SOLUZIONI

Politecnico di Milano

Scuola di Ingegneria Industriale e dell'Informazione

FONDAMENTI DI AUTOMATICA

Prof. F. Dercole

Appello del 08/05/2013

COGNOME:________________________ NOME: ________________________

MATRICOLA: ______________________

AVVERTENZA

I candidati potranno **prendere visione del compito corretto** e discutere dell'esito complessivo dell'esame:

Martedì 14/5 ore 14.30 aula 2A (DEIB, ed. 20, secondo piano)

In base alla normativa in vigore, in assenza di rinuncia esplicita, **una votazione positiva sarà registrata d'ufficio senza la firma dello studente** e non sarà più modificabile dal docente.

FIRMA: ____ Visto del docente:______

Voto totale:

6	6	6	6	6	1	1	32

ATTENZIONE !
- Non è consentito consultare libri, appunti, ecc.
- Le risposte devono essere giustificate.
- Le soluzioni devono essere riportate solo sui fogli allegati.
- Sono valutati anche l'ordine e la chiarezza dell'esposizione.

1) All'inizio di ogni anno t il Ministero effettua un versamento bancario di $u(t)$ milioni di Euro al Politecnico di Milano. Subito dopo il Politecnico impegna 1/5 del proprio capitale per spese di gestione, mentre cede i 3/5 del capitale dividendoli tra le Scuole di Ingegneria e Architettura in proporzione al numero di studenti e alle credenziali scientifiche delle due Scuole. In media 2/3 del capitale ceduto alle Scuole va a Ingegneria e la restante frazione ad Architettura. Appena ricevuto il versamento, le Scuole impegnano il 10% del proprio capitale per spese di gestione, cedono l'80% ai Dipartimenti e investono, così come il Politecnico, il rimanente capitale al tasso di interesse del 4%.

a) Si definiscano le variabili di stato necessarie per descrivere la dinamica finanziaria.

b) Si determinino le equazioni del sistema in cui l'uscita $y(t)$ indichi il finanziamento complessivo percepito dai Dipartimenti della Scuola di Ingegneria nell'anno t.

c) Si discuta la stabilità del sistema.

d) Si determini il finanziamento complessivo percepito a regime dai Dipartimenti della Scuola di Ingegneria a fronte di un finanziamento ministeriale costante di 10 milioni di Euro per anno.

e) Si dica in quanti anni viene approssimativamente raggiunto il regime determinato al punto precedente.

---

a) $x_1(t)$: saldo del Politecnico all'inizio dell'anno t

$x_2(t)$: saldo della Scuola di Ing. all'inizio dell'anno t

$x_3(t)$: saldo della Scuola di Arc. all'inizio dell'anno t

b)
$$x_1(t+1) = (x_1(t) + u(t))\left(1-\frac{1}{5}-\frac{3}{5}\right)(1+0.04)$$
$$x_2(t+1) = \left(x_2(t) + (x_1(t)+u(t))\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{3}\right)(1-0.1-0.8)(1+0.04)$$
$$x_3(t+1) = \left(x_3(t) + (x_1(t)+u(t))\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{3}\right)(1-0.1-0.8)(1+0.04)$$
$$y(t) = \left(x_2(t) + (x_1(t)+u(t))\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{3}\right)0.8$$

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1.04}{5} & 0 & 0 \\ \frac{0.208}{5} & 0.104 & 0 \\ \frac{0.104}{5} & 0 & 0.104 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} \frac{1.04}{5} \\ \frac{0.208}{5} \\ \frac{0.104}{5} \end{bmatrix}$$

$$c^T = \begin{bmatrix} \frac{1.6}{5} & 0.8 & 0 \end{bmatrix} \quad d = \begin{bmatrix} \frac{1.6}{5} \end{bmatrix}$$

c) A è triangolare $\Rightarrow \lambda_i = a_{ii}$

$|\lambda_i| < 1$, $i = 1, 2, 3$ $\Rightarrow$ sistema as. stab.

d) $\bar{u} = 10$

$$\bar{x}_1 = \frac{1.04}{5}\bar{x}_1 + \frac{1.04}{5}\bar{u} \quad \rightarrow \quad \bar{x}_1 = \frac{1.04/5}{1 - \frac{1.04}{5}}\bar{u}$$

$$\bar{x}_2 = \frac{0.208}{5}\bar{x}_1 + 0.104\bar{x}_2 + \frac{0.208}{5}\bar{u} \quad \rightarrow \quad \bar{x}_2 = \frac{\frac{0.208}{5}(\bar{x}_1 + \bar{u})}{1 - 0.104}$$

$$\bar{y} = \frac{1.6}{5}\bar{x}_1 + 0.8\bar{x}_2 + \frac{1.6}{5}\bar{u} = \dots$$

e) regime raggiunto in circa $-\dfrac{5}{\log(0.208)}$ anni

2) Il funzionamento di un circuito elettronico è descritto dal seguente sistema dinamico a tempo continuo:

$$\dot{x}_1 = x_2 - x_1$$
$$\dot{x}_2 = -2x_1 + 6x_2 - x_2^3$$

Verificare che il circuito si comporti da "bi-stabile", vale a dire che ammetta due attrattori e che raggiunga asintoticamente uno o l'altro a seconda della condizione iniziale della traiettoria.

