SOLUZIONI

Politecnico di Milano

FONDAMENTI DI AUTOMATICA

Corso di laurea in Ingegneria Fisica – Prof. F. Dercole

Appello del 07/05/2014

COGNOME: ______________________ NOME: ______________________

MATRICOLA: ____________________

FIRMA: ____________________________________ Visto del docente:______

AVVERTENZA

I candidati potranno **prendere visione del compito corretto** e discutere dell'esito complessivo dell'esame:

Martedì 13/5 ore 13.30-15 aula PT1 (DEIB, ed. 20, piano terra)

In assenza di rinuncia esplicita, **una votazione positiva sarà verbalizzata** e non sarà più modificabile.

							Totale
6	6	6	6	6	1	1	32

ATTENZIONE !
- Non è consentito consultare libri, appunti, ecc.
- Le risposte devono essere giustificate.
- Le soluzioni devono essere riportate solo sui fogli allegati.
- Sono valutati anche l'ordine e la chiarezza dell'esposizione.

1) La direzione di un ipermercato vuole studiare i flussi interni di clientela nel corso dell'apertura quotidiana. L'ipermercato è suddiviso in due grandi zone merceologiche, *food* e *non-food*, oltre alla zona *casse*. Tutti i clienti entrano obbligatoriamente dal reparto non-food, passano un numero arbitrario di volte da un reparto all'altro, ed escono infine dalle casse, che sono adiacenti al reparto food. In base a campionamenti statistici, si è osservato che, mediamente, ogni minuto il 15% dei clienti della zona non-food passa nella zona food, mentre il 5% dei clienti della zona food compie il passaggio inverso. Inoltre, il 10% dei clienti della zona food termina la spesa e si mette in coda alle casse. Infine, il 20% dei clienti alle casse termina le operazioni di pagamento e lascia l'ipermercato.

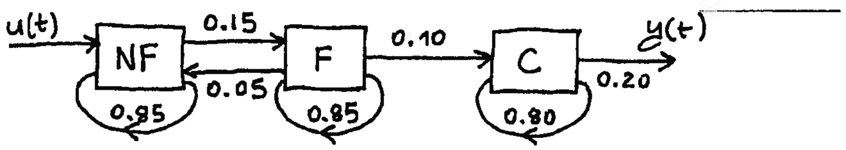
a) Descrivere il sistema mediante un modello di stato, in cui $u(t)$ rappresenti il numero di clienti che entrano nell'ipermercato nel corso del minuto t, e $y(t)$ il numero di clienti che lascia l'ipermercato.

b) Studiare la stabilità del modello.

c) Determinare il numero di clienti a regime nella zona casse, se nell'ipermercato entrano 10 clienti al minuto per tutto il periodo di apertura.

d) Determinare dopo quanto tempo dall'apertura mattutina il numero di clienti alle casse è a regime.

e) Determinare dopo quanto tempo dalla chiusura serale delle entrate l'ipermercato è vuoto.



a) $\left.\begin{matrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{matrix}\right\} = \text{n. clienti nel reparto} \left\{\begin{matrix} NF \\ F \\ C \end{matrix}\right\}$ al minuto t

$$x_1(t+1) = 0.85\,x_1(t) + 0.05\,x_2(t) + u(t)$$
$$x_2(t+1) = 0.15\,x_1(t) + 0.85\,x_2(t)$$
$$x_3(t+1) = 0.10\,x_2(t) + 0.80\,x_3(t)$$
$$y(t) = 0.20\,x_3(t)$$

b) $A = \left[\begin{array}{cc:c} 0.85 & 0.05 & 0 \\ 0.15 & 0.85 & 0 \\ \hdashline 0 & 0.10 & 0.80 \end{array}\right]$ $\qquad \lambda_1 = 0.80 \qquad A_2 = \begin{vmatrix} 0.85 & 0.05 \\ 0.15 & 0.85 \end{vmatrix}$

$$\Delta_{A_2}(\lambda) = \lambda^2 - 1.7\lambda + 0.715 = 0 \qquad \lambda = \frac{1.7 \pm \sqrt{1.7^2 - 2.86}}{2}$$

