SOLUZIONE

Politecnico di Milano
Scuola di Ingegneria Industriale e dell'Informazione

FONDAMENTI DI AUTOMATICA
Prof. F. Dercole
Appello del 02/05/2016

COGNOME:______________________ NOME: ______________________

MATRICOLA: ______________________

AVVERTENZA
I candidati potranno **prendere visione del compito corretto** e discutere dell'esito complessivo dell'esame:

Mercoledì 18/5 ore 14.30 aula 2A (DEIB, ed. 20, secondo piano)

In base alla normativa in vigore, in assenza di rinuncia esplicita, **una votazione positiva sarà registrata d'ufficio senza la firma dello studente** e non sarà più modificabile dal docente.

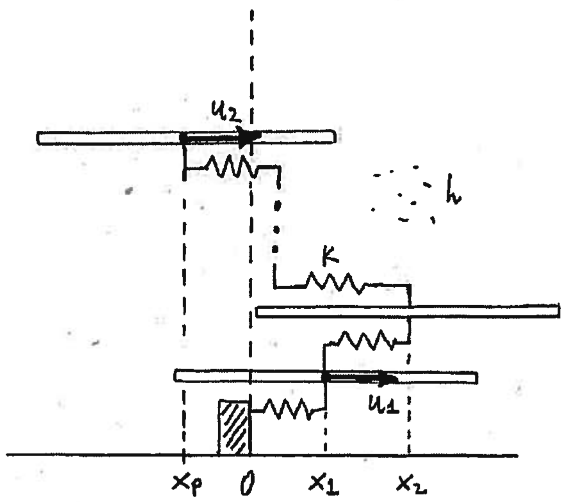
FIRMA: ______________________________________ Visto del docente:_____

Voto totale:

6	6	6	6	6	1	1	32

ATTENZIONE !
- Non è consentito consultare libri, appunti, ecc.
- Le risposte devono essere giustificate.
- Le soluzioni devono essere riportate solo sui fogli allegati.
- Sono valutati anche l'ordine e la chiarezza dell'esposizione.

1) Per studiare il controllo attivo delle oscillazioni (dovute a vento o a scosse telluriche), la struttura meccanica di un grattacielo è schematizzata come in figura. La soletta di ogni piano è connessa da colonne elastiche alle solette adiacenti e la soletta del primo piano è connessa alle fondamenta solidali al suolo. L'elasticità di tutte le connessioni è descritta dalla costante elastica k. Le solette sono considerate tutte uguali di massa M. Il controllo attivo può essere esercitato da attuatori elettromeccanici sulle colonne delle fondamenta, che esercitano una forza orizzontale u_1 sulla prima soletta, o da un reattore posto sul tetto che esercita una forza orizzontale u_2 sull'ultima soletta. Le oscillazioni sono rilevate misurando la velocità y di movimento dell'ultima soletta.



a) Si descriva la struttura meccanica a $P = 3$ piani con un modello dinamico lineare a tempo continuo, tenendo conto del coefficiente h di attrito viscoso dell'aria.

b) Si ricavino le matrici A, B, c^T, d^T del sistema.

c) Senza effettuare calcoli, si discuta la stabilità del sistema.

d) Nel caso semplice di una palazzina di un solo piano (e unico ingresso u), verificare la risposta data al punto c.

e) Nel caso del punto d, ricavare il modello ARMA e la funzione di trasferimento del sistema.

f) Determinare il guadagno del sistema al punto d, discuterne brevemente il significato fisico e discutere (senza effettuare calcoli) il guadagno nel caso generale a più piani.

---

a)
$$\dot{x}_1 = x_4$$
$$\dot{x}_2 = x_5$$
$$\dot{x}_3 = x_6$$
$$\dot{x}_4 = \frac{1}{M}\left(-k x_1 + k(x_2 - x_1) - h x_4 + u_1\right)$$
$$\dot{x}_5 = \frac{1}{M}\left(-k(x_2 - x_1) + k(x_3 - x_2) - h x_5\right)$$
$$\dot{x}_6 = \frac{1}{M}\left(-k(x_3 - x_2) - h x_6 + u_2\right)$$

$$y = x_6$$

b)
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{2K}{M} & \frac{K}{M} & 0 & -h & 0 & 0 \\ \frac{K}{M} & -\frac{2K}{M} & \frac{K}{M} & 0 & -h & 0 \\ 0 & \frac{K}{M} & -\frac{K}{M} & 0 & 0 & -h \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{1}{M} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{M} \end{bmatrix}$$

$$c^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad d^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}$$

c) Sistema as. stab. a causa dell'attrito
Il movimento libero tende a 0 da qualsiasi stato iniziale

d)
$$\dot{x}_1 = x_2$$
$$\dot{x}_2 = \frac{1}{M}(-Kx_1 - hx_2 + u)$$
$$y = x_2$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{K}{M} & -\frac{h}{M} \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} \end{bmatrix}$$
$$c^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \quad d = [0]$$

