

$$A_R = A_{23} + l c_{23}^T = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & l_1+2 \\ 1 & l_2+5 \end{pmatrix}$$

$$\Delta_{A_R}(\lambda) = \lambda^2 - (l_2+4)\lambda - (l_2+5) - (l_1+2) = \lambda^2$$

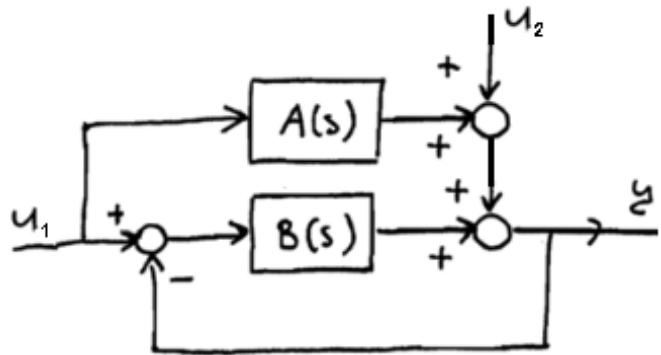
$$\begin{cases} l_2+4 = 0 \Rightarrow l_2 = -4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -(1) - (l_1+2) = 0 \Rightarrow l_1 = -3 \end{cases}$$

4b) In al più 4 iterazioni, visto che $x_1(t) = 0$ per $t > 0$ e che il sistema di controllo (sistema controllato + osservatore) ha 4 autovalori nulli.

3) Si consideri il sistema in figura, in cui

$$A(s) = \frac{1}{s}, \quad B(s) = \frac{10}{s(s+2)}$$



1. Determinare le funzioni di trasferimento tra gli ingressi u_1 e u_2 e l'uscita y e discuterne la stabilità esterna.
2. Determinare qualitativamente e rappresentare graficamente la risposta del sistema corrispondente a $u_1(t) = u_2(t) = \text{sca}(t)$.
3. Determinare l'uscita a transitorio esaurito corrispondente a $u_1(t) = -3 + 2 \cos(3t + 2)$ e $u_2(t) = 2$.

$$1) \underset{\text{Mason}}{G_{u_1 y}(s)} = \frac{A(s) + B(s)}{1 + B(s)} = \frac{s+12}{s^2+2s+10}, \quad \lambda_{1,2} = -1 \pm i3$$

\Downarrow
est. stab.

$$G_{u_2 y}(s) = \frac{1}{1+B(s)} = \frac{s(s+2)}{s^2+2s+10}$$

\Uparrow

$$2) \mu_{u_1 y} = G_{u_1 y}(0) = \frac{12}{10}$$

$$T_d = 1 \Rightarrow T_{\text{risp}} \approx 5$$

$$\omega_{\text{osc}} = \text{Im}(\lambda_{1,2}) = 3$$

$$T_{\text{osc}} = 2\pi/\omega_{\text{osc}} \approx 2$$

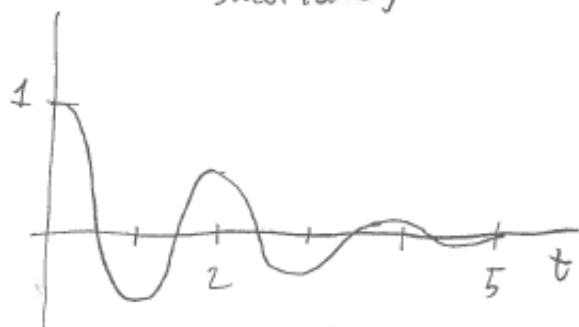
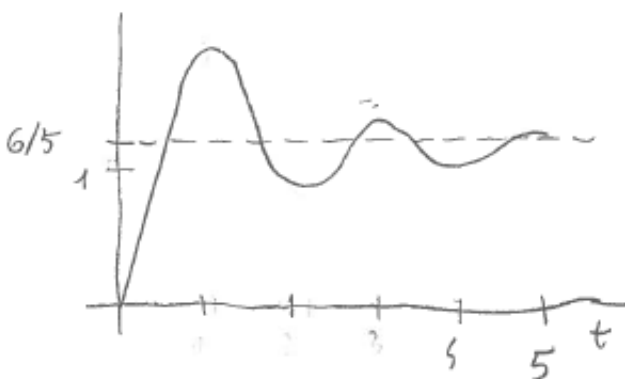
$$\mu_{u_2 y} = G_{u_2 y}(0) = 0$$