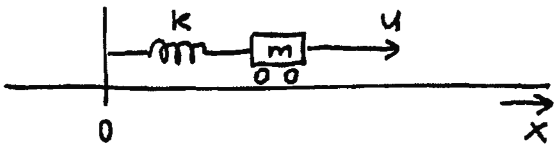
$$\sigma(A) = \{0.9366,\ 0.8,\ 0.7634\} \qquad |\lambda_i| < 1 \quad \forall i$$

$\Rightarrow$ A asint. stabile

c) $\begin{cases} x_1 = 0.85x_1 + 0.05x_2 + 10 \\ x_2 = 0.15x_1 + 0.85x_2 \\ x_3 = 0.10x_2 + 0.80x_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 100 \\ 100 \\ 50 \end{vmatrix}$ x_3 a regime

d)+e) $T_R \simeq 5T_D = 5 \cdot \left(-\dfrac{1}{\ln 0.9366}\right) = 76.3$ minuti

2) Il sistema in figura è composto da una massa m = 1 Kg sottoposta ad una forza di richiamo elastica, proporzionale (con coefficiente k = 5 N/m) allo scostamento della massa dalla posizione x = 0, ad una forza di attrito viscoso (con coefficiente $h > 0$ [Ns/m]), e ad una forza esterna $u(t)$.



Il sistema si trova inizialmente a riposo (posizione e velocità nulle all'istante $t = 0$). Nell'intervallo $0 \le t \le 10$ viene applicata la forza costante $u(t) = \bar{u} = 10$, mentre nel successivo intervallo $10 < t \le 20$ la forza applicata è nulla.

Determinare e tracciare nel piano di stato la traiettoria seguita dal sistema nell'intervallo $0 \le t \le 20$, nei due casi $h = 6$ e $h = 2$.

$$\dot{x}_1 = x_2$$
$$\dot{x}_2 = \frac{1}{m}\left(u - kx_1 - hx_2\right) = u - 5x_1 - hx_2$$

$A = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -5 & -h \end{vmatrix}$ $\quad b = \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix}$ $\quad \Delta_A(\lambda) = \lambda^2 + h\lambda + 5$

$\left.\begin{array}{l} tr\,A < 0 \\ det\,A > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$ A asint. stabile $\forall h > 0$

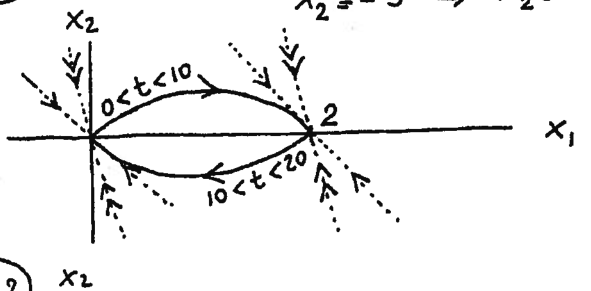
equilibrio : $\bar{x} = \begin{vmatrix} \bar{u}/5 \\ 0 \end{vmatrix}$; $\bar{u} = 10 \Rightarrow \bar{x} = \begin{vmatrix} 2 \\ 0 \end{vmatrix}$; $\bar{u} = 0 \Rightarrow \bar{x} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix}$

autovalori : $\lambda = \dfrac{-h \pm \sqrt{h^2 - 20}}{2}$ $\quad h = 6 :$ $\left.\begin{array}{l} \lambda_1 = -1 \\ \lambda_2 = -5 \end{array}\right\}$ NODO STABILE

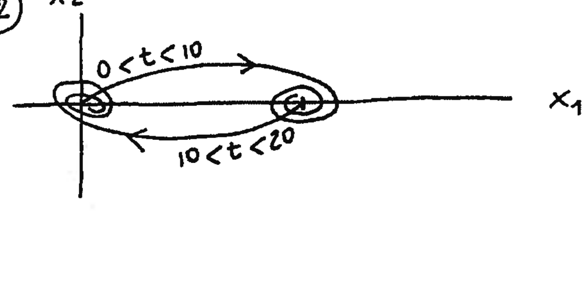
$h = 2 :$ $\lambda = -1 \pm i\,2$ FUOCO STABILE