$\mathrm{tr}(A) = -\frac{h}{M} < 0$, $\det(A) = \frac{K}{M} > 0 \Rightarrow$ sist. as. stab.

e)
$$s x_1 = x_2$$
$$s x_2 = \frac{1}{M}(-Kx_1 - hx_2 + u)$$
$$s^2 y = s \cdot (s x_2) = \frac{1}{M}(-Ksx_1 - hsx_2 + su) = -\frac{K}{M}y - \frac{h}{M}sy + \frac{s}{M}u$$
$$\underbrace{\left(s^2 + \frac{h}{M}s + \frac{K}{M}\right)}_{D(s)} y = \underbrace{\frac{s}{M}}_{N(s)} u \qquad G(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$$

f) $\mu = G(0) = 0$
significato fisico: all'equilibrio la velocità $y = x_2$ e' nulla
e ciò vale anche con $y = x_{2P}$ nel caso di grattacielo a P piani.

2) Con riferimento alla struttura meccanica descritta nel problema 1

a) Senza effettuare calcoli, si discuta (su base intuitiva) la possibilità di controllare il sistema (con un numero qualsiasi di piani) utilizzando la misura y e un solo tipo di controllo attivo, con l'obiettivo di evitare oscillazioni e dimezzare il tempo di assestamento del grattacielo non controllato.

b) Effettuando i dovuti calcoli, si verifichi la fattibilità di quanto discusso al punto a per la palazzina di un solo piano di cui al punto d del problema 1.

c) Si progetti un regolatore del tipo discusso al punto b per una palazzina così dimensionata: $M = 10$ ton, $k = 40$ ton/sec^2, $h = 1$ ton/sec.

---

a) Il controllo proposto è realizzabile agendo sull'ingresso u_i ($i=1$ o 2) se il sistema è completamente raggiungibile da u_i e completamente osservabile da y. Su base intuitiva, entrambe le condizioni sembrano verificate grazie alle connessioni elastiche. Infatti, agendo su u_i si possono muovere tutte le solette (raggiungibilità) e non esiste una condizione iniziale non nulla che lasci ferma l'ultima soletta nel corrispondente movimento libero (osservabilità).

b) Basta notare che la $G(s)$ ottenuta al punto e del prob. 1 è di ordine 2

c) caso non controllato

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -0.1 \end{bmatrix} \quad \Delta_A(\lambda) = \lambda^2 + 0.1\lambda + 4 \;,\; \lambda_{1,2} = -0{,}05 \pm \sqrt{0{,}0025 - 4} \cong -0{,}05 \pm i2$$

$$T_d = 20 \text{ sec},\; T_{transitorio} = 100 \text{ sec},\; \omega = 2 \text{ rad/s}$$

caso controllato : $T_{transitorio} = 50 \text{ sec} \Rightarrow T_d = 10 \text{ sec} \Rightarrow \lambda_d = -0.1$

$$\Delta_{A+bk^T}(\lambda) = (\lambda + 0.1)^2 = \lambda^2 + 0.2\lambda + 0.01$$

$$\Delta_{A+lc^T}(\lambda) = (\lambda + 0.2)^2 = \lambda^2 + 0.4\lambda + 0.04$$

$$A + bk^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -0.1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0.1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 + 0.1k_1 & 0.1(k_2 - 1) \end{bmatrix}$$

$$A + lc^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -0.1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 + l_1 \\ -4 & -0.1 + l_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 0.1(1 - k_2) = 0.2 & \Rightarrow k_2 = -1 \\ 4 - 0.1k_1 = 0.01 & \Rightarrow k_1 = 39.9 \end{cases} \qquad \begin{cases} 0.1 - l_2 = 0.4 \\ 4 + 4l_1 = 0.04 \end{cases} \qquad \begin{cases} l_2 = -0.3 \\ l_1 = -0.99 \end{cases}$$

3) Con riferimento alla struttura meccanica non controllata descritta al punto d del problema 1 e dimensionata come al punto c del problema 2

a) Si discuta la risposta allo scalino, tracciandone un grafico qualitativo.

b) Si discuta l'effetto sulla posizione della soletta di una scossa tellurica rappresentata da un impulso sull'ingresso *u*.