In dettaglio:

a) Determinare tutti gli stati di equilibro del sistema.

b) Studiarne la stabilità mediante il metodo della linearizzazione e verificare che siano presenti due attrattori.

c) Si dica infine cosa determina nel piano di stato il confine tra i bacini di attrazione dei due attrattori.

---

a) $\begin{cases} x_2 - x_1 = 0 \\ -2x_1 + 6x_2 - x_2^3 = 0 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} x_2 = x_1 \\ x_1(4 - x_1^2) = 0 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} x_2 = x_1 \\ x_1 = 0 \text{ oppure } x_1 = \pm 2 \end{cases}$

3 equilibri: $\bar{x}^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\bar{x}^{(1)} = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \end{bmatrix}$, $\bar{x}^{(2)} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$

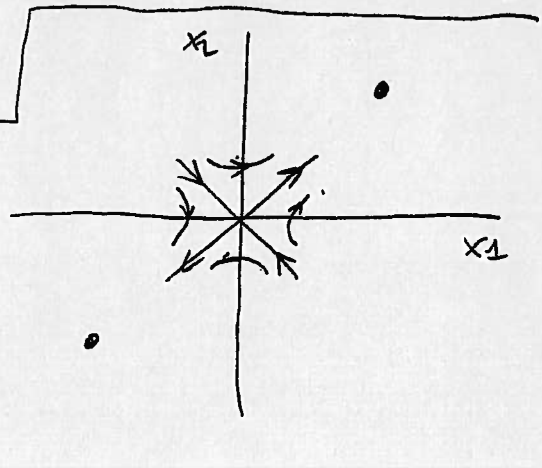
b) $J = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 6 - 3x_2^2 \end{bmatrix}$

$J|_{\bar{x}^{(0)}} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}$ traccia $= 5 > 0$, det $= -6 + 2 < 0$ $\Rightarrow$ sella

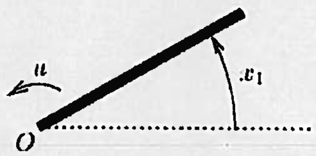
$J|_{\bar{x}^{(1)}} = J|_{\bar{x}^{(2)}} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -2 & -6 \end{bmatrix}$ traccia $= -7 < 0$, det $= 6 + 2 > 0$ $\Rightarrow$ nodo stabile ($tr^2 - 4\,det > 0$)

$\Rightarrow$ 2 attrattori $\bar{x}^{(1)}$ e $\bar{x}^{(2)}$

c) la varietà stabile della sella (vedi figura)



3) Il braccio meccanico rappresentato in figura ruota su un piano orizzontale attorno al centro O, è azionato da un motore elettrico che esercita una coppia u (positiva in senso antiorario) ed è dotato di un sensore di posizione.



a) Indicando con x_1 e x_2 rispettivamente la posizione e la velocità angolare del braccio, con J il suo momento d'inerzia, con h il coefficiente d'attrito e con y la misura fornita dal sensore, descrivere la dinamica del braccio mediante un sistema dinamico lineare a tempo continuo (A, b, c^T, d).

b) Si dica se sia possibile progettare un regolatore (ricostruttore dello stato + legge di controllo algebrica) che sia in grado, al di là dei limiti implementativi, di garantire transitori di controllo di rapidità arbitraria e privi di oscillazioni.

---

a) $\dot{x}_1 = x_2$

$\dot{x}_2 = \frac{1}{J}(u - h x_2)$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -h/J \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/J \end{bmatrix}$$