$T_R \simeq 5 T_D = 5$: in ciascun intervallo con $\bar{u}$ costante, il sistema ha tempo sufficiente per raggiungere $\bar{x}$.

h=6 autovettori : $\lambda_1 = -1 \Rightarrow w_2 = -w_1$ $\quad (Aw = \lambda w)$
$\lambda_2 = -5 \Rightarrow w_2 = -5w_1$



h = 2



3) Si consideri il sistema dinamico lineare a tempo discreto descritto da

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 0.5 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$c = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$$

a) Studiarne la stabilità, la raggiungibilità e l'osservabilità.

b) Verificare se è possibile stabilizzarlo con una retroazione dinamica dall'uscita (regolatore = ricostruttore + legge di controllo) e, in caso affermativo, determinare un regolatore che porti il sistema all'equilibrio in tempo finito.

---

a) $\lambda_A = \{2; 0{,}5\}$ $\quad \exists\ |\lambda| > 1 \Rightarrow$ INSTAB.

$R = |b \quad Ab| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}$ $\quad \det R = -1 \Rightarrow$ C.R.

$\theta = \begin{vmatrix} c \\ cA \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0{,}5 \end{vmatrix}$ $\quad \det \theta = 1 \Rightarrow$ C.θ.

b) Sì essendo il sist. CR e Cθ. $A+bk$ e $A+lc$ devono avere tutti i λ in 0.

$A+bk = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 0{,}5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \end{vmatrix} |k_1 \quad k_2| = \begin{vmatrix} 2+k_1 & k_2 \\ -1 & 0{,}5 \end{vmatrix}$ $\quad tr = 2{,}5 + k_1 = 0$ $\quad \det = (2+k_1)0{,}5 + k_2 = 0$

$K_1 = -2{,}5 \quad k_2 = 0{,}25$

$A+lc = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 0{,}5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} l_1 \\ l_2 \end{vmatrix} |0 \quad 1| = \begin{vmatrix} 2 & l_1 \\ -1 & 0{,}5+l_2 \end{vmatrix}$ $\quad tr = 2{,}5 + l_2 = 0$ $\quad \det = (0{,}5+l_2)2 + l_1 = 0$

$l_2 = -2{,}5 \quad l_1 = 4$

4) Un dispositivo elettronico alimentato in tensione è sottoposto a prove sperimentali per ricavarne un modello dinamico lineare. Applicando ingressi sinusoidali di ampiezza unitaria a varie pulsazioni ω ("prova in frequenza"), $v_{in}(t) = \sin(\omega t)$, si sono rilevate l'ampiezza e lo sfasamento della tensione in uscita a transitorio esaurito, $v_{out}(t) = V \sin(\omega t + \varphi)$:

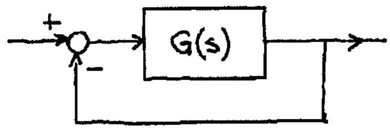
ω	0.01	1	100
V	100	10	1
φ	-90°	0°	-90°

Applicando invece un ingresso costante $v_{in}(t) = \bar{v} > 0$ ("prova statica"), l'uscita non tende ad un valore di regime ma cresce indefinitamente.

a) Determinare una funzione di trasferimento $G(s)$ tra tensione d'ingresso e d'uscita compatibile con i risultati delle prove.

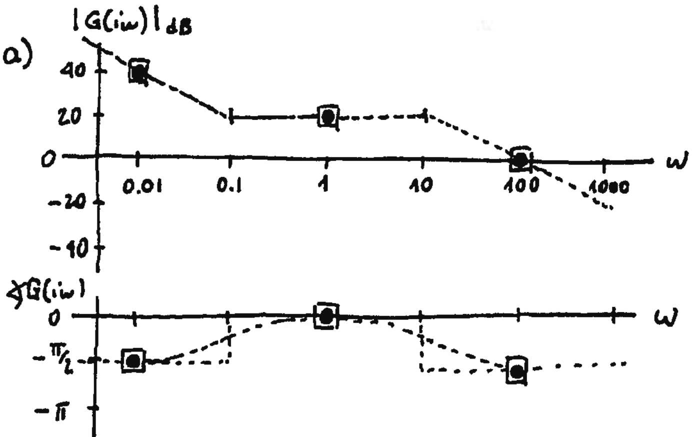
b) Rappresentare graficamente (in modo qualitativo) la risposta all'impulso di $G(s)$.

c) Discutere, mediante il criterio di Bode, la stabilità del sistema retroazionato in figura.