---

a) $G(s) = \dfrac{0.1\, s}{s^2 + 0.1 s + 4}$ $\quad U(s) = \frac{1}{s} \Rightarrow Y(s) = \dfrac{0.1}{s^2 + 0.1 s + 4}$

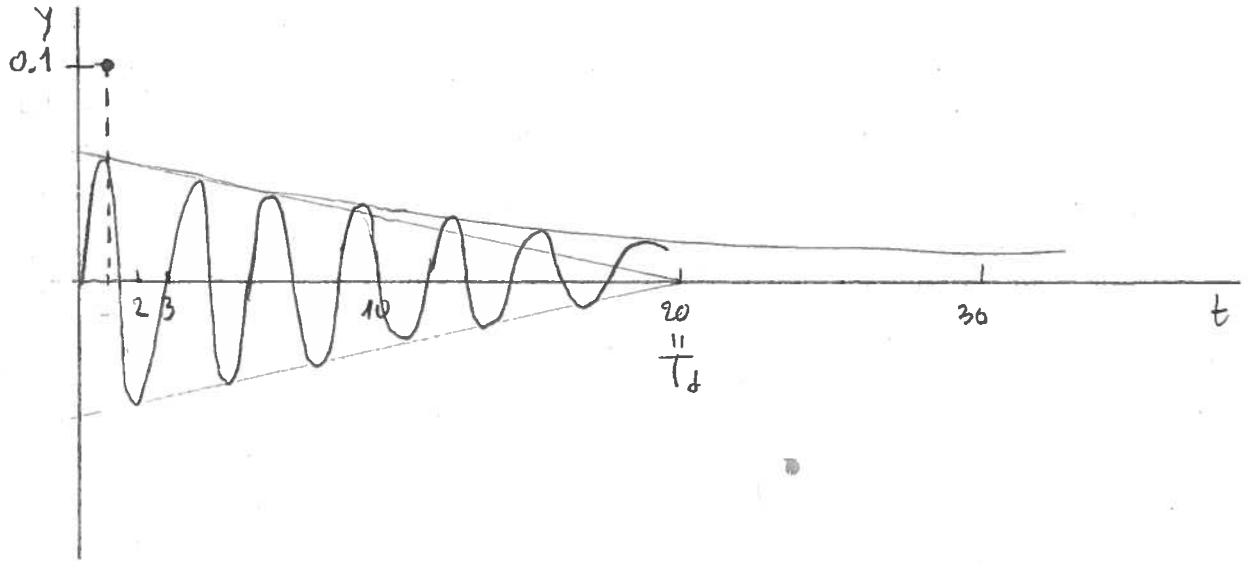
zeri : 0 , poli : $-0{,}05 \pm i2$

sistema est. stabile $\Rightarrow y(t) \rightarrow G(0) = 0$

$T_{transitorio} = 5\, T_d = 100$ sec.

oscillazioni permanenti con $\omega \cong 2$ rad/sec $\Rightarrow$ periodo $T = \frac{2\pi}{\omega} \cong 3$ sec.

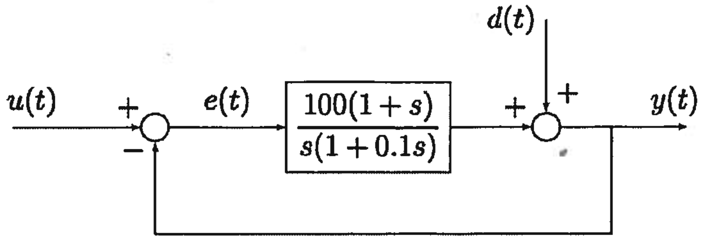
$y(0) = \lim_{s\to\infty} s\,Y(s) = 0 \qquad \dot{y}(0) = \lim_{s\to\infty} s\,(sY(s) - y(0)) = 0.1$



b) $y = x_1 \Rightarrow s^2 y = \frac{1}{M}(-ky - hsy + u) \Rightarrow G(s) = \dfrac{0.1}{s^2 + 0.1 s + 4}$

$U(s) = 1$ (impulso) $\Rightarrow Y(s) = G(s)U(s) =$ al caso del punto a

4) Si consideri il sistema di controllo in figura



a) Studiare la stabilità esterna del sistema e in caso positivo determinare il margine di fase.