$$y(0) = 1 \quad (\text{sistema improprio } \beta_0 = 1)$$

$$\dot{y}(0) = \lim_{s \rightarrow \infty} s(sY(s) - y(0)) =$$

$$= \lim_{s \rightarrow \infty} s(G_{u_2 y}(s) - 1) = 0$$

$$\ddot{y}(0) < 0 \quad (\text{perciò } y \text{ è una sinusoide smorzata})$$



3) contributo di u_1

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = -3 \cdot \frac{6}{5} + 2 |G_{u_1 y}(i3)| \cos(3t + 2 + \arg G(i3))$$

contributo di u_2

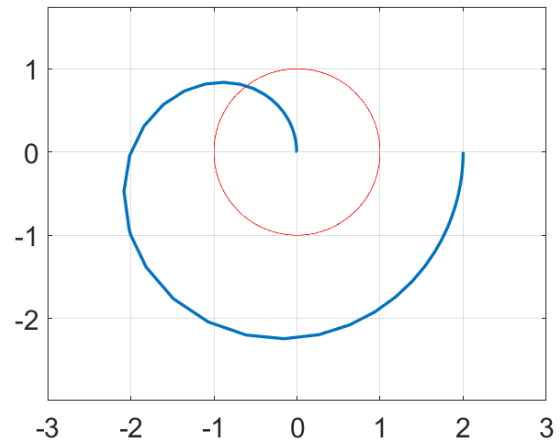
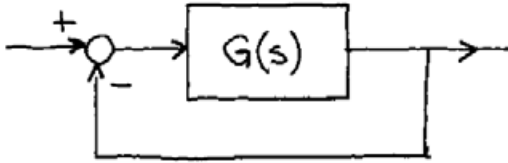
$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 2 \cdot 0 = 0$$

$$\left(\begin{array}{l} |G_{u_1 y}(i3)| = \frac{\sqrt{12^2 + 9}}{\sqrt{(10-9)^2 + 6^2}} = \dots \\ \arg G(i3) = \operatorname{atan}\left(\frac{1}{4}\right) - \operatorname{atan}(6) \end{array} \right)$$

4) Data la seguente funzione di trasferimento

$$G(s) = -20 \frac{200s - 1}{(10 - s)(1 + 100s)^2}$$

il cui diagramma polare della risposta in frequenza è rappresentato in figura, si consideri il seguente sistema retroazionato



Per ciascuna delle seguenti affermazioni, si dica se sono vere o false (scrivendo V o F nell'apposita casella) senza dare alcuna spiegazione.

Attenzione: Risposta corretta: 1 punto; risposta non data: 0 punti; risposta errata: -0.5 punti.

- | | |
|---|--|
| V | La risposta allo scalino del sistema in anello aperto diverge. |
| V | La risposta allo scalino del sistema in anello chiuso diverge. |
| F | Il margine di fase è positivo. |
| F | Il margine di guadagno (espresso in dB) è positivo. |
| F | Le ipotesi del criterio di Bode sono soddisfatte. |
| F | Il sistema retroazionato è a sfasamento minimo. |

5) Si vuole simulare e visualizzare l'andamento del sistema

$$\dot{x} = ux$$

con $u = 2 \sin(t)$ utilizzando Simulink. Si colleghino opportunamente i blocchi.