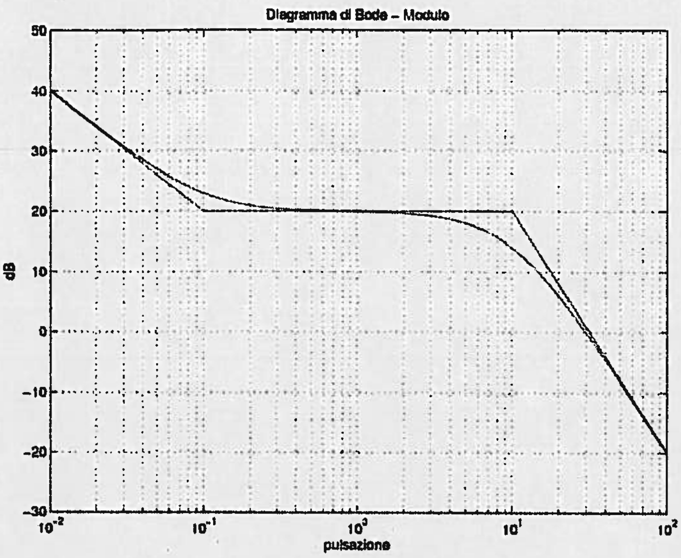
$$c^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \quad d = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$$

b) $$R = \begin{bmatrix} 0 & 1/J \\ 1/J & -h/J^2 \end{bmatrix} \quad \det R \neq 0 \rightarrow \text{sist. c.r.}$$

$$\Theta = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \det \Theta \neq 0 \rightarrow \text{sist. c.o.}$$

Sì, è possibile in quanto il sistema è c.r. e c.o.

4) Mediante esperimenti condotti applicando ad un sistema segnali sinusoidali a varie pulsazioni ω si è ricavato il seguente diagramma di Bode del modulo (esatto e approssimato).



Si è inoltre rilevato che lo sfasamento introdotto dal sistema tende a $-\pi/2$ per $\omega \to 0$ e a $-\pi$ per $\omega \to \infty$.

a) Determinare una funzione di trasferimento compatibile con i risultati sperimentali.

b) Determinare (qualitativamente) la risposta all'impulso del sistema, discutendo anche il tempo di risposta e l'eventuale presenza di oscillazioni.

---

a) pendenza iniziale (alle basse pulsazioni) $= -1 \rightarrow$ 1 polo in $s = 0$

retta iniziale $= \frac{1}{s}$ (taglia l'asse a 0 dB in $\omega = 1$)

1 zero in $|s| = 0.1$, 2 poli in $|s| = 10$

per poter avere $\varphi = -\pi$ per $\omega \rightarrow \infty$ lo zero deve essere stabile ($s = -0.1$) e anche i poli ($s = -10$) (per ovvi motivi sperimentali...)

$$G(s) = \frac{1 + 10s}{s(1 + 0.1s)^2}$$

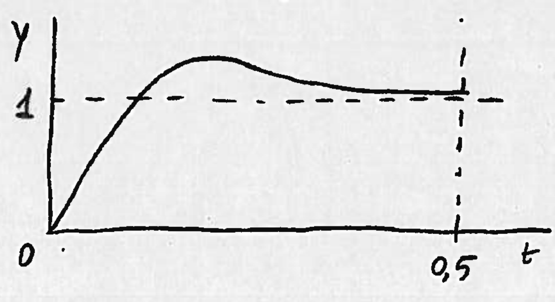
b) la risposta all'impulso di $G(s)$ è equivalente alla risposta allo scalino di $\tilde{G}(s) = (1 + 10s)/(1 + 0.1s)^2$

$y_\infty = \tilde{G}(0) = 1$

$r = 1 \rightarrow y(0) = 0,\ \dot{y}(0) = \frac{10}{(0.1)^2}$

$T_{risposta} = 5\,T_d,\ T_d = 0.1$

$\nexists$ oscillazioni (poli reali)



5) Le affermazioni sotto riportate riguardano sistemi dinamici lineari.

a) Si sottolinei l'unica affermazione vera. Il sistema a tempo continuo con matrice

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -5 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

- è asintoticamente stabile;
- è semplicemente stabile;
- è debolmente instabile;
- è (fortemente) instabile.

b) Si sottolinei l'unica affermazione falsa.

- I sistemi completamente raggiungibili e osservabili con zeri nella regione di stabilità hanno ingressi nascosti evanescenti.
- Un aggregato di sistemi completamente raggiungibili e osservabili può essere non completamente raggiungibile e osservabile.
- I sistemi senza zeri sono gli unici a sfasamento minimo.
- Un sistema asintoticamente stabile con ingresso costante ha un solo stato di equilibrio.
- Il guadagno di un sistema a tempo continuo con f.d.t. $G(s)$ è $G(0)$.
- I sistemi asintoticamente stabili sono esternamente stabili.
- I sistemi con poli nella regione di stabilità sono esternamente stabili.

---

6) Si descriva cosa contengono le variabili Matlab X e Y calcolate con il seguente comando

[X,Y] = bode(TF,0.5)

dove TF è una variabile che contiene una funzione di trasferimento precedentemente definita.

La risposta in frequenza della f.d.t. TF con $\omega = 0,5$

(ampiezza e fase)

7) Si dica se nel videogioco SCOMMESSA, le aste rotanti sono disposte verso il basso o verso l'alto rispetto al carrello.

verso il basso