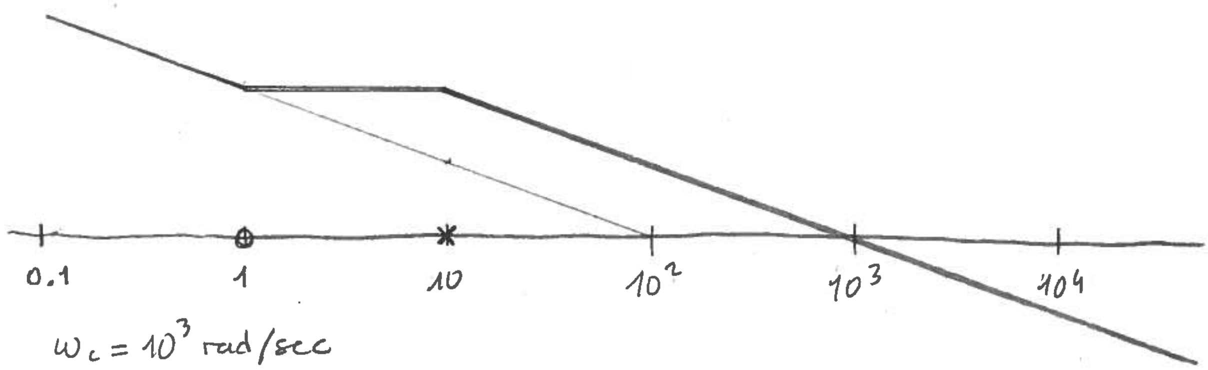
b) Determinare l'effetto di regime sulla variabile controllata $y(t)$ di un disturbo $d(t)$ costante.

c) Determinare l'effetto di regime sulla variabile controllata $y(t)$ di un riferimento $u(t)$ costante.

d) Determinare (anche approssimativamente) l'ampiezza a transitorio esaurito dell'errore di controllo $e(t)$ in assenza di disturbo e con riferimento $u(t)$ sinusoidale di ampiezza unitaria e pulsazione 1, 10^2, 10^4 rad/sec.

---

a) $|L(i\omega)|$



$\omega_c = 10^3$ rad/sec

$\arg L(i\omega_c) = -90° + \underbrace{\operatorname{atan}(\omega_c)}_{\simeq 90°} - \underbrace{\operatorname{atan}(0.1\omega_c)}_{\simeq 90°} \cong -90°$

sistema di controllo est. stab, con $\varphi_m \cong 90°$

b) $G_{dy}(s) = \dfrac{1}{1+L(s)}$, $G_{dy}(0) = 0 \Rightarrow$ effetto nullo

c) $G_{uy}(s) = \dfrac{L(s)}{1+L(s)}$, $G_{uy}(0) = 1 \Rightarrow y(t) \to \bar{u}$

d) $G_{ue}(s) = \dfrac{1}{1+L(s)}$, $e(t) = E\sin(\omega t + \varphi)$, $E = \left|\dfrac{1}{1+L(i\omega)}\right|$

ω	0.1	10^2	10^4
$E\|_{dB}$	-60	-20	0
E	10^{-3}	0.1	1

$E|_{dB} \cong \min\{1, -|L(i\omega)|_{dB}\}$

5)
a) Si sottolinei l'unica affermazione vera. Il sistema lineare a tempo continuo con matrice

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -5 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

- è asintoticamente stabile;
- è semplicemente stabile;
- è debolmente instabile;
- è (fortemente) instabile.

b) Si sottolinei l'unica affermazione vera. Un sistema dinamico lineare esternamente stabile con ingresso limitato può dar luogo a uscita illimitata?

- Solo se non completamente raggiungibile;
- Solo se non completamente osservabile;
- Solo se la parte non raggiungibile e non osservabile è instabile (anche solo debolmente);
- No.

c) Le affermazioni sotto riportate riguardano un sistema dinamico non lineare autonomo e tempo-invariante. Si sottolinei l'unica affermazione falsa.

- Il sistema può ammettere 3 equilibri.
- A tempo continuo la traiettoria ha tangente orizzontale nei punti dell'isoclina $dx_2/dt = 0$ in cui $dx_1/dt \neq 0$.
- A tempo discreto la varietà centro di un equilibrio è una varietà di dimensione pari al numero di autovalori di modulo unitario nel sistema linearizzato nell'intorno dell'equilibrio.
- La stabilità asintotica del sistema linearizzato nell'intorno di un equilibrio è condizione sufficiente per la stabilità asintotica dell'equilibrio.
- La stabilità semplice del sistema linearizzato nell'intorno di un equilibrio è condizione necessaria per la stabilità dell'equilibrio.
- Un equilibrio è stabile se le traiettorie che si originano da condizioni iniziali sufficientemente vicine all'equilibrio restano tutte lì vicino.
- Un equilibrio è instabile se arbitrariamente vicino ad esso esiste una condizione iniziale che genera una traiettoria che si allontana sufficientemente dall'equilibrio.

---

6) Si descriva cosa contengono le variabili Matlab X e Y calcolate con il seguente comando

[X,Y] = bode(TF,0.5)

dove TF è una variabile che contiene una funzione di trasferimento precedentemente definita.

X = modulo di TF per $s = i\,0{,}5$

Y = argomento (in gradi) di TF per $s = i\,0{,}5$

7) Si dica se nel videogioco IL CONVOGLIO, la vista sulle auto è dall'alto o laterale.

---

dall'alto