---

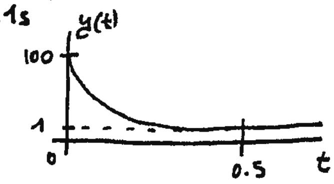
a)



$G(s) = \frac{1}{s} \, \frac{1+10s}{1+0.1s}$

La prova statica conferma la presenza dell'integratore (polo in $s=0$).

b) La risposta all'impulso di $G(s)$ coincide con la risposta allo scalino di $\tilde{G}(s) = \frac{1+10s}{1+0.1s}$ (esternamente stabile)



$y_\infty = \tilde{G}(0) = 1$

$T_R \simeq 5T_D = 0.5$

$r = 0 \quad y(0) = \frac{10}{0.1} = 100$

$\dot{y}(0) = \lim_{s \to \infty} s\left(s \frac{1}{s} \tilde{G}(s) - 100\right) = -\frac{99}{0.1} < 0$

c) condizioni di applicabilità: $G(s)$ non ha poli con $Re(p) > 0$, ok

$\exists ! \, \omega : |G(i\omega)| = 1$, ok

$\omega_c = 100$

$\varphi_c = -\pi/2 \quad \Rightarrow \quad \varphi_m = \frac{\pi}{2} > 0$

Il sistema in figura è asintoticamente stabile.

5)

a) Si sottolinei l'unica affermazione vera.

a.1) Un sistema dinamico lineare a tempo discreto ha tutti gli autovalori nulli. Applicando un ingresso costante positivo quando il sistema ha stato iniziale nullo

- l'uscita rimane limitata ma non tende ad alcun valore costante.
- l'uscita raggiunge un valore costante in tempo infinito.
- l'uscita raggiunge un valore costante in tempo finito.
- l'uscita raggiunge in tempo finito un valore costante positivo.

a.2) La matrice Jacobiana di un sistema dinamico di ordine 3, a tempo continuo non lineare, valutata in un equilibrio, ha autovalori $\lambda_1 = -0.5$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = 1$.

- L'equilibrio è asintoticamente stabile.
- L'equilibrio è stabile ma non asintoticamente stabile.
- L'equilibrio è instabile.
- Non si può affermare nulla.

b) Si sottolinei l'unica affermazione falsa.

b.1) Un sistema dinamico lineare a tempo continuo ha tutti i gli autovalori con parte reale negativa.

- Il sistema è asintoticamente stabile.
- Il sistema è esternamente stabile.
- L'uscita resta limitata a fronte di qualsiasi ingresso limitato.
- I "modi" associati agli autovalori non presentano fattori polinomiali di grado > 0.

b.2) La i-esima variabile di stato di un sistema dinamico lineare non è influenzata dall'ingresso. Inoltre, non esistono stati iniziali (a parte $x(0) = 0$) che generano uscita libera identicamente nulla.

- Il modello ARMA ha dimensione inferiore a quella del modello di stato.
- La funzione di trasferimento ha dimensione inferiore a quella del modello di stato.
- La funzione di trasferimento ha dimensione inferiore a quella del modello ARMA.
- La matrice di raggiungibilità non ha rango pieno.

---

6) Si commenti il seguente codice Matlab:

```
t=[0:0.01:100];
u=sin(2*t);
lsim(S,u,t)
```

dove S è una variabile che contiene un oggetto sistema dinamico a tempo continuo precedentemente definito.

7) Si dica se nel videogioco IL GIOCOLIERE, le aste rotanti sono disposte verso il basso o verso l'alto rispetto al carrello.